



<http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.06.031>

УДК 539.3

А. Я. Григоренко, Н. П. Яремченко, С. Н. Яремченко

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: ayagrigorenko@yandex.ru

Напряженно-деформированное состояние прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины при различных граничных условиях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. М. Назаренко)

Проведено дослідження напружено-деформованого стану пологої прямокутної в плані ортотропної оболочки з перемінною товщиною в двох координатних напрямленнях при різних граничних умовах на краях в уточненій постановці. Для рішення двумірних крайових задач використано численно-аналитический підхід, оснований на використанні сплайн-апроксимації і методу дискретної ортогоналізації.

Ключевые слова: пологая оболочка, ортотропный материал, неклассическая модель, сплайн-аппроксимация, переменная толщина.

Основные предположения теории пологих оболочек изложены в монографиях [1–3]. Исследование данного класса оболочек остается актуальной проблемой, об этом могут свидетельствовать работы [4–6]. В настоящем сообщении проведено исследование поведения оболочек данного класса переменной толщины в двух координатных направлениях при различных граничных условиях под действием равномерно распределенного нормального давления. Одним из существенных требований к законам изменения толщины оболочки является сохранение массы оболочки при переходе от оболочек постоянной толщины к оболочкам переменной толщины. В качестве исходных принимаем уравнения уточненной теории оболочек, основанной на гипотезе прямолинейного элемента [7]. В этом случае напряженно-деформированное состояние оболочек определяется решением двумерных краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Для сведения двумерных задач к одномерным используем сплайн-аппроксимацию. Полученные одномерные задачи решаем методом дискретной ортогонализации [8].

© А. Я. Григоренко, Н. П. Яремченко, С. Н. Яремченко, 2016

1. В качестве исходных принимаем уравнения теории оболочек, основанной на гипотезе прямой линии. Суть этой гипотезы состоит в том, что первоначально нормальный к координатной поверхности элемент после деформации остается прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной координатной поверхности. При этом принимается, что указанный элемент не изменяет свою длину. В соответствии с принятой гипотезой перемещения оболочки представим в виде:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ u_y(x, y, z) &= v(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y, z — координаты точек оболочки; u_x, u_y, u_z — соответствующие перемещения; u, v, w — перемещения точек координатной поверхности в направлениях x, y, z ; ψ_x, ψ_y — полные углы поворота прямолинейного элемента.

Уравнения для деформаций:

$$\begin{aligned} e_x(x, y, z) &= \varepsilon_x(x, y) + z\kappa_x(x, y); \\ e_y(x, y, z) &= \varepsilon_y(x, y) + z\kappa_y(x, y); \\ e_{xy}(x, y, z) &= \varepsilon_{xy}(x, y) + z2\kappa_{xy}(x, y); \\ e_{xz}(x, y, z) &= \gamma_x(x, y); \quad e_{yz}(x, y, z) = \gamma_y(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w; & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w; & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \kappa_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - k_1^2 w; & \kappa_y &= \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - k_2^2 w; & 2\kappa_{xy} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}; \\ \gamma_x &= \psi_x - \vartheta_x; & \gamma_y &= \psi_y - \vartheta_y; & \vartheta_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} + k_1 u; & \vartheta_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} + k_2 v, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ — тангенциальные, а $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ — изгибные деформации координатной поверхности; k_1, k_2 — кривизны; ϑ_x, ϑ_y — углы поворота нормали без учета поперечных сдвигов; γ_x, γ_y — углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_1 N_x - k_2 N_y + q &= 0; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x &= 0; & \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0; \\ N_{xy} - k_2 M_{yx} - N_{yx} - k_1 M_{xy} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} — тангенциальные усилия; Q_x, Q_y — перерезывающие усилия; M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} — изгибающие и крутящие моменты.

Соотношения упругости для ортотропных оболочек:

$$N_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y; \quad N_y = C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y;$$

$$\begin{aligned}
N_{xy} &= C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_2D_{66}\varkappa_{xy}; & N_{yx} &= C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_1D_{66}\varkappa_{xy}; \\
M_x &= D_{11}\varkappa_x + D_{12}\varkappa_y; & M_y &= D_{12}\varkappa_x + D_{22}\varkappa_y; \\
M_{yx} &= M_{xy} = 2D_{66}\varkappa_{xy}; & Q_x &= K_1\gamma_x; & Q_y &= K_2\gamma_y.
\end{aligned} \tag{5}$$

В (5) коэффициенты определяются так:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{E_x h}{1 - \nu_x \nu_y}, & C_{12} &= \nu_y C_{11}, & C_{22} &= \frac{E_y h}{1 - \nu_x \nu_y}, & C_{66} &= G_{xy} h, \\
D_{11} &= \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, & D_{12} &= \nu_y D_{11}, & D_{22} &= \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \\
D_{66} &= \frac{G_{xy} h^3}{12}, & K_1 &= \frac{5}{6} G_{xz} h, & K_2 &= \frac{5}{6} G_{yz} h.
\end{aligned} \tag{6}$$

В формулах (6) E_x, E_y, ν_x, ν_y — модули упругости и коэффициенты Пуассона в направлениях x и y ; G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} — модули сдвига.

Выберем в качестве разрешающих функций компоненты вектора перемещений u, v, w и полные углы поворота ψ_x и ψ_y . Если ввести обозначения

$$\tilde{u} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \tilde{v} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \tilde{w} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tilde{\psi}_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}; \quad \tilde{\psi}_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial x}, \tag{7}$$

то напряженно-деформированное состояние оболочки описывается системой (5) дифференциальных уравнений в частных производных, которую можно представить в виде [6]:

$$\begin{aligned}
F_1 &\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \tilde{u}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tilde{v}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}, w, \tilde{w}, \frac{\partial \psi_x}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2}, \tilde{\psi}_y, \frac{\partial \tilde{\psi}_y}{\partial y} \right) = 0; \\
F_2 &\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}, \tilde{u}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}, v, \tilde{v}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, w, \frac{\partial w}{\partial y}, \tilde{\psi}_x, \frac{\partial \tilde{\psi}_x}{\partial y}, \psi_y, \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \right) = 0; \\
F_3 &\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}, u, \tilde{u}, v, \frac{\partial v}{\partial y}, w, \tilde{w}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \psi_x, \tilde{\psi}_x, \psi_y, \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, q \right) = 0; \\
F_4 &\left(\frac{\partial \tilde{\psi}_x}{\partial x}, u, w, \tilde{w}, \psi_x, \tilde{\psi}_x, \frac{\partial \psi_x}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2}, \tilde{\psi}_y, \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{\psi}_y}{\partial y} \right) = 0; \\
F_5 &\left(\frac{\partial \tilde{\psi}_y}{\partial x}, v, w, \frac{\partial w}{\partial y}, \tilde{\psi}_x, \frac{\partial \psi_x}{\partial y}, \frac{\partial \psi_x}{\partial y}, \psi_y, \tilde{\psi}_y, \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь F_i ($i = \overline{1, 5}$) — линейные функции своих аргументов с коэффициентами, зависящими от x и y ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$); q — нормально распределенная нагрузка.

При $x = 0$ и $x = a$ будем задавать условия жесткого закрепления

$$u = v = w = 0; \quad \psi_x = \psi_y = 0 \tag{9}$$

и условия свободного края

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w + \nu_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w \right) &= 0; & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; & \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} - k_1 u &= 0; \\
\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - k_1^2 w + \nu_y \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - k_2^2 w \right) &= 0; & \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} &= 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

а при $y = 0, y = b$ будем рассматривать условия (9).

2. Решение задачи $\bar{g}(x, y) = \{u, v, w, \psi_x, \psi_y\}$ представим в виде

$$\bar{g} = \sum_{i=0}^N \bar{g}_i(x) \varphi_i(y), \quad (11)$$

где $\bar{g}_i = \{u_i, v_i, w_i, \psi_{xi}, \psi_{yi}\}$ — неизвестные функции, а φ_i — линейные комбинации В-сплайнов третьей степени на равномерной сетке, удовлетворяющие заданным граничным условиям (9). Подставляя выражения (11) в разрешающие уравнения (8) и соответствующие граничные условия (9) или (10) требуем, чтобы полученная система и граничные условия точно удовлетворялись в точках коллокации. В результате получим одномерную краевую задачу, которую можно представить в виде

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A\bar{Y} + \bar{f}, \quad (12)$$

где $\bar{Y} = \{\bar{g}_0, \dots, \bar{g}_N, \bar{g}'_0, \dots, \bar{g}'_N\}$ вектор-функция от x ; \bar{f} — вектор правых частей; A — квадратная матрица размерности $10(N+1) \times 10(N+1)$, элементы которой зависят от x .

Граничные условия для полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать так:

$$B_1\bar{Y}(0) = \bar{0}; \quad B_2\bar{Y}(a) = \bar{0}. \quad (13)$$

B_1 и B_2 — прямоугольные матрицы размерности $5(N+1) \times 10(N+1)$.

Для решения одномерной краевой задачи (12), (13) применим устойчивый численный метод дискретной ортогонализации.

3. Для оценки достоверности результатов расчетов по предложенной методике решена задача для изотропной пологой оболочки с жестко закрепленными сторонами под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки q . При этом $a = b = 10$; $\nu = 0,3$; $k_1 = k_2 = 0,1$; толщина оболочки изменяется по таким законам:

$$\begin{aligned} 1) \quad h &= h_0 \left(1 + \alpha \left[3 \left\{ \frac{2x}{a} - 1 \right\}^2 - 1 \right] \right) \left(1 + \beta \left[3 \left\{ \frac{2y}{b} - 1 \right\}^2 - 1 \right] \right), \\ 2) \quad h &= h_0 \left(1 + \alpha \left[\frac{2x}{a} - 1 \right] \right) \left(1 + \beta \left[\frac{2y}{b} - 1 \right] \right), \\ 3) \quad h &= h_0 \left(1 + \alpha \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \beta \cos \frac{\pi y}{b} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $h_0 = 0,5$.

В табл. 1 приведены результаты расчетов прогибов wE/q в точке $x = a/2$, $y = b/2$ для трех вариантов изменения толщины (14). При этом количество точек коллокации $N+1$ изменяется от 14 до 22. Параметры α и β изменяются так, что в случае $\alpha = 0,3$, $\beta = 0$ толщина меняется в направлении x , т. е. в направлении ортогонализации, а в случае $\alpha = 0$, $\beta = 0,3$ — в направлении коллокации y .

Как видно из табл. 1, с увеличением количества точек коллокации различия между полученными результатами незначительны, что свидетельствует о достоверности решений.

4. С помощью изложенного подхода решена задача для ортотропных пологих оболочек при разных вариантах изменения толщины. Оболочка находится под действием равномерной нормальной нагрузки $q_0 = \text{const}$, края $x = 0$, $x = a$ — свободны, а $y = 0$, $y = b$ —

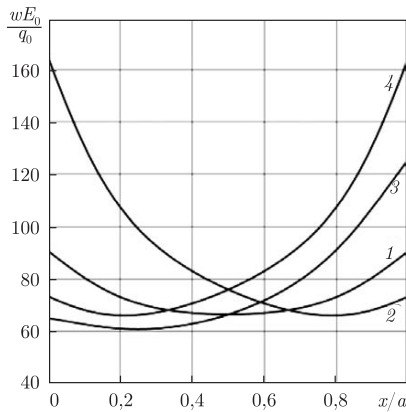


Рис. 1

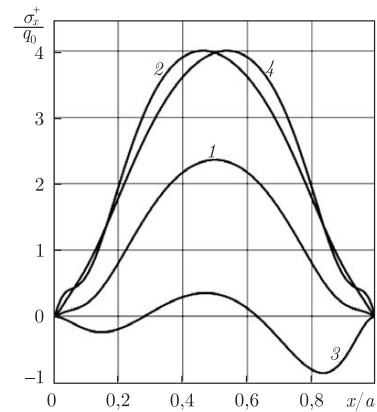


Рис. 2

жестко закреплены. При этом характеристики оболочки такие [9]: $E_x = E_0$, $E_y = 4,07E_0$, $\nu_y = 0,277$, $G_{xy} = G_{yz} = 0,407E_0$, $G_{xz} = 0,357E_0$, $a = b = 10$, $k_1 = k_2 = 0,1$.

На рис. 1 и 2 показаны распределения соответственно прогибов wE_0/q_0 и напряжений на внешней поверхности оболочки σ_x^+/q_0 в случае если толщина оболочки изменяется по закону $h = h_0(1 + \alpha[2x/a - 1])(1 + \beta[3\{2y/b - 1\}^2 - 1])$, где $h_0 = 0,5$, при разных значениях параметров изменения толщины α и β в сечении $y = b/2$:

$$\begin{aligned} 1) \alpha = 0, \quad \beta = 0; \quad 2) \alpha = 0,3, \quad \beta = 0,3; \\ 3) \alpha = -0,3, \quad \beta = -0,3; \quad 4) \alpha = -0,3, \quad \beta = 0,3. \end{aligned} \quad (15)$$

Из рис. 1 видно, что если рассмотреть графики 2 и 4, можно отметить, что прогибы при $x = 0$ для случая 2 совпадают с прогибами при $x = a$ для случая 4 и наоборот. Это значит, что изменяя параметр α на противоположный, при постоянном значении β получим фактически аналогичные результаты. Из графиков 3 и 4 можно увидеть, как влияет изменение параметра β на распределение прогибов. С изменением β от $-0,3$ до $0,3$ прогиб увеличивается примерно на 30%. Случай 1 соответствует оболочке постоянной толщины, поэтому график симметричный относительно середины сечения, и на краях $x = 0$, $x = a$ прогибы совпадают.

Анализируя графики на рис. 2, отметим, что максимальные напряжения достигаются в случаях 2 и 4. При этом, как и в случае с прогибами, можно отметить, что эти случаи соответствуют одной и той же оболочке, если поменять местами значения $x = 0$ и $x = a$. Поскольку на краях $x = 0$ и $x = a$ задавались условия свободного края, то напряжения σ_x^+/q_0 равны 0. В случае 3 на внешней поверхности наблюдаются отрицательные напряжения.

На рис. 3 и 4 показаны распределения соответственно прогибов wE_0/q_0 и напряжений на внешней поверхности оболочки σ_y^+/q_0 в случае если толщина оболочки изменяется

Таблица 1

h	wE/q					
	$\alpha = 0,3; \beta = 0$			$\alpha = 0; \beta = 0,3$		
	N = 13	N = 17	N = 21	N = 13	N = 17	N = 21
1	70,71	70,80	70,84	68,93	70,18	70,46
2	120,94	120,33	120,10	121,12	120,40	120,13
3	121,06	120,43	120,19	121,63	120,70	120,33

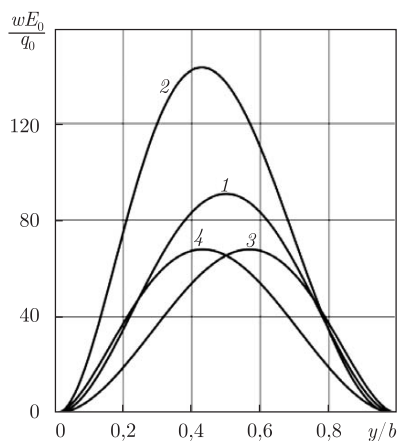


Рис. 3

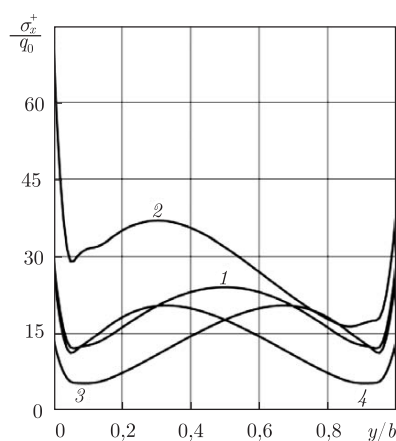


Рис. 4

по закону $h = h_0(1 + \alpha[2x/a - 1])(1 + \beta[2y/b - 1])$, где $h_0 = 0,5$ при разных значениях параметров изменения толщины α и β в сечении $x = 0$. Параметры изменяются так как указано в (15). График, соответствующий варианту 1, симметричный относительно середины края $y = b/2$, так как в этом случае толщина постоянная. Из графиков 2 и 4 можно увидеть, как влияет на изменения прогиба параметр α . С изменением α от $-0,3$ до $0,3$ максимальный прогиб увеличивается более чем в 2 раза. Влияние параметра β можно увидеть рассмотрев графики 3 и 4.

Из рис. 4 можно отметить, что максимальные значения напряжений $\sigma_y + /q_0$ наблюдаются у краев оболочки $y = 0$ и $y = b$. Наибольшее значение напряжения соответствует варианту 2, при этом напряжения σ_y^+/q_0 превышают напряжения для варианта постоянной толщины у края $y = 0$ примерно в 2,5 раза.

Таким образом, результаты проведенных численных экспериментов дают возможность сделать вывод о том, что изменяя толщину оболочки по различным законам, сохраняя при этом ее массу, при различных граничных условиях, можно влиять на ее напряженно-деформированное состояние. Это дает возможность оптимизировать работу различных конструкций, имеющих форму прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины.

Цитированная литература

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. Vlasov V. Z. General theory of shells and its application in engineering. – Washington: NASA, 1964. – 913 p.
3. Ventsel E., Krauthammer T. Thin Plates and Shells. Theory, Analysis, and Applications. – New York; Basel: Marcel Dekker, 2001. – 658 p.
4. Khandelwal R. P., Chakrabarti A., Bhargava P. Inter-laminar stresses in a laminated shallow shell panel // Acta Mech. – 2013. – **224**, No 11. – P. 2735–2748.
5. Awrejcewicz J., Kurpa L., Osetrov A. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation // ZAMM. J. of Appl. Math. and Mech. – 2011. – **91**, No 6. – P. 458–467.
6. Григоренко А. Я., Яремченко Н. П., Яремченко С. Н. Расчет напряженно-деформированного состояния слоистых прямоугольных в плане пологих ортотропных оболочек в уточненной постановке // Доп. НАН України. – 2012. – № 2. – С. 76–82.
7. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Vlaikov G. G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models – Kiev: Akademperiodika, 2009. – 550 p.

8. Григоренко Я. М., Шевченко Ю. Н., Василенко А. Т. и др. Численные методы / Механика композитов: в 12 т. под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 11 – Киев: А. С. К., 2002. – 448 с..
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.

References

1. Ambartsumyan S. A. General theory of anisotropic shells, Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
2. Vlasov V. Z. General theory of shells and its application in engineering, Washington: NASA, 1964.
3. Ventsel E., Krauthammer T. Thin Plates and Shells. Theory, Analysis, and Applications, New York; Basel: Marcel Dekker, 2001.
4. Khandelwal R. P., Chakrabarti A., Bhargava P. Acta Mech., 2013, **224**, No 11: 2735–2748.
5. Awrejcewicz J., Kurpa L., Osetrov A. ZAMM. J. of Appl. Math. and Mech., 2011, **91**, No 6: 458–467.
6. Grigorenko A. Ya., Yaremchenko N. P., Yaremchenko S. N. Dopov. NAN Ukraine, 2012, No 2: 76–82 (in Russian).
7. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Vlaikov G. G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models, Kiev: Akadempriodika, 2009.
8. Grigorenko Ya. M., Shevchenko Yu. N., Vasilenko A. T. et al. Numerical methods (Mechanics of composites in 12 vol. Guz A. N ed. Vol. 11), Kiev: A. S. K, 2002 (in Russian).
9. Lekhnitskii S. G. Theory of elasticity of anisotropic body, Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).

Поступило в редакцию 01.10.2015

О. Я. Григоренко, Н. П. Яремченко, С. М. Яремченко

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: ayagrigorenko@yandex.ru

Напружено-деформований стан прямокутних в плані пологих оболонок змінної товщини при різних граничних умовах

Проведено дослідження напружено деформованого стану пологої прямокутної в плані ортотропної оболонки зі змінною товщиною в двох координатних напрямках при різних граничних умовах на краях в уточненій постановці. Для розв'язання двовимірних крайових задач використано чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні сплайн-апроксимації та методу дискретної ортогоналізації.

Ключові слова: полого оболонка, ортотропний матеріал, некласична модель, сплайн-апроксимація, змінна товщина.

A. Ya. Grigorenko, N. P. Yaremchenko, S. N. Yaremchenko

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: ayagrigorenko@yandex.ru

Stress-strain state of rectangular shallow shells of variable thickness under various boundary conditions

The stress-strain state of a shallow rectangular orthotropic shell with variable thickness in two coordinate directions at different boundary conditions on the edges in refined formulation is studied. The numerical-analytical approach based on the spline approximation and the method of discrete orthogonalization is used to solve two-dimensional boundary-value problems.

Keywords: shallow shells, orthotropic material, non-classical model, spline approximation, variable thickness.