**Доповіді**
**національної академії наук України**

5 • 2016

*МАТЕМАТИКА*

http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.05.007

УДК 517.9

**І. В. Веригіна**

НТУ України "Київський політехнічний інститут"

*E-mail:* veringa@i.ua

# Порівняння стратегій пари опонентів у задачі "захоплення" території

*(Представлено академіком НАН України І. О. Луковським)*

*У роботі теорія динамічних систем конфлікту застосовується до моделі, яка описує конфліктний перерозподіл ресурсного простору (території) між альтернативними сторонами (парою опонентів).*

***Ключові слова:*** динамічна система конфлікту, імовірнісна міра, самоподібна міра, рівноважний стан, конфліктний перерозподіл ресурсного простору.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо модель системи з двох протидіючих сторін, назвемо їх опонентами A та B, які взаємодіють (конфліктують) на спільному ресурсному просторі $\Omega$.

Вважаємо, що простором конфлікту є відрізок $\Omega = [0,1]$. Нехай простір конфлікту $\Omega = [0,1]$ є структурованим, тобто подрібненим на регіони $\Omega = \bigcup\limits_{i_1,\dots,i_k=1}^{2} \Omega_{i_1\dots i_k}$, $k = 1, 2, \dots$ ($k$ — крок подрібнення). При цьому міра Лебега $\lambda$ регіону $\Omega_{i_1\dots i_k}$ визначається за формулою

$$\lambda(\Omega_{i_1\dots i_k}) = |\Omega_{i_1\dots i_k}| = q_1^m q_2^{k-m}, \qquad m \in \{0, 1, \dots, k\},$$

де $q_1 + q_2 = 1$, $q_1$, $q_2 > 0$, а $m$ — кількість індексів в $\Omega_{i_1\dots i_k}$, які дорівнюють 1, тобто $i_l \colon i_l = 1, 1 \leqslant l \leqslant k$.

Розподіл присутності опонентів A та B на $\Omega$ задається кусково-рівномірними ймовірнісними мірами $\mu$ та $\nu$ відповідно:

$$\mu(\Omega_{i_1\dots i_k}) = p_{i_1\dots i_k}, \qquad \nu(\Omega_{i_1\dots i_k}) = r_{i_1\dots i_k}, \qquad \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{2} p_{i_1\dots i_k} = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{2} r_{i_1\dots i_k} = 1.$$

Згідно з теорією динамічних систем конфлікту (див. [1–3]), якщо $p_{i_1\ldots i_k} > r_{i_1\ldots i_k}$, то еволюція моделі відбувається таким чином, що у результаті конфліктної взаємодії міра присутності опонента A у регіоні $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ наближається до деякого ненульового значення, а міра присутності опонента B у цьому ж регіоні стає нульовою. Тобто в регіоні $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ "перемагає" опонент A. Говоримо, регіон $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ буде "захоплений" або "контрольований" опонентом A. Позначимо такий регіон $\Omega^{\mathrm{A}}_{i_1\ldots i_k}$. І навпаки, якщо $p_{i_1\ldots i_k} < r_{i_1\ldots i_k}$, то регіон $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ буде "захоплений" або "контрольований" опонентом B. Позначимо такий регіон $\Omega^{\mathrm{B}}_{i_1\ldots i_k}$. У випадку $p_{i_1\ldots i_k} = r_{i_1\ldots i_k}$ обидва опонента в результаті конфліктної взаємодії з часом втрачають свій вплив у регіоні $\Omega_{i_1\ldots i_k}$. Вважаємо, що такий регіон не належить жодному з опонентів, позначимо його $\Omega^{\mathrm{A=B}}_{i_1\ldots i_k}$.

У цій простій моделі стратегія кожного з опонентів A, B фіксується одним числом: $\alpha$, $\beta$ відповідно. Нехай числа $\alpha$ та $\beta$ такі, що $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Стартовий розподіл опонентів A та B на $\Omega$ задається формулами

$$p_{i_1\ldots i_k} = \alpha^m(1-\alpha)^{k-m}, \qquad r_{i_1\ldots i_k} = \beta^m(1-\beta)^{k-m}. \tag{1}$$

У попередніх дослідженнях (див., наприклад, [3]) було показано, що, якщо на $k$-му кроці подрібнення в регіоні $\Omega_{i_1\ldots i_k}$ "перемагає", наприклад, опонент A, то через скінченну кількість кроків подальшого подрібнення всередині цього регіону з'являться підрегіони, які будуть "контрольовані" опонентом B, і при продовженні подрібнення всередині підрегіонів, "контрольованих" опонентом B, з'являться підрегіони, де "перемагатиме" опонент A, і так далі. На кроці подрібнення $k$ "зберемо" всі регіони, що "контролюються" A або B, та ті, де вони втрачають свій вплив. Міри цих територій позначимо: $T^{\mathrm{A}}_k = \sum|\Omega^{\mathrm{A}}_{i_1\ldots i_k}|$, $T^{\mathrm{B}}_k = \sum|\Omega^{\mathrm{B}}_{i_1\ldots i_k}|$, $T^{\mathrm{A=B}}_k = \sum|\Omega^{\mathrm{A=B}}_{i_1\ldots i_k}|$. Нас цікавить, як змінюються розміри територій, "контрольованих" опонентами A та B, якщо $k$ необмежено зростає. Їх граничні значення позначимо $T^{\mathrm{A}} = \lim\limits_{k\to\infty} T^{\mathrm{A}}_k$, $T^{\mathrm{B}} = \lim\limits_{k\to\infty} T^{\mathrm{B}}_k$, $T^{\mathrm{A=B}} = \lim\limits_{k\to\infty} T^{\mathrm{A=B}}_k$. Доведемо, що ці границі існують та їх можна явно обчислити.

**2. Основний результат.** Нехай розподіли опонентів у початковий момент конфліктної взаємодії задано формулами (1). Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $0 < \alpha < 0{,}5$, $\alpha < \beta < 1$. Введемо коефіцієнт, який пов'язує $\alpha$ та $\beta$ і не залежить від $k$:

$$\tau = \frac{\ln\dfrac{1-\alpha}{1-\beta}}{\ln\dfrac{\beta}{\alpha} + \ln\dfrac{1-\alpha}{1-\beta}} = \frac{\ln\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}}{\ln\dfrac{\alpha}{\beta} + \ln\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}}. \tag{2}$$

Неважко бачити, що $\tau$ не перевищує 1.

**Теорема.** *Якщо $q_1 > \tau$, то $T^{\mathrm{A}} = 0$ та $T^{\mathrm{B}} = 1$.*
*Якщо $q_1 < \tau$, то $T^{\mathrm{A}} = 1$ та $T^{\mathrm{B}} = 0$.*
*Якщо $q_1 = \tau$, то $T^{\mathrm{A}} = T^{\mathrm{B}} = 1/2$.*
*$T^{\mathrm{A=B}} = 0$.*

**Доведення.**

1. Спочатку оцінимо міру території, на якій опоненти рівносильні. Рівність $p_{i_1\ldots i_k} = r_{i_1\ldots i_k}$ або $\alpha^m(1-\alpha)^{k-m} = \beta^m(1-\beta)^{k-m}$ виконується лише, якщо

$$m = k\frac{\ln((1-\beta)/(1-\alpha))}{\ln((\alpha(1-\beta))/(\beta(1-\alpha)))}, \qquad \text{тобто} \qquad m = k\tau.$$

Якщо значення $m = k\tau$ ціле, то кількість регіонів, де міри опонентів рівні, дорівнює $C_k^m = C_k^{k\tau}$ (тут $C_k^m = k!/(m!(k-m)!)$ — число сполучень, що показує кількість способів, якими можна вибрати $m$-елементну підмножину з $k$-елементної множини). Розмір кожного такого регіону $|\Omega_{i_1 \dots i_k}| = q_1^m q_2^{k-m}$. Якщо значення $m = k\tau$ не є цілим, то таких регіонів не існує. Отже, лебегова міра території, де міри опонентів рівні, визначається таким чином: $T_k^{\text{A=B}} = C_k^{k\tau} q_1^{k\tau} q_2^{k-k\tau}$, якщо $k\tau$ — ціле, та $T_k^{\text{A=B}} = 0$, якщо $k\tau$ не є цілим.

Для оцінки $T_k^{\text{A=B}}$ застосуємо формулу Стірлінга, а саме: $n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{\theta}$, де $n \in \mathbb{N}$, $|\theta| < 1/(12n)$. Тоді для $0 < \tau < 1$ та, якщо $k\tau$ ціле, маємо

$$T_k^{\text{A=B}} = C_k^{k\tau} q_1^{k\tau} q_2^{k-k\tau} = \frac{k!}{(k\tau)!(k-k\tau)!} q_1^{k\tau} q_2^{k-k\tau} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi k}\left(\dfrac{k}{e}\right)^k e^{\theta_1} q_1^{k\tau} q_2^{k-k\tau}}{\sqrt{2\pi k\tau}\left(\dfrac{k\tau}{e}\right)^{k\tau} e^{\theta_2} \sqrt{2\pi k(1-\tau)}\left(\dfrac{k(1-\tau)}{e}\right)^{k(1-\tau)} e^{\theta_3}} =$$

$$= \frac{e^{\theta}}{\sqrt{2\pi k\tau(1-\tau)}} \frac{q_1^{k\tau}(1-q_1)^{k-k\tau}}{\tau^{k\tau}(1-\tau)^{k-k\tau}}, \qquad \text{де} \qquad |\theta| < \frac{1}{12k} + \frac{1}{12k\tau} + \frac{1}{12k(1-\tau)}.$$

При $k \to \infty$ $|\theta| \to 0$, отже, $e^{\theta} \to 1$. Розглянемо функцію

$$f(\tau) = \ln\left(\frac{q_1^{k\tau}(1-q_1)^{k-k\tau}}{\tau^{k\tau}(1-\tau)^{k-k\tau}}\right) = k(\tau \ln q_1 + (1-\tau)\ln(1-q_1) - \tau\ln\tau - (1-\tau)\ln(1-\tau)).$$

Помітимо, що $f(q_1) = 0$. За допомогою похідної переконуємося, що $\tau = q_1$ є точкою максимуму функції $f(\tau)$. Отже, для всіх $0 < \tau < 1$ справджується $f(\tau) \leqslant 0$. Таким чином,

$$T_k^{\text{A=B}} = \frac{e^{\theta}}{\sqrt{2\pi k\tau(1-\tau)}} e^{f(\tau)} \leqslant \frac{e^{\theta}}{\sqrt{2\pi k\tau(1-\tau)}}.$$

Це означає, що при достатньо великих значеннях $k$ (за умови $k\tau$ — ціле) величина $T_k^{\text{A=B}}$ стає як завгодно малою. Враховуючи, що для нецілих значень $k\tau$ $T_k^{\text{A=B}} = 0$, робимо висновок, що $T^{\text{A=B}} = \lim\limits_{k\to\infty} T_k^{\text{A=B}} = 0$.

2. Зрозуміло, що $T_k^{\text{A}} + T_k^{\text{B}} + T_k^{\text{A=B}} = 1$ для довільного $k = 1, 2, \dots$. Тому з існування $\lim\limits_{k\to\infty} T_k^{\text{A}} = T^{\text{A}}$ випливає існування $\lim\limits_{k\to\infty} T_k^{\text{B}} = T^{\text{B}}$, а тоді $T^{\text{B}} = 1 - T^{\text{A}}$. Отже, будемо оцінювати тільки $T_k^{\text{A}}$ та доводити існування $T^{\text{A}}$.

3. Знайдемо такі $m$, щоб $p_{i_1 \dots i_k} > r_{i_1 \dots i_k}$ ("виграє" опонент A). Згідно з формулами (1) потрібно розв'язати нерівність

$$\alpha^m(1-\alpha)^{k-m} > \beta^m(1-\beta)^{k-m}, \tag{3}$$

яка рівносильна нерівності

$$m < k\frac{\ln((1-\beta)/(1-\alpha))}{\ln((\alpha(1-\beta))/(\beta(1-\alpha)))} \qquad \text{або} \qquad m < k\tau. \tag{4}$$

Нехай $m_0$ — максимальне з цілих значень $m$, які задовольняють нерівність (4), а отже і (3). Таке $m_0$ завжди існує, множина розв'язків нерівності (3) непорожня, до неї завжди, як мінімум, належить $m = 0$. Таким чином, нерівності (3) та (4) виконуються для $m = 0, 1, \ldots, m_0$, де $k\tau - 1 \leqslant m_0 < k\tau$.

При фіксованому $m$ кількість регіонів, де "виграє" А, дорівнює $C_k^m$. Загальна кількість регіонів, де "виграє" А: $N_k^{\mathrm{A}} = C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^{m_0}$. Міра Лебега кожного такого регіону $|\Omega^{\mathrm{A}}_{i_1 \ldots i_k}| = q_1^m(1 - q_1)^{k-m} = q_1^m q_2^{k-m}$. Загальна територія, яка "контролюється" А: $T_k^{\mathrm{A}} = C_k^0 q_1^0 q_2^k + C_k^1 q_1^1 q_2^{k-1} + \ldots + C_k^{m_0} q_1^{m_0} q_2^{k-m_0}$. Зазначимо, що це сума біноміальних імовірностей. А саме: нехай $\xi$ — випадкова величина, що дорівнює кількості "успіхів" у схемі Бернуллі, де кількість незалежних випробувань $k$, імовірність "успіху" у кожному з випробувань $q_1$, імовірність того, що $\xi$ набуває значення $m$ за формулою Бернуллі: $P(\xi = m) = C_k^{m_0} q_1^{m_0} q_2^{k-m_0}$ (див., наприклад, [4]). Тоді $T_k^{\mathrm{A}}$ — імовірність того, що $\xi$ набуває значень $0 \leqslant m \leqslant m_0$. Отже, $T_k^{\mathrm{A}} = P(\xi \leqslant m_0) \leqslant P(\xi \leqslant k\tau)$. Застосовуючи нерівність Чебишова, а саме: $P(|\xi - a| \geqslant \epsilon) < D/\epsilon^2$ $(\epsilon > 0)$, де $a$ — математичне сподівання: $a = kq_1$, $D$ — дисперсія: $D = kq_1q_2$, зробимо такі оцінки.

а) Якщо $q_1 > \tau$, то

$$T_k^A \leqslant P(\xi \leqslant k\tau) = P(\xi - kq_1 \leqslant k\tau - kq_1) = P(kq_1 - \xi \geqslant kq_1 - k\tau) \leqslant$$
$$\leqslant P(|\xi - kq_1| \geqslant k(q_1 - \tau)) \leqslant \frac{D}{(k(q_1 - \tau))^2} = \frac{q_1 q_2}{k(q_1 - \tau)^2}.$$

Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} T_k^{\mathrm{A}} = 0 = T^{\mathrm{A}}$. Таким чином, за умови $q_1 > \tau$ територія, яку "контролює" опонент А, при $k \to \infty$ наближається до 0.

б) Якщо $q_1 < \tau$, то для достатньо великих значень $k$ отримаємо $kq_1 < k\tau - 1 \leqslant m_0 < k\tau$. Тоді

$$T_k^{\mathrm{A}} = P(\xi \leqslant m_0) \geqslant P(\xi \leqslant k\tau - 1) \geqslant 1 - \frac{q_1 q_2}{k\left(\tau - \dfrac{1}{k} - q_1\right)^2}.$$

Тоді

$$\lim_{k\to\infty} T_k^{\mathrm{A}} = 1 = T^{\mathrm{A}}.$$

в) Нехай $q_1 = \tau$. Оскільки медіаною біноміального розподілу є одне з чисел $[kq_1] - 1$, $[kq_1]$, $[kq_1] + 1$, а $m_0 = [kq_1]$ або $m_0 = [kq_1] - 1$, то $P(\xi \leqslant m_0)$ прямує до $1/2$. Отже, якщо $q_1 = \tau$, то $T_A = T_B = 1/2$. Опоненти порівну "контролюють" територію.

Теорему доведено.

**3. Частинні випадки.** Нехай подрібнення простору $\Omega$ таке, що $q_1 = q_2 = 1/2$, назвемо таке подрібнення рівномірним.

**3.1.** Нехай стратегії опонентів А і В задаються числами $\alpha$, $\beta$ такими, що $0 < \alpha < 1/2$, $\beta = 1/2$. Тобто розподіл А не є рівномірним, а розподіл В рівномірний. Тоді $\tau = \ln((1 - \alpha)/0{,}5)/\ln((1 - \alpha)/\alpha)$. Можна показати, що $0 < \tau < 1/2$, а тоді виконується умова $\tau < q_1 = 1/2$, що означає, що $T_{\mathrm{A}} = 0$, а $T_{\mathrm{B}} = 1$.

Коли стартовий розподіл опонента А не є рівномірним, а розподіл опонента В рівномірний, то міра території, яку "виграє" опонент В, наближається до 1.

**3.2.** Нехай $0 < \alpha < 1/2$, а $1/2 - \alpha > |1/2 - \beta|$, що означає, що значення $\beta$ менш віддалено від $1/2$, ніж $\alpha$, тобто розподіл опонента В є ближчим до рівномірного, ніж опонента А. Тоді

$\alpha(1-\alpha) < \beta(1-\beta)$, а тоді $(1-\alpha)/(1-\beta) < \beta/\alpha$, $\ln((1-\alpha)/(1-\beta)) < \ln(\beta/\alpha)$ і тому $0 < \tau < 1/2$. Отже, виконується умова $\tau < q_1 = 1/2$, що означає, що $T_{\mathrm{A}} = 0$, а $T_{\mathrm{B}} = 1$. Якщо, навпаки, розподіл опонента A є ближчим до рівномірного, тобто $1/2 - \alpha < \beta - 1/2$, то $\alpha(1-\alpha) > \beta(1-\beta)$, а тоді $(1-\alpha)/(1-\beta) > \beta/\alpha$, $\ln((1-\alpha)/(1-\beta)) > \ln(\beta/\alpha)$ і тому $\tau > 1/2$. Отже, виконується умова $\tau > q_1 = 1/2$, що означає, що $T_{\mathrm{A}} = 1$, а $T_{\mathrm{B}} = 0$.

Тобто якщо стартовий розподіл опонента є ближчим до рівномірного, ніж у іншого опонента, то міра території, яку контролює цей опонент, при великих значеннях $k$ наближається до 1, тоді як міра території, яку контролює інший опонент, наближається до 0. Отже, стратегія рівномірного розподілу є більш оптимальною.

**3.3.** Нехай $0 < \alpha < 1/2$, а $\beta = 1-\alpha$. Тоді $\tau = 1/2$, а отже, $q_1 = \tau$ та $T^{\mathrm{A}} = T^{\mathrm{B}} = 1/2$. Якщо розподіли опонентів однаково віддалені від рівномірного (але не збігаються), то опоненти порівну ділять територію ресурсного простору.

**3.4.** Нехай подрібнення простору $\Omega$ є таким, що $q_1 \neq q_2$, тобто не є рівномірним, та $0 < \alpha < \beta = q_1$. Оскільки $\alpha < \tau < \beta$, то $\tau < q_1$, що означає $T_{\mathrm{A}} = 0$, а $T_{\mathrm{B}} = 1$. Отже, якщо міра присутності опонента в регіонах дорівнює мірі Лебега цих регіонів, то такий опонент "виграє" територію, міра якої дорівнює 1.

## Цитована література


1. *Koshmanenko V.* Theorem of conflicts for a pair of probability measures // Math. Method. Oper. Res. – 2004. – **59**, No 2. – P. 303–313.
2. *Koshmanenko V.* The infinite direct of probability measures and structural similarity // Methods Funct. Anal. Topology. – 2011. – **17**, No 1. – P. 20–28.
3. *Koshmanenko V.* Existence theorems of the $\omega$-limit states for conflict dynamical systems // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – **20**, No 4. – P. 379–390.
4. *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. – Москва: Наука, 1972. – 287 с.


## References


1. *Koshmanenko V.* Math. Method. Oper. Res., 2004, **59**, No 2: 303–313.
2. *Koshmanenko V.* Methods Funct. Anal. Topology, 2011, **17**, No 1: 20–28.
3. *Koshmanenko V.* Methods Funct. Anal. Topology, 2014, **20**, No 4: 379–390.
4. *Borovkov A. A.* Course of probability theory, Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).



*Надійшло до редакції 16.10.2015*



**И. В. Веригина**

НТУ Украины "Киевский политехнический институт"

*E-mail:* veringa@i.ua


## Сравнение стратегий пары опонентов в задаче "захвата" территории


*В работе теория динамичных систем конфликта применяется в модели, которая описывает конфликтное перераспределение ресурсного пространства (территории) между альтернативными сторонами (парой оппонентов).*



***Ключевые слова:*** динамичная система конфликта, вероятностная мера, самоподобная мера, равновесное состояние, конфликтное перераспределение ресурсного пространства.

**I. V. Verygina**

NTU of Ukraine “Kiev Polytechnical Institute”

*E-mail:* veringa@i.ua

## Comparison of the strategies of two opponents in the problem of “conquest” of a territory

*The theory of conflict dynamical systems is applied to a model that discribes the conflicting redistribution of a resource space (territory) between adversaries (a pair of opponents).*

***Keywords:*** dynamical system of conflict, probability measure, self-similar measure, equilibrium state, conflicting redistribution of a resource space.