



<http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.06.007>

УДК 517.5

Е. С. Афанасьева

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск

E-mail: es.afanasjeva@yandex.ru

Граничное поведение отображений на финслеровых пространствах

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Изучается граничное поведение Q -гомеоморфизмов на финслеровых многообразиях. Формулируются условия на функцию $Q(x)$ и границы областей, при которых всякий Q -гомеоморфизм допускает непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу.

Ключевые слова: Q -гомеоморфизмы, финслеровы многообразия, граничное поведение.

В данной работе изучается граничное поведение Q -гомеоморфизмов на финслеровых многообразиях, имеющих интересные приложения к теории относительности, физике, механике, математической биологии, а также теории оптимального управления (соответствующие ссылки см. в [1]). Развивая технику модулей применительно к семействам кривых в финслеровых пространствах, мы строим теорию граничного поведения Q -гомеоморфизмов, обладающих геометрическим свойством вида (3), строгое определение которых будет дано в п. 1. Отметим, что поведение Q -гомеоморфизмов на границе в метрическом пространстве изучалось ранее в работе [2] (см. также [3]). Отметим также, что если в (3) функцию Q считать ограниченной п. в. некоторой постоянной $K \in [1, \infty)$, а в качестве финслерова пространства выбрать n -мерное евклидовое пространство, то мы приходим к классическим квазиконформным отображениям, которые были впервые введены в работах Гретча, Лаврентьева и Морри. Фактически, изучение Q -гомеоморфизмов началось с модульного неравенства (2.5) в [4], которое положило начало в развитии этой теории, в том числе и способствовало изучению граничного поведения таких отображений.

Прежде чем сформулировать основной результат работы, напомним, что область в топологическом пространстве T — открытое линейно связное множество. Область D называется локально связной в точке $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется

© Е. С. Афанасьева, 2016

окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ связно (ср. [5, с. 232]). Аналогично, говорят, что область D локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ линейно связно.

Напомним также, что n -мерное топологическое многообразие \mathbb{M}^n — это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную \mathbb{R}^n . Картой на многообразии \mathbb{M}^n называется пара (U, φ) , где U — открытое подмножество пространства \mathbb{M}^n , а φ — гомеоморфное отображение подмножества U на открытое подмножество координатного пространства \mathbb{R}^n , с помощью которого каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие набор из n чисел, ее локальных координат. Полный набор всех карт многообразия называется его атласом.

Многообразие класса C^1 — многообразие с картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны (C^1) образом (см., например, [6, 7]).

Пусть всюду далее D — область в финслеровом пространстве (\mathbb{M}^n, Φ) , $n \geq 2$, $T\mathbb{M}^n = \bigcup T_x \mathbb{M}^n$ — касательное расслоение к (\mathbb{M}^n, Φ) , $\forall x \in \mathbb{M}^n$. Будем понимать под финслеровым многообразием (\mathbb{M}^n, Φ) , $n \geq 2$, — многообразие класса C^1 с заданной на нем финслеровой структурой $\Phi(x, \xi)$, где $\Phi(x, \xi): T\mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ — функция дважды дифференцируемая по ξ при любом $x \in \mathbb{M}^n$, имеющая непрерывные на $T\mathbb{M}^n$ частные производные по ξ до второго порядка включительно и удовлетворяющая условиям:

1) $\forall a > 0$ выполнено $\Phi(x, a\xi) = a\Phi(x, \xi)$ и $\Phi(x, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$;

2) $\forall \xi, \eta \in TM$ квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^n g(x, \xi) \eta_i \eta_j$ положительно определена и ее элементы $g_{ij}(x, \xi)$ — непрерывные функции по x и по ξ , где

$$g_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi^2(x, \xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

матрица Гессе (ср. [8]).

Элемент длины в (\mathbb{M}^n, Φ) , $n \geq 2$, определяем как дифференциал дуги для бесконечно малого измеримого участка кривой $\gamma \in D$ следующим образом:

$$ds_{\Phi}^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x, \xi) d\eta_i d\eta_j$$

(см., например, [9]). Под геодезическим расстоянием $d_{\Phi}(x, y)$ понимаем инфимум длин кусочно-гладких кривых, соединяющих точки x и y в (\mathbb{M}^n, Φ) , $n \geq 2$. Известно, что для этой метрики выполняются только две аксиомы метрического пространства (тождественности и неравенства треугольника), а потому финслерово многообразие — квазиметрическое пространство, в котором не выполняется аксиома симметричности расстояния (см., например, [10]). Чтобы финслерово пространство превратить в метрическое, достаточно рассмотреть в качестве метрики $r_{\Phi}(x, y) = (d_{\Phi}(x, y) + d_{\Phi}(y, x))/2$.

В финслеровой геометрии используют различные определения объема: объем по Холмсу–Томпсону, Левнеру, Буземану и т. д. Мы будем придерживаться определения объема по Буземану (Буземану–Хаусдорфу), т. е. элемент объема на финслеровом многообразии понимаем следующим образом:

$$d\sigma_{\Phi}(x) = \sqrt{\det g_{i,j}(x, \xi)} dx^1 \dots dx^n$$

(ср. [11]). Известно, что объем в финслеровом пространстве совпадает с его хаусдорфовой мерой размерности n , индуцированной метрикой $d_\Phi(x, y)$, если $\Phi(x, \xi)$ — обратимая функция, т.е. $\Phi(x, \xi) = \Phi(x, -\xi)$ (см., например, [12]).

Одним из основных результатов данной работы является следующая теорема о непрерывном продолжении на границу отображения, обратного к Q -гомеоморфизму.

Теорема 1. Пусть D и D' — области в (\mathbb{M}^n, Φ) и (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) , $n \geq 2$, соответственно, D локально линейно связна во всех своих граничных точках и \bar{D} — компакт, область D' имеет слабо плоскую границу, а $f: D \rightarrow D'$ — Q -гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Тогда обратное отображение $g = f^{-1}: D' \rightarrow D$ допускает непрерывное продолжение $\bar{g}: \bar{D}' \rightarrow \bar{D}$.

1. Определения и предварительные результаты. Пусть дано некоторое семейство Γ кривых в области D . Модуль семейства Γ задаем равенством

$$M(\Gamma) = \inf_D \int \rho^n(x) d\sigma_\Phi(x), \quad (2)$$

где инфимум берется по всем борелевским неотрицательным функциям ρ таким, что для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ выполнено следующее равенство:

$$\int_\gamma \rho \Phi(x, dx) = \int_\gamma \rho ds \geq 1.$$

Функции ρ , удовлетворяющие этому условию, называются *допустимыми* для Γ (ср. [8]).

Определение Q -гомеоморфизма. Пусть далее D и D' — области в (\mathbb{M}^n, Φ) и (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) , $n \geq 2$, соответственно, и пусть $Q: \mathbb{M}^n \rightarrow (0, \infty)$ — измеримая функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ называется *Q -гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int_D Q(x) \cdot \rho^n(x) d\sigma_\Phi(x) \quad (3)$$

выполняется для любого семейства кривых Γ в D и любой допустимой борелевой функции ρ семейства Γ . Эта концепция является естественным далекоидущим обобщением геометрического определения квазиконформного отображения по Вайсяля (см. [13]).

Аналог следующего утверждения впервые был получен на гладких римановых многообразиях в работе [14].

Лемма 1. Хаусдорфова размерность областей на финслеровых многообразиях (\mathbb{M}^n, Φ) относительно геодезического расстояния совпадает с топологической размерностью n . Кроме того, финслеровы многообразия локально n -регулярны по Альфорсу.

Таким образом, финслеровы пространства являются локально n -регулярными по Альфорсу, а значит, их хаусдорфова размерность совпадает с их топологической размерностью n (см. [15, с. 62]).

Из леммы 1, в частности, получаем локальное условие удвоения меры.

Следствие 1. Для любой точки x_0 финслерова многообразия (\mathbb{M}^n, Φ) найдутся $r_0 > 0$ и $c \in (1, \infty)$ такие, что

$$\sigma_\Phi(B(x_0, 2r)) \leq c\sigma_\Phi(B(x_0, r)) \quad \forall r \leq r_0. \quad (4)$$

В дальнейшем для множеств A, B и C из (\mathbb{M}^n, Φ) , $n \geq 2$, символом $\Delta(A, B; C)$ обозначаем множество всех кривых $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{M}^n$, соединяющих A и B в C , т.е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$ для всех $t \in (a, b)$.

Пусть далее D и D' — области в (\mathbb{M}^n, Φ) и (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) , $n \geq 2$, соответственно. Границу области D будем называть *слабо плоской в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geq P \quad (5)$$

для любых континуумов E и F в D , пересекающих ∂U и ∂V .

Будем называть границу области D *сильно достижимой в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geq \delta$$

для любого континуума F в D , пересекающего ∂U и ∂V .

Граница области D называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы (ср. [3]).

2. Граничное поведение Q -гомеоморфизмов.

2.1. *О продолжении на границу обратных отображений.* Напомним далее, что

$$E_0 = C(x_0, f) := \{y \in \mathbb{M}_*^n : y = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k), x_k \rightarrow x_0, x_k \in D\}$$

обозначает предельное множество отображения f в точке x_0 .

По лемме 4 из [2] и лемме 1 получаем следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $f: D \rightarrow D' - Q$ -гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Если область D локально линейно связна в точках x_1 и $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, а D' имеет слабо плоскую границу, то $C(x_1, f) \cap C(x_2, f) = \emptyset$.

По лемме 2 получаем, в частности, следующее простое, но очень важное заключение.

Теорема 1. Пусть D и $D' - Q$ -гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Тогда обратное отображение $g = f^{-1}: D' \rightarrow D$ допускает непрерывное продолжение $\bar{g}: \bar{D}' \rightarrow \bar{D}$.

2.2. *О непрерывном продолжении на границу.* Условия на функцию Q в финслеровых пространствах для непрерывного продолжения прямых отображений на границу носят более сложный характер.

По лемме 3 в [2] и лемме 1, в частности, получаем следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть D локально линейно связна в $x_0 \in \partial D$, $\bar{D}' - Q$ -гомеоморфизм такой, что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества $C(x_0, f)$, $Q: D \rightarrow (0, \infty) -$ измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(x) \cdot \psi_{x_0, \varepsilon}^n(r_\Phi(x, x_0)) d\sigma_\Phi(x) = o(I_{x_0, \varepsilon_0}^n(\varepsilon)) \quad (6)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ для некоторого достаточно малого $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) := \sup_{x \in D} r_\Phi(x, x_0)$,

$D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in D : \varepsilon < r_\Phi(x, x_0) < \varepsilon_0\}$ и $\psi_{x_0, \varepsilon}(t) -$ семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0, \infty)$ таких, что

$$0 < I_{x_0, \varepsilon_0}(\varepsilon) := \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_{x_0, \varepsilon}(t) dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \quad (7)$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности на (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) .

Следствие 2. В частности, если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < r_{\Phi}(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(r_{\Phi}(x, x_0)) d\sigma_{\Phi}(x) < \infty, \quad (8)$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$ такая, что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

и $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то Q -гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (\mathbb{M}_*^n, Φ^*) .

Теорема 2. Пусть D и D' — области в (\mathbb{M}^n, Φ) и (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) , $n \geq 2$, соответственно, D локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ — компакт и граница D' сильно достижима. Если измеримая функция $Q: \mathbb{M}^n \rightarrow (0, \infty)$ удовлетворяет условию

$$\int_{D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{Q(x) d\sigma_{\Phi}(x)}{r_{\Phi}(x, x_0)^n} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \quad (9)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где

$$D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in D: \varepsilon < r_{\Phi}(x, x_0) < \varepsilon_0\}$$

для $\varepsilon_0 < d(x_0) = \sup_{x \in D} r_{\Phi}(x, x_0)$, то любой Q -гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) .

Следствие 3. В частности, заключение теоремы остается в силе, если сходится сингулярный интеграл

$$\int \frac{Q(x) d\sigma_{\Phi}(x)}{r_{\Phi}(x, x_0)^n} \quad (10)$$

в окрестности точки x_0 в смысле главного значения.

Пусть (\mathbb{M}^n, Φ) — финслерово многообразие, $n \geq 2$. Будем говорить, что функция $\varphi: \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in \mathbb{M}^n$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_{\Phi}(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \tilde{\varphi}_{\varepsilon}| d\sigma_{\Phi}(x) < \infty \quad \forall x_0 \in \mathbb{M}^n, \quad (11)$$

где

$$\tilde{\varphi}_{\varepsilon} = \frac{1}{\sigma_{\Phi}(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) d\sigma_{\Phi}(x) - \quad (12)$$

среднее значение функции $\varphi(x)$ по шару $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n: r_{\Phi}(x, x_0) < \varepsilon\}$ относительно меры объема σ_{Φ} . Пишем также $\varphi \in FMO$, если $\varphi \in FMO(x_0)$ для всех $x_0 \in \mathbb{M}^n$.

Комбинируя лемму 2 в [2] и леммы 1 и 3 (см. выше), приходим к следующим заключениям.

Теорема 3. Пусть D и D' — области в (\mathbb{M}^n, Φ) и (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) , $n \geq 2$, соответственно, D локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ сильно достижима, а замыкание $\overline{D'}$ компактно. Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой Q -гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) .

Следствие 4. Пусть D локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ сильно достижима, а $\overline{D'}$ компактно. Если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_\Phi(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} Q(x) d\sigma_\Phi(x) < \infty,$$

то любой Q -гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) .

Теорема 4. Пусть D и D' — области в (\mathbb{M}^n, Φ) и (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) , $n \geq 2$, соответственно, D локально линейно связна на границе, $\partial D'$ сильно достижима, $\overline{D'}$ компактно. Если Q принадлежит FMO , то любой Q -гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ допускает непрерывное продолжение $\overline{f}: \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$.

2.3. *Гомеоморфное продолжение на границу.* Комбинируя результаты предыдущих пунктов, получаем следующие теоремы.

Лемма 4. Пусть D локально связна на границе, $\partial D'$ — слабо плоская, а \overline{D} и $\overline{D'}$ компактны. Если функция $Q \in L^1(D)$ удовлетворяет условию (6) в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то любой Q -гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f}: \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$.

Теорема 5. Пусть D и D' — области в (\mathbb{M}^n, Φ) и (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) , $n \geq 2$, соответственно, D и D' имеют слабо плоские границы, а \overline{D} и $\overline{D'}$ — компакты и пусть $Q: \mathbb{M}^n \rightarrow (0, \infty)$ — функция класса $L^1(D)$ с

$$\int_{D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} \frac{Q(x) d\sigma_\Phi(x)}{r_\Phi(x, x_0)^n} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \quad (13)$$

в каждой точке $x_0 \in \partial D$, где

$$D(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in D: \varepsilon < r_\Phi(x, x_0) < \varepsilon_0\},$$

$\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < d(x_0) = \sup_{x \in D} r_\Phi(x, x_0)$. Тогда любой Q -гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{f}: \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$.

Следствие 5. В частности, заключение теоремы 5 имеет место, если сингулярный интеграл

$$\int \frac{Q(x) d\sigma_\Phi(x)}{r_\Phi(x, x_0)^n} \quad (14)$$

сходится в смысле главного значения во всех граничных точках.

Теорема 6. Пусть D и D' — области в (\mathbb{M}^n, Φ) и (\mathbb{M}_*^n, Φ_*) , $n \geq 2$, соответственно, D локально линейно связна на границе, $\partial D'$ — слабо плоская, замыкания \overline{D} и $\overline{D'}$ компактны. Если Q принадлежит классу FMO , то любой Q -гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f}: \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$.

Таким образом, результаты работы распространяют (и усиливают) хорошо известные теоремы М. Вуоринена, Дж. Вайсяля, Ф. Геринга, О. Мартио, Р. Някки, У. Сребро, Э. Якубова и др. о квазиконформных отображениях в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, на Q -гомеоморфизмы в финслеровых пространствах.

Цитированная литература

1. *Афанасьева Е. С.* Граничное поведение Q -гомеоморфизмов в финслеровых пространствах // Укр. мат. вестн. – 2015. – **12**, № 3. – С. 311–325.
2. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199–234.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p. – (Springer Monographs in Mathematics).
4. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
5. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. – Москва: Мир, 1969. – 623 с.
6. *Карпан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1960. – 307 с.
7. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 384 с.
8. *Дымченко Ю. В.* Соотношение между емкостью конденсатора и модулем семейства разделяющих поверхностей в финслеровых пространствах // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2013. – **418**. – С. 74–89.
9. *Rutz S. F., Paiva F. M.* Gravity in Finsler spaces // Finslerian Geometries: A Meeting of Minds. – Dordrecht: Kluwer, 2000. – P. 223–244.
10. *Bao D., Chern S., Shen Z.* An Introduction to Riemann–Finsler Geometry. – New York: Springer, 2000. – 435 p.
11. *Rund H.* The differential geometry of Finsler spaces. – Berlin: Springer, 1959. – 284 p.
12. *Cheng X., Shen Z.* Finsler Geometry: An Approach via Randers Spaces. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. – 150 p.
13. *Väisälä J.* Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings. – Berlin: Springer, 1971. – 152 p. – (Lecture Notes in Mathematics; Vol. 229).
14. *Афанасьева Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q -гомеоморфизмов на римановых многообразиях // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 10. – С. 1299–1313.
15. *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces. – New York: Springer, 2001. – 140 p.

References

1. *Afanasyeva E. S.* Ukr. mat. vestnik, 2015, **12**, No 3: 311–325 (in Russian).
2. *Ryazanov V. I., Salimov R. R.* Ukr. mat. vestnik, 2007, **4**, No 2: 199–234 (in Russian).
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics, New York: Springer, 2009.
4. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* Int. J. Math. Math. Sci., 2003, **22**: 1397–1420.
5. *Kuratovskij K.* Topologija, Vol. 2, Moscow: Mir, 1969 (in Russian).
6. *Kartan E.* Rimanova geometrija v ortogonal'nom repere, Moscow: Izd-vo Mosc. Univ., 1960 (in Russian).
7. *Poznyak E. G., Shikin E. V.* Differencial'naja geometrija, Moscow: Izd-vo Mosc. Univ., 1990 (in Russian).
8. *Dimchenko Yu. V.* Zap. nauchn. semin. POMI, 2013, **418**: 74–89 (in Russian).
9. *Rutz S. F., Paiva F. M.* Finslerian Geometries: A Meeting of Minds, Dordrecht: Kluwer, 2000: 223–244.
10. *Bao D., Chern S., Shen Z.* An Introduction to Riemann–Finsler Geometry, New York: Springer, 2000.
11. *Rund H.* The differential geometry of Finsler spaces, Berlin: Springer, 1959.

12. *Cheng X., Shen Z.* Finsler Geometry: An Approach via Randers Spaces, Berlin; Heidelberg: Springer, 2012.
13. *Väisälä J.* Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229, Berlin: Springer, 1971.
14. *Afanasieva E. S.* Ukr. mat. zhurn., 2011, **63**, No 10: 1299–1313 (in Russian).
15. *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces, New York: Springer, 2001.

Поступило в редакцію 06.11.2015

О. С. Афанасьєва

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ

E-mail: es.afanasjeva@yandex.ru

Гранична поведінка відображень на фінслерових просторах

Вивчається гранична поведінка Q -гомеоморфізмів на фінслерових многовидах. Формулюються умови на функцію $Q(x)$ та межі областей, при яких всякий Q -гомеоморфізм допускає неперервне або гомеоморфне продовження на межу.

Ключові слова: Q -гомеоморфізми, фінслерови многовиди, гранична поведінка.

O. S. Afanasieva

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slovyansk

E-mail: es.afanasjeva@yandex.ru

The boundary behavior of mappings on Finsler spaces

The boundary behavior of Q -homeomorphisms on Finsler manifolds is studied. The conditions on a function $Q(x)$ and on the boundaries of domains, when every Q -homeomorphism has a continuous or homeomorphic extension to the boundary, are formulated.

Keywords: Q -homeomorphisms, Finsler manifolds, boundary behavior.