Доповіді
Національної
академії наук
України

5 • 2016

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.05.022
УДК 517.9,519.2

В. П. Кнопова[1], **О. М. Кулик**[2]

[1]Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ
[2]Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: vic_knopova@gmx.de, kulik.alex.m@gmail.com

Побудова процесу типу Леві за допомогою методу параметриксу

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Для широкого класу інтегро-диференціальних операторів ми доводимо, що $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-замикання кожного з таких операторів є генератором напівгрупи, що відповідає феллеровому процесу Маркова. Для щільності ймовірності переходу такого процесу отримано зображення у вигляді ряду та наведено верхню та нижню оцінки. Метод доведення істотним чином базується на узагальненні методу параметрикса для параболічної задачі Коші з псевдодиференціальними операторами.

Ключові слова: щільність перехідної імовірності, процеси типу Леві, псевдодифференціальний оператор, метод параметрикса Леві.

Процес Маркова $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$ називається *процесом типу Леві*, якщо генератор A його $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-напівгрупи є коректно визначеним на просторі $C^2_\infty(\mathbb{R}^n)$ двічі неперервно диференційовних функцій, що спадають на нескінченності разом з похідними першого та другого порядків, та на цьому просторі A збігається з псевдодиференціальним *оператором типу Леві*

$$Lf(x) = a(x)\cdot\nabla f(x) + \sum_{j,k=1}^{n} Q_{jk}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\partial x_k} + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} (f(x+u) - f(x) - \nabla f(x)\cdot u1_{\{\|u\|\leqslant 1\}})\mu(x,du). \qquad (1)$$

Тут $a(x) \in \mathbb{R}^n$, $Q(x) \equiv (Q_{jk}(x))_{j,k=1}^n$ є симетричною додатно напіввизначеною матрицею, та $\mu(x,\cdot)$ є додатною борелевою мірою, що задовольняє умові

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} (1 \wedge \|u\|^2)\mu(x,du) < \infty \qquad \text{для всіх} \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

У випадку, коли функції a, Q та ядро μ не залежать від x, (1) є зображенням генератора напівгрупи, що відповідає процесу Леві. Таким чином, процеси типу Леві мають природню інтерпретацію як "процеси з локально незалежними приростами", характеристичний триплет яких залежить від просторової змінної. Цей факт пояснює назви *процес типу Леві* та *оператор типу Леві*. Зауважимо, що зв'язок між процесами Леві та процесами типу Леві є подібним до зв'язку між броуновим рухом та дифузійними процесами. З іншого боку, теорема Курежа–Вальденфельса (Courrége–von Waldenfels, див. Jacob [1, теор. 4.5.21]) стверджує, що довільний феллерів процес, генератор $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-напівгрупи якого є коректно визначеним на $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (просторі нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм), є процесом типу Леві. Таким чином, процеси типу Леві є найбільш типовою формою феллерових процесів в $\mathbb{R}^n$, а інтегро-дифференціальні оператори виду (1) природним чином пов'язані з генераторами таких процесів.

Дана стаття мотивована природною та складною задачею про побудову процесу типу Леві за заданим інтегро-дифференціальним оператором (1).

Існує кілька способів побудови процесу Маркова за заданим оператором типу Леві (1). Одним із таких способів є доведення існування єдиного розв'язку *мартингальної задачі* для оператору $(L, C_\infty^2(\mathbb{R}^n))$. Складна частина цього підходу полягає в тому, щоб довести, що мартингальна задача є *коректно поставленою*, тобто що сімейство ймовірнісних мір $\mathbb{P}^x$, $x \in \mathbb{R}^n$ є єдиним. Такий підхід було розвинуто в роботах [2–7], див. також оглядову статтю Bass [8] та монографію Jacob [9]. Але, хоча підхід доведення єдиності розв'язку мартингальної задачі є ефективним у конструктивному плані, він не дає жодної інформації щодо властивостей розподілу побудованого процесу.

Інший підхід, який розвивається у даній статті, є узагальненням класичного методу побудови дифузійного процесу, основні кроки якого ми коротко описуємо далі. У випадку параболічного оператора, тобто коли інтегральна частина в (1) відсутня, класичний *метод параметриксу* дозволяє побудувати фундаментальний розв'язок $p_t(x,y)$ задачі Коши для оператора

$$\partial_t - L. \tag{2}$$

Метод параметриксу було вперше запропоновано в роботі [10] та використано у роботі [11] для побудови дифузійного, чисто розривного, та комбінованих процесів; див. також монографію [12], в якій цей метод детально описаний. Ідея, що лежить в основі методу, полягає в тому, щоб обрати "нульову апроксимацію" $p_t^0(x,y)$ та за допомогою цієї апроксимації побудувати зображення функції $p_t(x,y)$ у вигляді ряду. В дифузійній ситуації вдається показати, що побудована функція дійсно є фундаментальним розв'язком задачі Коши для (2). Оскільки оператор L задовольняє *принцип максимуму*, це дозволяє стандартним чином (див. [13, с. 165] або Jacob [1, заув. 4.5.14]) показати, що $p_t(x,y)$ є перехідною ймовірнісною щільністю феллерового процесу, звуження генератора напівгрупи якого дорівнює L на функціях класу $C_\infty^2(\mathbb{R}^n)$.

Опишемо основні кроки у нашому методі побудови процесу типу Леві. Першу частину методу присвячено побудові "кандидата на фундаментальний розв'язок" задачі Коші для оператора $\partial_t - L$, тобто такої функції $p_t(x,y)$, що

$$p_t(x,\cdot) \to \delta_x \qquad \text{при} \qquad t \to 0+, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

та

$$(\partial_t - L)p_t(x,y) = 0, \qquad t > 0, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Наведемо конструкцію, що лежить в основі класичного методу параметрикса, див. [12, с. 310–311] та [14 с.144–145].

Розглянемо *деяку* апроксимацію нульового порядку $p_t^0(x,y)$ функції $p_t(x,y)$ та позначимо через $r_t(x,y)$ залишковий доданок, отриманий при такій апроксимації, тобто

$$p_t(x,y) = p_t^0(x,y) + r_t(x,y). \tag{5}$$

Покладемо

$$\Phi_t(x,y) := (L - \partial_t)p_t^0(x,y), \qquad t > 0, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Оскільки ми припустили, що $p_t(x,y)$ є фундаментальним розв'язком задачі Коші для оператора $\partial_t - L$, то

$$(\partial_t - L)r_t(x,y) = \Phi_t(x,y).$$

Отже, $r_t(x,y) = (p \star \Phi)_t(x,y)$, де $\star$ позначає операцію згортки

$$(f \star g)(t,x,y) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}}^n f(t-\tau,x,z)g(\tau,z,y)\,dzd\tau,$$

що дозволяє за допомогою (5) записати рівняння для $r_t(x,y)$:

$$r_t(x,y) = (p^0 \star \Phi)_t(x,y) + (r \star \Phi)_t(x,y).$$

Формально розв'язком цього рівняння є вираз

$$r = p^0 \star \Psi, \tag{7}$$

де

$$\Psi_t(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_t^{\star k}(x,y). \tag{8}$$

При правильному виборі апроксимації нульового порядку $p_t^0(x,y)$ ми доводимо, що ряд (8) збігається абсолютно при $t > 0$ $x, y \in \mathbb{R}^n$ і вираз (5) має сенс.

Технічно найбільш складним є питання про адекватність наведеної вище конструкції. На відміну від дифузійного випадку функція $p_t(x,y)$, що побудована вище, не є класичним фундаментальним розв'язком для (2), що не дозволяє відтворити описаний вище метод доведення напівгрупових властивостей. Ми долаємо цю принципову перешкоду за допомогою підходу, що базується на використанні допоміжного об'єкта, а саме *апроксимативного фундаментального розв'язку*, що являє собою апроксимацію $p_{t,\epsilon}(x,y)$ побудованого ядра $p_t(x,y)$. Позначимо

$$T_{t,\epsilon}f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}}^{n} f(y)p_{t,\epsilon}(x,y)\,dy, \qquad t,\epsilon > 0, \tag{9}$$

$$T_t f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}}^{n} f(y)p_t(x,y)\,dy, \qquad t,\epsilon > 0, \tag{10}$$

Використовуючи зображення для $p_t(x,y)$ та оцінки на $\Phi_t(x,y)$ та $\Psi_t(x,y)$, ми покажемо, що для довільної $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$

a) сімейство функцій $T_{t,\epsilon}f(x)$, $\epsilon > 0$ апроксимує $T_t f(x)$ при $\epsilon \to 0$ рівномірно на компактних підмножинах $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$;

b) при $t,\epsilon \to 0$ функція

$$Q_{t,\epsilon}f(x) := (\partial_t - L)T_{t,\epsilon}f(x),$$

прямує до нуля, рівномірно на компактних підмножинах $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$; тобто функції виду $T_{t,\epsilon}f(x)$, $\epsilon > 0$, перетворює рівність (4) у "апроксимативну рівність".

Такий "апроксимативний" аналог властивостей (3), (4) є значно простішим у доведенні ніж самі ці властивості. З іншого боку, він є достатньо потужним для того, щоб гарантувати шукані напівгрупові властивості функції $p_t(x,y)$: ми показуємо, що класичний підхід, який використовує принцип максимуму, може бути ефективно адаптованим до застосування у такій "апроксимативній" ситуації.

Сформулюємо основні результати дослідження.

Надалі ми припускаємо, що ядро $\mu(x,du)$ має вигляд $\mu(x,du) = m(x,u)\mu(du)$, де $m(x,u)$ — деяка функція, умови на яку буде накладено нижче, а μ — міра Леві, тобто борельова міра, така, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} (\|u\|^2 \wedge 1)\mu(du) < \infty.$$

Позначимо

$$q(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} (1-\cos(\xi\cdot u))\mu(du) \tag{11}$$

та

$$q^U(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} [(\xi\cdot u)^2 \wedge 1]\mu(du), \qquad q^L(\xi) := \int\limits_{|u\cdot\xi|\leqslant 1} (\xi\cdot u)^2\mu(du). \tag{12}$$

Неважко показати, що має місце нерівність

$$(1-\cos 1)q^L(\xi) \leqslant q(\xi) \leqslant 2q^U(\xi). \tag{13}$$

Крім того, функція $q(\xi)$ є характеристичною експонентою процесу Леві. Припустимо, що міра μ задовольняє наступній умові.

A1. Існує $\beta > 1$ таке, що

$$\sup_{l \in \mathbb{S}^n} q^U(rl) \leqslant \beta \inf_{l \in \mathbb{S}^n} q^L(rl) \qquad \text{для всіх достатньо великих } r.$$

Позначимо також

$$\alpha := \frac{2}{\beta}. \tag{14}$$

Таке позначення мотивоване частковим прикладом симетричної α-стійкої міри Леві $\mu(du) := = c(\alpha)\|u\|^{-n-\alpha}du$, $\alpha \in (0,2)$. А саме, безпосередньо перевіряється, що для цієї міри Леві умова **A1** має місце з $\beta = 2/\alpha$. Також можна показати, що з умови **A1** випливає, що відповідна характеристична експонента q має поліноміальну нижню оцінку при великих значеннях $\|\xi\|$, яка для симетричного α-стійкого процесу перетворюється на рівність:

$$q(\xi) \geqslant c_0\|\xi\|^\alpha, \qquad \|\xi\| \geqslant 1. \tag{15}$$

Ми припускаємо, що функція $m(x,u)$ та коефіцієнт зсуву $a(x)$ задовольняють наступним припущенням.

A2. Функції $m(x,u)$ та $a(x)$ є вимірними, та для деяких сталих b_1, b_2, $b_3 > 0$ мають місце нерівності

$$b_1 \leqslant m(x,u) \leqslant b_2, \qquad |a(x)| \leqslant b_3, \qquad x,u \in \mathbb{R}^n.$$

A3. Існують сталі $\gamma \in (0,1]$ та $b_4 > 0$ такі, що

$$|m(x,u) - m(y,u)| + \|a(x) - a(y)\| \leqslant b_4(\|x-y\|^\gamma \wedge 1), \qquad u,x,y \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

A4. У випадку $\alpha \in (0,1]$ припустимо, що $a(x) = 0$ та ядро $\mu(x,du)$ є симетричним за u для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Припустимо, що виконано одне з наступних припущень. Тоді функція $p_t(x,y)$, яку введено в (5)–(8), є коректно визначеною (а саме, існують інтеграли $\Phi^{\star k}$, $p^0 \star \Phi^{\star k}$, та ряд $\sum_{k\geqslant 0} \Phi^{\star k}$ збігається абсолютно), та неперервною на $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.*

Пояснимо зв'язок між функцією $p_t(x,y)$, процесом Маркова, ймовірнісною щільністю якого є $p_t(x,y)$, та оператором L.

Теорема 2. *Припустимо, що виконано умови теореми 1. Тоді сімейство операторів $(T_t)_{t\geqslant 0}$, що визначене в (10), є сильно неперервною консервативною напівгрупою на $C_\infty(\mathbb{R}^n)$, що відповідає процесу Маркова X. При цьому множина функцій класу $C^2_\infty(\mathbb{R}^n)$ належить області визначення $D(A)$ генератора A цієї напівгрупи та $(A, D(A))$ є продовженням $(L, C^2_\infty(\mathbb{R}^n))$, тобто*

$$Af(x) = Lf(x), \qquad f \in C^2_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 3. *(i) Оператор $(A, D(A))$ є замиканням $(L, C^2_\infty(\mathbb{R}^n))$.*

(ii) Функція $p_t(\cdot,y)$ належить області визначення $D(A)$ оператора A, та є фундаментальним розв'язком задачі Коші для оператора $\partial_t - A$.

Доведення теореми використовує наступну властивість похідних $p_{t,\epsilon}(x,y)$:

(c) функція $\partial_t p_{t,\epsilon}(x,y)$, $\epsilon > 0$ апроксимує $\partial_t p_t(x,y)$ при $\epsilon \to 0$, рівномірно на компактних підмножинах $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Ця властивість разом з (b) дозволяє контролювати L на функціях виду $T_{t,\epsilon}f$, $f \in D(A)$, та показати, що A є замиканням L в C_∞.

Перше твердження теореми 3 дає змогу довести єдиність розв'язку мартингальної задачі для оператора $(L, C^2_\infty(\mathbb{R}^n))$, тобто існування єдиної ймовірнісної міри $\mathbb{P}^x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$, такої, що процес

$$f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s)ds, \qquad f \in C^2_\infty(\mathbb{R}^n)$$

є мартингалом.

Теорема 4. *Процес Маркова X, побудований в теоремі 3, є единим розв'язком мартингальної задачі для $(L, C^2_\infty(\mathbb{R}^n))$.*

Метод параметрикса також дає можливість побудувати верхню та нижню оцінки на ймовірнісну щільність $p_t(x,y)$.

Позначимо через f_{up} та f_{low} функції виду

$$f_{up}(x) := b_1 e^{-b_2\|x\|}, \qquad f_{low}(x) := b_3(1 - b_4\|x\|)_+, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

де $b_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, є сталими.

Теорема 5. *Для довільного $t_0 > 0$ існують сталі $b_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, та сімейство субймовірнісних мір $\{Q_t, t \geqslant 0\}$, таке, що*

$$\rho_t^n f_{low}(\rho_t(y-x)) \leqslant p_t(x,y) \leqslant \rho_t^n (f_{up}(\rho_t \cdot) * Q_t)(y-x), \qquad t \in (0, t_0], \qquad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{18}$$

де f_{up}, f_{low} є функціями типу (17) *зі сталими b_i відповідно, а операція $*$ означає згортку за просторовими змінними.*

Цитована література

1. *Jacob N.* Pseudo-differential operators and Markov processes, I: Fourier analysis and Semigroups. – London: Imperial College Press, 2001. – 493 p.
2. *Bass R. F.* Uniqueness in law for pure jump Markov processes // Probab. Th. Rel. Fields. – 1988. – **79**, No 2. – P. 271–287.
3. *Hoh W.* The martingale problem for a class of pseudo-differential operators // Math. Ann. – 1994. – **300**, No 1. – P. 121–147.
4. *Hoh W.* Pseudo-differential operators with negative definite symbols and the martingale problem // Stoch. Stoch. Rep. – 1995. – **55**, No 3–4. – P. 225–252.
5. *Komatsu T.* On the martingale problem for generators of stable processes with perturbations // Osaka J. Math. – 1984. – **21**, No 1. – P. 113–132.
6. *Tsuchiya M.* On a small drift of Cauchy process // J. Math. Kyoto Univ. – 1970. – No 10. – P. 475–492.
7. *Tsuchiya M.* On some perturbations of stable processes // Proc. "Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory". Eds. G. Maruyama, Yu. V. Prokhorov Yu. – Berlin: Springer, 1972. – P. 490–497.
8. *Bass R. F.* Stochastic differential equations with jumps // Probability Surveys. – 2004. – No 1. – P. 1–19.
9. *Jacob N.* Pseudo-differential operators and Markov processes, III: Markov Processes and Applications. – London: Imperial College Press, 2005. – 474 p.
10. *Levi E. E.* Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali // Rend. del. Circ. Mat. Palermo. – 1907. – **24**. – P. 275–317.

11. *Feller W.* Zur Theorie der stochastischen Prozesse. (Existenz – und Eindeutigkeitssätze) // Math. Ann. – 1936. – **113**. – P. 113–160.
12. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – New York: Prentice-Hall, 1964. – 427 p.
13. *Ethier S. N., Kurtz, T. G.* Markov Processes: Characterization and Convergence. – New York: Wiley, 1986. – 470 p.
14. *Jacob N.* Pseudo differential operators and Markov processes, II: Generators and their potential theory. – London: Imperial College Press, 2002. – 453 p.

References

1. *Jacob N.* Pseudo-differential operators and Markov processes, I: Fourier analysis and Semigroups, Imperial College Press, 2001.
2. *Bass R. F.* Probab. Th. Rel. Fields., 1988, **79**, No 2: 271–287.
3. *Hoh W.* Math. Ann., 1994, **300**, No 1: 121–147.
4. *Hoh, W.* Stoch. Stoch. Rep., 1995, **55**, No 3–4: 225–252.
5. *Komatsu, T.* Osaka J. Math., 1984, **21**, No 1: 113–132.
6. *Tsuchiya M.* J. Math. Kyoto Univ., 1970, No 10: 475–492.
7. *Tsuchiya M.* Proc. "Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory". Eds. G. Maruyama, Yu. V. Prokhorov Yu., Berlin: Springer, 1972: 490–497.
8. *Bass R. F.* Probability Surveys., 2004, No 1: 1–19.
9. *Jacob N.* Pseudo differential operators and Markov processes, III: Markov Processes and Applications, London: Imperial College Press, 2005.
10. *Levi E. E.* Rend. del. Circ. Mat. Palermo., 1907, **24**: 275–317.
11. *Feller W.* Math. Ann., 1936, **113**: 113–160.
12. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type, New-York: Prentice-Hall, 1964.
13. *Ethier S. N., Kurtz, T. G.* Markov Processes: Characterization and Convergence, New York: Wiley, 1986.
14. *Jacob N.* Pseudo differential operators and Markov processes, II: Generators and their potential theory, London: Imperial College Press, 2002.

Надійшло до редакції 04.12.2015

В. П. Кнопова[1], А. М. Кулик[2]

[1]Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев
[2]Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: vic_knopova@gmx.de, kulik.alex.m@gmail.com

Построение процесса типа Леви при помощи метода параметрикса

Для широкого класса интегро-дифференциальных операторов доказано, что $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-замыкание каждого из таких операторов является генератором полугруппы, которая соответствует феллеровскому процессу Маркова. Для плотности переходной вероятности найдено представление в виде ряда, а также найдены верхние и нижние оценки. Метод доказательства существенным образом базируется на обобщении метода параметрикса для задачи Коши с псевдодифференциальным оператором.

Ключевые слова: плотность переходной вероятности, процессы типа Леви, псевдодифференциальный оператор, метод параметрикса Леви.

V. P. Knopova[1], **A. M. Kulik**[2]

[1]V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kiev
[2]Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: vic_knopova@gmx.de, kulik.alex.m@gmail.com

Construction of a Lévy-type process by means of the parametrix method

For a wide class of integro-differential operators, it is proved that the $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-closure of each of such operators is the generator of a semigroup corresponding to a Feller Markov process. The transition probability density of the process is expressed in the form of a convergent series, and the estimates from above and below are provided. The proof is based essentially on a generalization of the parametrix method for the Cauchy problem for pseudodifferential operators.

Keywords: transition probability density, Lévy-type processes, pseudodifferential operator, generator, Levi's parametrix method.