



<http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.05.036>

УДК 539.3

А. О. Камінський, М. Ф. Селіванов, Ю. О. Черноіван

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: dfm11@ukr.net, fract@inmech.kiev.ua, mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

Визначення контактних напружень між берегами тріщини нормального відриву

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Поставлено і розв'язано задачу щодо визначення контактних напружень між берегами прямолінійної тріщини у ізотропному тілі, що перебуває під дією розтягувальних зусиль на нескінченності та зосереджених стискальних сил, прикладених перпендикулярно до лінії тріщини.

Ключові слова: руйнування, ізотропне тіло, тріщина нормального відриву, контакт берегів тріщини, контактні напруження.

Навантаження елемента конструкції з наявною тріщиною може спричинити повний або частковий контакт берегів тріщини. Незначні контактні напруження виникають при прикладанні навіть незначних чи моментів зсувних напружень у нескінченно віддалених точках пластини з тріщиною [1, 2]. Неврахування контакту між берегами тріщини може призводити до некоректності фізичної складової постановки задачі [3] або некоректного застосування обчислювальних методів для її розв'язання [4].

Розглянемо прямолінійну тріщину у ізотропному тілі. Нехай у навантаженому стані тріщину розташовано на вісі x координатної системи, а її кінці розташовано у точках із координатами $x = \pm d$.

Відповідну розглянутій задачі конфігурацію сил зображено на рис. 1. При певному співвідношенні інтенсивностей P і σ_y^∞ буде утворюватися ділянка контакту між берегами тріщини.

Подамо вирази для переміщень берегів тріщини у такій формі:

$$u^\pm(x) = u_0(x) \pm u_1(x), \quad v^\pm(x) = v_0(x) \pm v_1(x), \quad (1)$$

де $u_0(x)$ та $v_0(x)$ — середні значення переміщень за берегами.

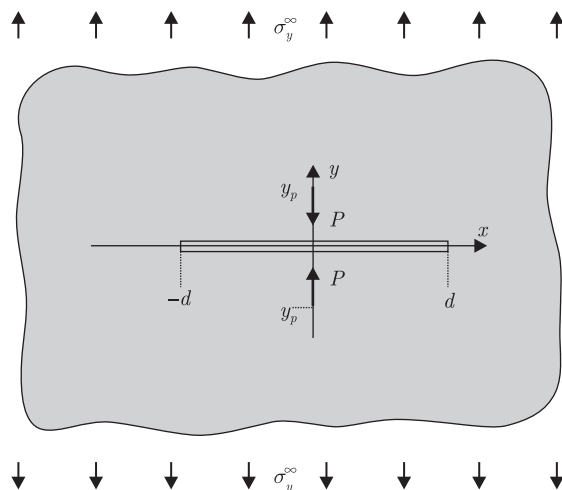


Рис. 1

Внаслідок симетричного прикладання сил відносно осі Ox у виразах для переміщень берегів тріщини (1) матимемо $v_0 = 0$, а умова перекриття берегів запишеться у вигляді $v(x) < 0, |x| < d$.

Рівняння для знаходження розміру зони контакту та контактних напружень набуде такого вигляду $v(x) = 0(|x| < d)$.

Визначимо границі ділянки контакту та контактні напруження. Для розглянутої схеми навантаження тертя між берегами тріщини відсутнє і контурні умови такої задачі мають вигляд

$$\sigma_y^\pm(x) = \sigma(x) - \sigma_0(x), \quad \tau_{xy}^\pm = 0, \quad |x| \leq d,$$

де згідно з [5],

$$\sigma_0(x) = \frac{\varkappa_1}{\pi} \sum_{m=1}^2 \left[P_m \sum_k \frac{A_k}{x - z_m^k} - \bar{P}^m \frac{z_m^1 - z_m^2}{(x - z_m^2)^2} \right] = -\frac{Py_p}{\pi(x^2 + y_p^2)} \left[1 - \frac{2(x^2 - y_p^2)}{(\varkappa + 1)(x^2 + y_p^2)} \right],$$

($z_1^1 = z_2^2 = -z_1^2 = -z_2^1 = iy_p$, $-P_1 = P_2 = iP$, $P > 0$, $A_1 = -1$, $A_2 = \varkappa$), а контактні напруження задано кусково-лінійним розподілом

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{(b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k}{\Delta b_k}, & x \in (b_{k-1}, b_k), \\ 0, & x \in (b_n, d), \end{cases}$$

$$0 < k < n, \quad \sigma_n = 0, \quad \sigma(-x) = \sigma(x), \quad \Delta b_k = b_k - b_{k-1}$$

з напруженнями σ_k у вузлах сітки b_k . Величини σ_k разом з границею зони контакту, b_n знаходяться в ході розв'язання задачі.

За заданих на нескінченності напружень $\sigma_y = \sigma_y^\infty$, $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, $|z| \rightarrow \infty$, розв'язок задачі Гільберта–Прівалова для записаних вище контурних умов знаходимо з системи двох рівнянь відносно функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$:

$$\Phi(z) \pm \Omega(z) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{H(z) + H_0(z)}{\pi} + 2\frac{C_0 z}{X(z)} \\ -\bar{\Gamma}' \end{array} \right\}, \quad (2)$$

$\bar{\Gamma}' = C_0 = \sigma_y^\infty/2$, функція $H_0(z)$ визначена співвідношенням

$$H_0(z) = \frac{1}{iX(z)} \int_{-d}^d \frac{\sigma_0(x)X(x)}{x-z} dx, \quad X(z) = \sqrt{(z+d)(z-d)}, \quad (3)$$

$$H(z) = \frac{1}{iX(z)} \int_{-b_n}^{b_n} \frac{\sigma(x)X(x)}{x-z} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \left[ih_k(z) - \frac{2N_k z}{X(z)} \right],$$

$$h_0(z) = \frac{\Delta Q_1(z)}{\Delta b_1}, \quad h_k(z) = \frac{\Delta Q_{k+1}(z)}{\Delta b_{k+1}} - \frac{\Delta Q_k(z)}{\Delta b_k} \quad (0 < k < n);$$

$$\Delta Q_k(z) = Q_k(z) - Q_{k-1}(z); \quad Q_k(z) = (z+b_k)C(-b_k, z) + (z-b_k)C(b_k, z); \quad (4)$$

$$N_0 = \frac{\Delta R_1}{\Delta b_1} - I(b_0), \quad N_k = \frac{\Delta R_{k+1}}{\Delta b_{k+1}} - \frac{\Delta R_k}{\Delta b_k} \quad (0 < k < n);$$

$$\Delta R_k = R_k - R_{k-1}, \quad R_k = b_k I(b_k) + \hat{X}(b_k), \quad (5)$$

функція $C(\xi, z)$ визначена співвідношенням

$$C(\xi, z) = \ln \frac{\check{X}(\xi) - \check{X}(z)}{\check{X}(\xi) + \check{X}(z)}, \quad \check{X}(z) = \sqrt{\frac{z-c}{d-z}}, \quad (6)$$

функція $I(z) = 2 \operatorname{arctg} \check{X}(z)$. Знак “-” при функції H у (2) обумовлений напрямком контактних напружень.

Таким чином,

$$2\pi\Phi(z) = - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \left[ih_k(z) - \frac{2N_k z}{X(z)} \right] + P \left\{ \frac{i}{2} \sum_k (-1)^k \frac{R(z, z_0^k)}{X_0^k} - \right. \\ \left. - \frac{y_p}{\varkappa + 1} \sum_k \frac{1}{X_0^k \cdot (z - z_0^k)} \left[R(z, z_0^k) - \frac{z_0^k \cdot X(z)}{(X_0^k)^2} \right] \right\} + \frac{\pi\sigma_y^\infty z}{X(z)} - \pi\bar{\Gamma}',$$

$$R(z, z_0^k) = \frac{X(z) - X_0^k}{z - z_0^k}, \quad X_0^k = X(z_0^k).$$

Інтегруючи, отримаємо

$$2\pi\varphi(z) = - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k [iJ_k(z) - 2N_k X(z)] + \\ + P \left\{ \frac{i}{2} \sum_{k=1}^2 (-1)^k C(z_0^k, z) + F(z, z_0) + \frac{G(z, z_0)}{\varkappa + 1} \right\} + \pi\sigma_y^\infty X(z) - \pi\bar{\Gamma}' z,$$

$$F(z, z_0) = \operatorname{arctg} \frac{z}{y_p}, \quad G(z, z_0) = \frac{2y_p}{z^2 + y_p^2} \left[\frac{y_p}{X} X(z) - z \right]; \quad (7)$$

$$J_0(z) = \frac{\Delta T_1(z)}{\Delta b_1}, \quad J_k(z) = \frac{\Delta T_{k+1}(z)}{\Delta b_{k+1}} - \frac{\Delta T_k(z)}{\Delta b_k} \quad (0 < k < n);$$

$$\Delta T_k(z) = T_k(z) - T_{k-1}(z); \quad \tilde{X} = \sqrt{d^2 + y_p^2}; \quad \hat{X}(z) = \sqrt{(z-c)(d-z)}$$

$$T_k(z) = \frac{1}{2}[(z+b_k)^2 C(-b_k, z) + (z-b_k)^2 C(b_k, z)] + \hat{X}(b_k) \hat{X}(z).$$

На берегах розрізу

$$2\pi\varphi^\pm(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \{i[\pm J_{kx}(x) + iJ_{ky}(x)] \mp 2iN_k \hat{X}(x)\} +$$

$$+ P \left\{ \mp C_x(iy_p, x) + \operatorname{arccctg} \frac{x}{y_p} + \frac{2y_p}{(\varkappa+1)(x^2+y_p^2)} \left[\pm i \frac{y_p}{\tilde{X}} \hat{X}(x) - x \right] \right\} \pm$$

$$\pm i\pi\sigma_y^\infty \hat{X}(x) - \pi\bar{\Gamma}'x,$$

$J_{kx}(x) = \pm \operatorname{Re}\{J_k^\pm(x)\}$, $J_{ky}(x) = \operatorname{Im}\{J_k^\pm(x)\}$; $C_x(iy_p, x)$ визначається рівнянням

$$C_x(iy_p, x) = \frac{1}{2} \ln \frac{[\check{X}(x)\tilde{X} - d]^2 + y_p^2}{[\check{X}(x)\tilde{X} + d]^2 + y_p^2}, \quad \check{X}(\pm iy_p) = \frac{\pm d + iy_p}{\tilde{X}}. \quad (8)$$

Нормальний відрив, $\Delta = v^+ - v^-$ знайдемо з виразу

$$\pi\Delta(x) = \frac{\varkappa+1}{2\mu} \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k [-J_{kx}(x) + 2N_k \hat{X}(x)] + \right.$$

$$\left. + P \left\{ -C_x(iy_p, x) + \frac{2y_p^2 \hat{X}(x)}{(\varkappa+1)(x^2+y_p^2)\tilde{X}} \right\} + \pi\sigma_y^\infty \hat{X}(x) \right).$$

Напіврозмір зони контакту визначимо за допомогою рівняння (2). Це рівняння будемо розв'язувати обчислювальним методом. На кожній ітерації будемо визначати напруження $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ з системи лінійних рівнянь

$$\Delta(b_m) = 0, \quad m = 0, \dots, n-1,$$

яка в розширеній формі матиме вигляд

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_{mk} \sigma_k = B_m, \quad m = 0, \dots, n-1,$$

де

$$A_{mk} = -J_{xk}(b_m) + 2N_k \hat{X}(b_m);$$

$$B_m = -P \left\{ -C_x(iy_p, b_m) + \frac{2y_p^2 \hat{X}(b_m)}{(\varkappa+1)(b_m^2 + y_p^2)\tilde{X}} \right\} - \pi\sigma_y^\infty \hat{X}(b_m).$$

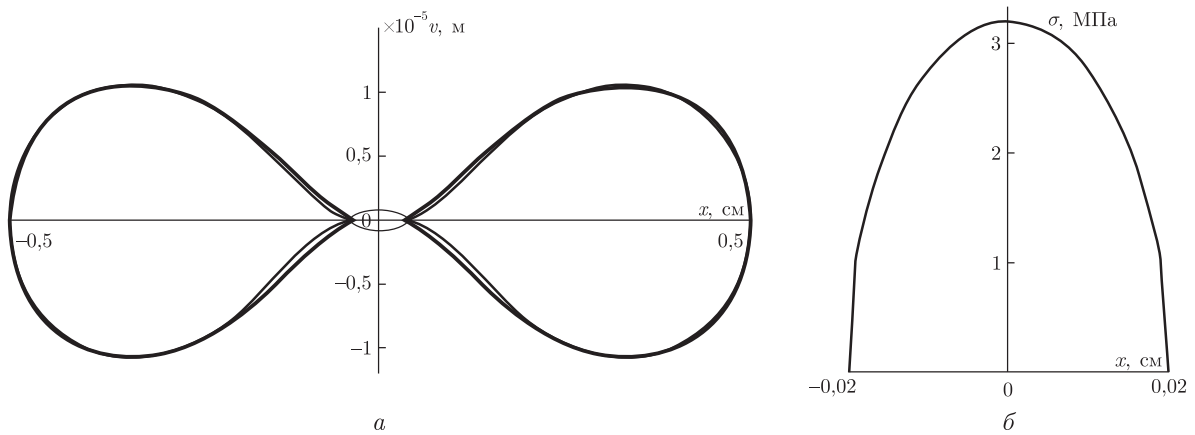


Рис. 2

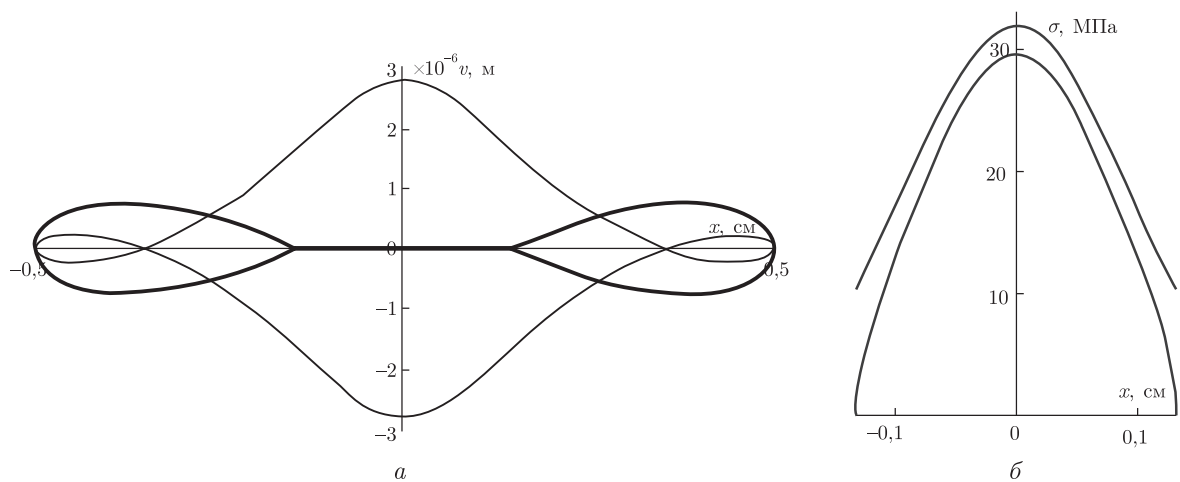


Рис. 3

На рис. 2, *a* наведені вертикальні переміщення берегів розрізу з врахуванням і без врахування контактних напружень (в останньому випадку наявне перекриття берегів); на рис. 2, *б* наведені відповідні контактні напруження. Залежності отримано для наступних значень параметрів задачі: $\nu = 2,077$, $\mu = 1539$ МПа, $\sigma = 35$ МПа, $\sigma_y^\infty = \sigma/2,5$, $P = \sigma/3,5$, $d = 0,5$ см, $y_p = 0,2$ см.

При зменшенні інтенсивності зовнішнього навантаження або збільшенні сили P ділянка зони контакту буде збільшуватися. На рис. 3 проілюстровано ті самі величини, що й на попередньому рисунку, розраховані при $P = \sigma/2$. З подальшим збільшенням P контактувати будуть береги вздовж всієї тріщини; при цьому контактні напруження становитиме $-\sigma_0(x) - \sigma_y^\infty$. Ця величина на ділянці контакту, визначеній в останньому числовому прикладі, наведена на рис. 3, *б* разом із відповідним контактним напруженням (тонка та жирна криві, відповідно).

Аналізуючи числові розв'язки, зазначимо, що розмір ділянки контакту можна оцінити за допомогою розв'язку задачі без контактних напружень (задача 1). Цю оцінку використовуємо як початкове наближення при числовому розв'язанні задачі. При незначному по відношенню до довжини тріщини розміру зони перекриття довжина зони контакту визна-

чається ділянкою перекритих берегів задачі 1, а при значних розмірах — розміром ділянки з від'ємними контактними напруженнями для задачі 1.

Таким чином, отримано співвідношення, які надають змогу обчислювати контактне напруження на берегах тріщини нормального відриву, а отже враховувати його при побудові визначальних рівнянь рівноваги тріщини, береги якої взаємодіють. Наведені міркування можуть бути використані для розв'язування задач нелінійної механіки руйнування матеріалів, постановка яких враховує наявність сил зчеплення між берегами тріщини.

Цитована література

1. *Becker W., Gross D.* About the Dugdale crack under mixed mode loading // *Int. J. Fract.* – 1988. – **37**. – P. 163–170.
2. *Comninou M.* On the frictional contact in crack analysis // *Engng Fract. Mech.* – 1979. – **12**. – P. 117–123.
3. *Hui C. Y., Ruina A., Long R., Jagota A.* Cohesive zone models and fracture // *J. of Adhesion*, – 2011. – **87**. – P. 1–52.
4. *van der Meer F. P., Sluys L. J.* A phantom node formulation with mixed mode cohesive law for splitting in laminates // *Int. J. Fract.* – 2009. – **158**. – P. 107–124.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.

References

1. *Becker W., Gross D.* *Int. J. Fract.*, 1988, **37**: 163–170.
2. *Comninou M.* *Engng Fract. Mech.*, 1979, **12**: 117–123.
3. *Hui C. Y., Ruina A., Long R., Jagota A.* *J. of Adhesion*, 2011, **87**: 1–52.
4. *van der Meer F. P., Sluys L. J.* *Int. J. Fract.*, 2009, **158**: 107–124.
5. *Muskhelishvili N. I.* *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Heidelberg: Springer, 1977.

Надійшло до редакції 19.11.2015

А. А. Каминский, М. Ф. Селиванов, Ю. А. Черноиван

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: dfm11@ukr.net, fract@inmech.kiev.ua, mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

Определение контактных напряжений между берегами трещины нормального отрыва

Поставлена и решена задача об определении контактных напряжений между берегами прямолинейной трещины в изотропном теле, пребывающем под действием растягивающих усилий на бесконечности и сосредоточенных сжимающих сил, приложенных перпендикулярно к линии трещины.

Ключевые слова: разрушение, изотропное тело, трещина нормального отрыва, контакт берегов трещины, контактные напряжения.

A. A. Kaminsky, M. F. Selivanov, Y. O. Chornoivan

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: dfm11@ukr.net, fract@inmech.kiev.ua, mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

Determination of contact stresses between mode I crack faces

A problem of determination of contact stresses in an isotropic body with a rectilinear mode I crack is stated and solved. The body is loaded by tensile stresses at infinity and by concentrated compressive forces applied transversally to the crack line.

Keywords: fracture, isotropic body, mode I crack, contact of crack faces, contact stresses.