

Член-корреспондент НАН Украины **Л. П. Хорошун, Е. Н. Шикуча**

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

*E-mail:* lkoroshun@yandex.ua, ensh@ukr.net

## **Эффективные деформативные свойства волокнистых композитных материалов при физически нелинейном деформировании компонентов**

*Сформулирована модель нелинейного деформирования волокнистых композитных материалов при физически нелинейном деформировании компонентов. Построены алгоритмы для определения эффективных деформативных свойств волокнистых композитных материалов. Исследовано влияние нелинейности деформирования компонентов на эффективные деформативные свойства волокнистых композитов.*

**Ключевые слова:** волокнистые композиты, физическая нелинейность деформирования компонентов, эффективные деформативные свойства, влияние нелинейности.

При увеличении нагрузки многие композитные материалы проявляют нелинейный характер зависимостей между макронапряжениями и макродеформациями, что обусловлено физической нелинейностью деформирования компонентов. Такой вид нелинейности является типичным для композитов на основе пластической металлической матрицы, а также на основе полимеров при повышенных температурах. Однако экспериментальные исследования показывают [1], что при достаточно высоких температурах нелинейно деформируются также высокомодульные материалы типа стекловолокон, как показано на рис. 1. Поэтому представляет интерес исследование физически нелинейного деформирования композитных материалов при нелинейном деформировании как связующего, так и волокон.

В настоящей работе рассматривается задача об эффективных деформативных свойствах и напряженно-деформированном состоянии волокнистых композитных материалов при физически нелинейном деформировании компонентов. Приводятся основные соотношения для волокнистых композитных материалов, построены алгоритмы определения эффективных деформативных свойств и напряженно-деформированного состояния, а также исследовано влияние нелинейности на деформирование композита.

**Исходные уравнения.** Рассмотрим однонаправленный волокнистый композитный материал с нелинейно деформирующимися изотропными компонентами, находящийся в условиях однородных макродеформаций. Ось  $x_3$  направим вдоль волокон. Тогда зависимости между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформациями  $\varepsilon_{ij}$  можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{\alpha\beta})\varepsilon_{pp}\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{\alpha\beta})\varepsilon_{ij} \quad \left( \lambda(\varepsilon_{\alpha\beta}) = K - \frac{2\mu(\varepsilon_{\alpha\beta})}{3}; i, j, p = 1, 2, 3 \right), \quad (1)$$

где модули объемного сжатия  $K$  и сдвига  $\mu(\varepsilon_{\alpha\beta})$  — случайные функции координат, принимающие значения соответственно  $K_1$ ,  $\mu_1(\varepsilon_{\alpha\beta})$  и  $K_2$ ,  $\mu_2(\varepsilon_{\alpha\beta})$ , для волокон и связующего,

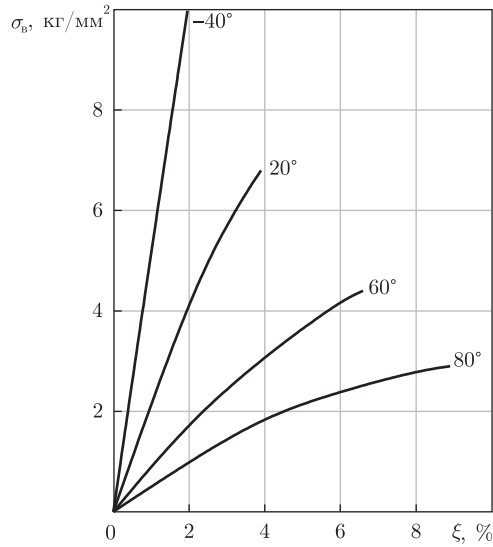


Рис. 1

причем объемные деформации компонентов являются линейными, т. е. модули объемного сжатия  $K_1$ ,  $K_2$  не зависят от деформаций, а сдвиговые деформации описываются нелинейными диаграммами. Предполагаем, что нелинейные диаграммы деформирования волокон и связующего при малых деформациях имеют линейные участки, которым соответствуют модули сдвига соответственно  $\mu_{10}$  и  $\mu_{20}$ .

Если макрообъем композита находится в условиях макрооднородного деформирования, то микронапряжения  $\sigma_{ij}$  и микродеформации  $\varepsilon_{ij}$  будут статистически однородными случайными функциями координат, удовлетворяющими свойству эргодичности. Поэтому их математические ожидания  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  в произвольной точке макрообъема равны соответственно микронапряжениям и микродеформациям [2, 3]. На основе уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2)$$

соотношений Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

и зависимостей (1), представляя случайные поля напряжений, деформаций и перемещений в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0, \quad \varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon_{ij}^0, \quad u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0, \quad (4)$$

приходим к физически и статистически нелинейным уравнениям равновесия относительно флуктуаций перемещений  $u_i^0$

$$\begin{aligned} \mu_c u_{k,rr}^0 + (\lambda_c + \mu_c) u_{r,rj}^0 = -\{[\lambda(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \lambda_c] \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{kl} + 2[\mu(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \mu_c] \langle \varepsilon_{kl} \rangle + \\ + [\lambda(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \lambda_c] \varepsilon_{pp}^0 \delta_{kl} + 2[\mu(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \mu_c] \varepsilon_{kl}^0\}_{,l}, \\ \mu_c u_{3,rr}^0 = -2\{[\mu(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \mu_c] \varepsilon_{3l}^0 + [\mu(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \mu_c] \varepsilon_{3l}^0\}_{,l} \quad (k, l, r = 1, 2, p = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_c &= c_1\mu_{10} + c_2\mu_{20}, & \lambda_c &= c_1\lambda_{10} + c_2\lambda_{20} \\ (\lambda_{10} &= K_1 - 2/3\mu_{10}, \lambda_{20} = K_2 - 2/3\mu_{20}), \end{aligned} \quad (6)$$

если жесткость связующего больше жесткости волокон, и

$$\mu_c = \left( \frac{c_1}{\mu_{10}} + \frac{c_2}{\mu_{20}} \right)^{-1}, \quad \lambda_c = \left( \frac{c_1}{\lambda_{10}} + \frac{c_2}{\lambda_{20}} \right)^{-1}, \quad (7)$$

если жесткость волокон больше жесткости связующего.

Флуктуации перемещений  $u_i^0$  пренебрежимо малы по сравнению с их средними значениями при  $x_j \rightarrow \infty$ , поэтому на бесконечности флуктуации перемещений принимаем равными нулю.

Усредняя соотношения (1) и пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонентов, получаем выражения для средних напряжений в виде

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= c_1\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) \langle \varepsilon_{pp}^1 \rangle \delta_{ij} + c_2\lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) \langle \varepsilon_{pp}^2 \rangle \delta_{ij} + 2c_1\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle + \\ &+ 2c_2\mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — объемные концентрации соответственно волокон и связующего.

Воспользовавшись функцией Грина [2–4], уравнения (5)–(7) можно привести к интегральной форме, которые после условного усреднения преобразуются в систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних деформаций компонентов

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle + c_2[\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)] Q_{ijkk} \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{ij} + \\ &+ 2c_2[\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)] Q_{ijmn} \langle \varepsilon_{mn} \rangle, \\ \langle \varepsilon_{i3}^1 \rangle &= \langle \varepsilon_{i3} \rangle + 2c_2[\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)] Q_{i3m3} \langle \varepsilon_{m3} \rangle, \\ \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle - c_1[\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)] Q_{ijkk} \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{ij} - \\ &- 2c_1[\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)] Q_{ijmn} \langle \varepsilon_{mn} \rangle, \\ \langle \varepsilon_{i3}^2 \rangle &= \langle \varepsilon_{i3} \rangle - 2c_1[\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)] Q_{i3m3} \langle \varepsilon_{m3} \rangle \\ (i, j, k, m, n &= 1, 2, p = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь ненулевые компоненты тензора  $Q_{ijmn}$  для трансверсально-изотропной среды имеют вид

$$\begin{aligned} Q_{1111} + Q_{1122} &= Q_{2211} + Q_{2222} = \\ &= -\{2[c_1(\lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) + \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)) + c_2(\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + \mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle)) + \mu_c]\}^{-1}, \\ Q_{1212} &= Q_{2121} = Q_{2112} = Q_{1221} = \\ &= -\left\{ 4 \left[ c_1\mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) + c_2\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + \frac{\mu_c(\lambda_c + \mu_c)}{\lambda_c + 3\mu_c} \right] \right\}^{-1}, \\ Q_{1313} &= Q_{3131} = Q_{3113} = Q_{1331} = Q_{2323} = Q_{3232} = Q_{3223} = Q_{2332} = \\ &= -\{4[c_1\mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) + c_2\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + \mu_c]\}^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

**Нелинейные уравнения для определения эффективных деформативных свойств и напряженно-деформированного состояния композита.** Подставив решение системы (9), (10), (5)–(7) в соотношения (8), получим зависимости между макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и макродеформациями  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ , которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij}, \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (11)$$

причем эффективные деформативные характеристики композита  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ ,  $\lambda_{44}^*$  должны быть функциями макродеформаций  $\langle \varepsilon_{pq} \rangle$ .

Для волокнистого композитного материала с учетом (9), (10), (5)–(7) эффективные деформативные характеристики  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ ,  $\lambda_{44}^*$  представляются через модули объемного сжатия и сдвига волокон  $K_1$ ,  $\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle)$  и связующего  $K_2$ ,  $\mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)$  формулами [4, 5]

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* &= 2c_1[\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + \mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle)] + 2c_2[\lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) + \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)] - \\ &\quad - \frac{2c_1c_2[\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + \mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) - \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)]^2}{c_1[\lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) + \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)] + c_2[\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + \mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle)] + \mu_c}, \\ \lambda_{11}^* - \lambda_{12}^* &= 2c_1\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + 2c_2\mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) - \frac{2c_1c_2[\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)]^2}{c_1\mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) + c_2\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + \frac{\mu_c(\lambda_c + \mu_c)}{\lambda_c + 3\mu_c}}, \\ \lambda_{13}^* &= c_1\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + c_2\lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) - \\ &\quad - \frac{c_1c_2[\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + \mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) - \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)][\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)]}{c_1[\lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) + \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)] + c_2[\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + \mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle)] + \mu_c}, \\ \lambda_{33}^* &= c_1[\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + 2\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle)] + c_2[\lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) + 2\mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)] - \\ &\quad - \frac{c_1c_2[\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)]^2}{c_1[\lambda_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) + \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)] + c_2[\lambda_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + \mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle)] + \mu_c}, \\ \lambda_{44}^* &= c_1\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + c_2\mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) - \frac{c_1c_2[\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) - \mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle)]^2}{c_1\mu_2(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \rangle) + c_2\mu_1(\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^1 \rangle) + \mu_c}. \end{aligned} \quad (12)$$

Зависимости (10), (11), (6)–(8) и (13) представляют собой систему нелинейных уравнений для определения эффективных деформативных характеристик композита и средних деформаций в его волокнах и связующем.

**Алгоритм для определения эффективных деформативных свойств и напряженно-деформированного состояния композита.** Решение системы нелинейных уравнений (9), (10), (5)–(7), (12) можно построить итерационным методом по следующей схеме. Примем, что девиаторы напряжений и деформаций связаны нелинейным законом

$$\langle \sigma_{pq}^\nu \rangle' = 2\mu_\nu(J_\varepsilon^\nu) \langle \varepsilon_{pq}^\nu \rangle'; \quad J_\varepsilon^\nu = (\langle \varepsilon_{pq}^\nu \rangle' \langle \varepsilon_{pq}^\nu \rangle')^{1/2} \quad (\nu = 1, 2), \quad (13)$$

Из системы (9), (10) средние деформации компонентов в  $(n+1)$ -м приближении  $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n+1)}$  и  $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n+1)}$  определяются как функции средних деформаций композита  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  согласно схеме

$$\begin{aligned}
 \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n+1)} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle + c_2 [\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) - \lambda_2(J_\varepsilon^2(n))] Q_{ijkk}^{(n)} \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{ij} + \\
 &\quad + 2c_2 [\mu_1(J_\varepsilon^1(n)) - \mu_2(J_\varepsilon^2(n))] Q_{ijmn}^{(n)} \langle \varepsilon_{mn} \rangle, \\
 \langle \varepsilon_{i3}^1 \rangle^{(n+1)} &= \langle \varepsilon_{i3} \rangle + 2c_2 [\mu_1(J_\varepsilon^1(n)) - \mu_2(J_\varepsilon^2(n))] Q_{i3m3}^{(n)} \langle \varepsilon_{m3} \rangle, \\
 \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n+1)} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle - c_1 [\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) - \lambda_2(J_\varepsilon^2(n))] Q_{ijkk}^{(n)} \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{ij} - \\
 &\quad = -2c_1 [\mu_1(J_\varepsilon^1(n)) - \mu_2(J_\varepsilon^2(n))] Q_{ijmn}^{(n)} \langle \varepsilon_{mn} \rangle, \\
 \langle \varepsilon_{i3}^2 \rangle^{(n+1)} &= \langle \varepsilon_{i3} \rangle - 2c_1 [\mu_1(J_\varepsilon^1(n)) - \mu_2(J_\varepsilon^2(n))] Q_{i3m3}^{(n)} \langle \varepsilon_{m3} \rangle \\
 &\quad (i, j, k, m, n = 1, 2, p = 1, 2, 3).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь ненулевые компоненты тензора  $Q_{ijpq}^{(n)}$  для трансверсально-изотропной среды имеют вид

$$\begin{aligned}
 Q_{1111}^{(n)} + Q_{1122}^{(n)} &= Q_{2211}^{(n)} + Q_{2222}^{(n)} = \\
 &= -\{2[c_1(\lambda_2(J_\varepsilon^2(n)) + \mu_2(J_\varepsilon^2(n))) + c_2(\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) + \mu_1(J_\varepsilon^1(n))) + \mu_c]\}^{-1}, \\
 Q_{1212}^{(n)} &= Q_{2121}^{(n)} = Q_{2112}^{(n)} = Q_{1221}^{(n)} = \\
 &= -\left\{4 \left[ c_1 \mu_2(J_\varepsilon^2(n)) + c_2 \mu_1(J_\varepsilon^1(n)) + \frac{\mu_c(\lambda_c + \mu_c)}{\lambda_c + 3\mu_c} \right]\right\}^{-1}, \\
 Q_{1313}^{(n)} &= Q_{3131}^{(n)} = Q_{3113}^{(n)} = Q_{1331}^{(n)} = Q_{2323}^{(n)} = Q_{3232}^{(n)} = Q_{3223}^{(n)} = Q_{2332}^{(n)} = \\
 &= -\{4[c_1 \mu_2(J_\varepsilon^2(n)) + c_2 \mu_1(J_\varepsilon^1(n)) + \mu_c]\}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Эффективные деформативные характеристики волокнистого композита в  $n$ -м приближении  $\lambda_{11}^{*(n)}$ ,  $\lambda_{12}^{*(n)}$ ,  $\lambda_{13}^{*(n)}$ ,  $\lambda_{33}^{*(n)}$ ,  $\lambda_{44}^{*(n)}$  определяются формулами

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)} &= 2c_1 [\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) + \mu_1(J_\varepsilon^1(n))] + 2c_2 [\lambda_2(J_\varepsilon^2(n)) + \mu_2(J_\varepsilon^2(n))] - \\
 &\quad - \frac{2c_1 c_2 [\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) + \mu_1(J_\varepsilon^1(n)) - \lambda_2(J_\varepsilon^2(n)) - \mu_2(J_\varepsilon^2(n))]^2}{c_1 [\lambda_2(J_\varepsilon^2(n)) + \mu_2(J_\varepsilon^2(n))] + c_2 [\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) + \mu_1(J_\varepsilon^1(n))] + \mu_c}, \\
 \lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)} &= 2c_1 \mu_1(J_\varepsilon^1(n)) + 2c_2 \mu_2(J_\varepsilon^2(n)) - \frac{2c_1 c_2 [\mu_1(J_\varepsilon^1(n)) - \mu_2(J_\varepsilon^2(n))]^2}{c_1 \mu_2(J_\varepsilon^2(n)) + c_2 \mu_1(J_\varepsilon^1(n)) + \frac{\mu_c(\lambda_c + \mu_c)}{\lambda_c + 3\mu_c}}, \\
 \lambda_{13}^{*(n)} &= c_1 \lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) + c_2 \lambda_2(J_\varepsilon^2(n)) - \\
 &\quad - \frac{c_1 c_2 [\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) + \mu_1(J_\varepsilon^1(n)) - \lambda_2(J_\varepsilon^2(n)) - \mu_2(J_\varepsilon^2(n))] [\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) - \lambda_2(J_\varepsilon^2(n))]}{c_1 [\lambda_2(J_\varepsilon^2(n)) + \mu_2(J_\varepsilon^2(n))] + c_2 [\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) + \mu_1(J_\varepsilon^1(n))] + \mu_c},
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\lambda_{33}^{*(n)} = c_1[\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) + 2\mu_1(J_\varepsilon^1(n))] + c_2[\lambda_2(J_\varepsilon^2(n)) + 2\mu_2(J_\varepsilon^2(n))] - \frac{c_1 c_2 [\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) - \lambda_2(J_\varepsilon^2(n))]^2}{c_1[\lambda_2(J_\varepsilon^2(n)) + \mu_2(J_\varepsilon^2(n))] + c_2[\lambda_1(J_\varepsilon^1(n)) + \mu_1(J_\varepsilon^1(n))] + \mu_c},$$

$$\lambda_{44}^{*(n)} = c_1\mu_1(J_\varepsilon^1(n)) + c_2\mu_2(J_\varepsilon^2(n)) - \frac{c_1 c_2 [\mu_1(J_\varepsilon^1(n)) - \mu_2(J_\varepsilon^2(n))]^2}{c_1\mu_2(J_\varepsilon^2(n)) + c_2\mu_1(J_\varepsilon^1(n)) + \mu_c},$$

где

$$\lambda_\nu(J_\varepsilon^\nu(n)) = K_\nu - \frac{2}{3}\mu_\nu(J_\varepsilon^\nu(n)) \quad (\nu = 1, 2), \quad (17)$$

а постоянные  $\lambda_c$ ,  $\mu_c$  определяются по формулам (6), (7).

В качестве нулевого приближения выбирается случай линейного деформирования волокнистого композитного материала.

**Исследование влияния нелинейности компонентов на деформирование композита.** В качестве конкретной задачи исследуем нелинейное деформирование волокнистого композитного материала, у которого модули объемного сжатия волокон  $K_1$  и связующего  $K_2$  постоянны, а модули сдвига  $\mu_\nu$  ( $\nu = 1, 2$ ) задаются функциями

$$\mu_1(J_\varepsilon^1) = \begin{cases} \mu_{10}, & J_\varepsilon^1 < \frac{k_1}{2\mu_{10}}, \\ \mu_{10} - \mu'_1 \left(1 - \frac{k_1}{2J_\varepsilon^1}\right), & J_\varepsilon^1 \geq \frac{k_1}{2\mu_{10}}, \end{cases} \quad (18)$$

$$\mu_2(J_\varepsilon^2) = \begin{cases} \mu_{20}, & J_\varepsilon^2 < \frac{k_2}{2\mu_{20}}, \\ \mu'_2 + \left(1 - \frac{\mu'_2}{\mu_{20}}\right) \frac{k_{i2}}{2J_\varepsilon^2}, & J_\varepsilon^2 \geq \frac{k_2}{2\mu_{20}}, \end{cases} \quad (19)$$

где  $\mu_{\nu 0}$ ,  $\mu'_\nu$ ,  $k_\nu = \sigma_{\nu 0} \sqrt{2/3}$  — постоянные волокон (при  $\nu = 1$ ) и связующего (при  $\nu = 2$ ) материала;  $\sigma_{\nu 0}$  — предел их текучести;  $J_\varepsilon^\nu = (\langle \varepsilon_{pq}^\nu \rangle' \langle \varepsilon_{pq}^\nu \rangle')^{1/2}$ ,  $\langle \varepsilon_{pq}^\nu \rangle'$  — девиатор средних в волокнах или связующем деформаций.

При выполнении расчетов в качестве компонентов взяты соответственно стекловолокна, которые имеют диаграмму нелинейного деформирования (18) с постоянными [1, 6–8]

$$K_1 = 27,78 \text{ ГПа}, \quad \mu_{10} = 20,83 \text{ ГПа}, \quad \mu'_1 = 0,184 \text{ ГПа}, \quad \sigma_{10} = 1,8 \text{ ГПа}, \quad (20)$$

объемным содержанием  $c_1 = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 1,0$  и эпоксидная матрица, которая имеет диаграмму линейного упрочнения (19) с постоянными [1, 7–9]

$$K_2 = 3,33 \text{ ГПа}, \quad \mu_{20} = 1,11 \text{ ГПа}, \quad \mu'_2 = 0,02 \text{ ГПа}, \quad \sigma_{20} = 0,12 \text{ ГПа}. \quad (21)$$

На основе полученных зависимостей были исследованы эффективные диаграммы нелинейного деформирования волокнистого композитного материала при различных объемных концентрациях компонентов в слоях.

В случае, когда задано одноосное растяжение композита

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0, \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0, \quad (22)$$

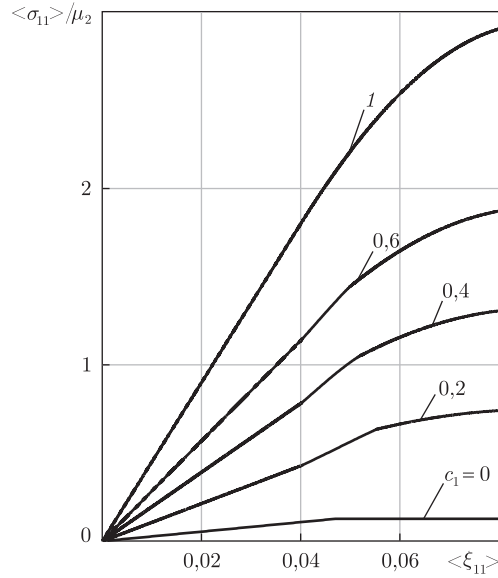


Рис. 2

согласно (11), макронапряжения  $\langle \sigma_{11} \rangle$  композита связаны с макродеформациями  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (23)$$

При этом в уравнениях имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{(\lambda_{13}^*)^2 - \lambda_{12}^* \lambda_{33}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{(\lambda_{12}^* - \lambda_{11}^*) \lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (24)$$

На рис. 2 показаны кривые зависимостей  $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$  от  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  для разных значений объемного содержания волокон  $c_1$ .

В случае, когда задано одноосное растяжение композита

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0, \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0, \quad (25)$$

согласно (11) макронапряжения  $\langle \sigma_{33} \rangle$  композита связаны с макродеформациями  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  соотношением

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \frac{1}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{33} \rangle. \quad (26)$$

При этом в уравнениях имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{-\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \langle \varepsilon_{33} \rangle. \quad (27)$$

На рис. 3 показаны кривые зависимостей  $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$  от  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  для разных значений объемного содержания волокон  $c_1$ .

Как показывают графики, нелинейности деформативных свойств компонентов существенно влияют на деформирование стекловолокнита, а при  $c_1 > 0$  кривые зависимостей

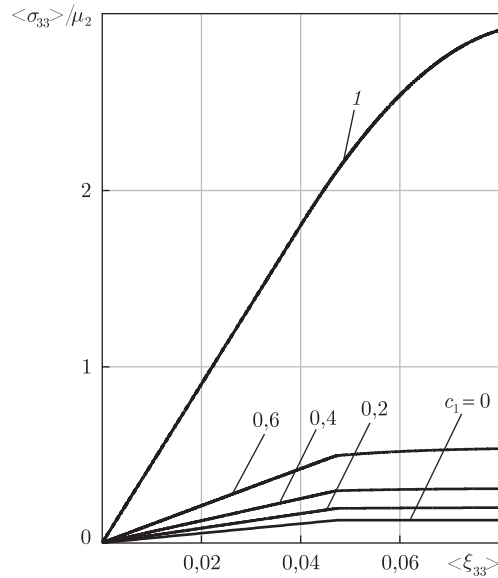


Рис. 3

$\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$  от  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  имеют криволинейный характер, а для зависимости  $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$  от  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  при  $0 < c_1 < 0,4$  кривая деформирования состоит из двух линейных участков.

### Цитированная литература

1. Вулф Б. К., Ромадин К. П. Авиационное материаловедение. – Москва: Машиностроение, 1967. – 422 с.
2. Хорошун Л. П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микро-неоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 2. – С. 3–17.
3. Хорошун Л. П. Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 10. – С. 100–108.
4. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикюла Е. Н., Назаренко Л. В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 389 с. (Механика композитов: в 12-ти т.; Т. 3).
5. Хорошун Л. П., Шикюла Е. Н. Нелинейные деформативные свойства дисперсно-упрочненных материалов // Механика композитных материалов. – 2002. – **38**, № 4. – С. 473–486.
6. Креггерс А. Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433–441.
7. Михеев С. В., Строганов Г. Б., Ромашин А. Г. Керамические и композиционные материалы в авиационной технике. – Москва: Альтекс, 2002. – 276 с.
8. Белов А. Ф., Бенедиктовна Г. П., Висков А. С. и др. Строение и свойства авиационных материалов. – Москва: Металлургия, 1989. – 368 с.
9. Гузь А. Н., Хорошун Л. П., Ванин Г. А. и др. Механика материалов. – Киев: Наук. думка, 1982. – 368 с. (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т. 1).

### References

1. Wulf B. K., Romadin K. P. Aviatcionnoe Materialovedenie, Moscow: Mashinostroenie, 1967 (in Russian).
2. Khoroshun L. P. Int. Appl. Mech., 1978, **14**, No 2: 113–124.
3. Khoroshun L. P. International Applied Mechanics, 1987, **23**, No 10: 989–996.
4. Khoroshun L. P., Maslov B. P., Shikula E. N., Nazarenko L. V. Statisticheskaja Mehanika i Effektivnye Svoystva Materialov, Kiev: Nauk. Dumka, 1993. (Mechanika kompositov: in 12 v.; V. 3) (in Russian).



5. Khoroshun L. P., Shikula E. N. *Mechanika kompositnyh materialov*, 2002, **38**, No 4: 473–486 (in Russian).
6. Kregers A. F. *Mechanika kompositnyh materialov*, 1988, No 3: 433–441 (in Russian).
7. Miheev S. V., Stroganov G. B., Romashin A. G. *Keramicheskie i Kompozitsionnye Materialy v Aviatsionnoj Teshnike*, Moskva: Alteks, 2002 (in Russian).
8. Belov A. F., Benediktova G. P., Viskov A. S. et al. *Stroenie i Svoystva Aviatsionnyh Materialov*, Moskva: Metallurgija, 1989 (in Russian).
9. Guz A. N., Khoroshun L. P. Vanin G. A. et al. *Mechanika Materialov*, Kiev: Naukova Dumka, 1982 (Mechanika kompositnyh materialov i elementov konstruksij: in 3 v.; V. 1) (in Russian).

*Поступило в редакцию 11.12.2015*

Член-корреспондент НАН України **Л. П. Хорошун, О. М. Шикула**

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

*E-mail:* lkhoshun@yandex.ua, ensh@ukr.net

### **Ефективні деформівні властивості волокнистих композитних матеріалів при нелінійному деформуванні компонентів**

*Сформульовано модель нелінійного деформування волокнистих композитних матеріалів при фізично нелінійному деформуванні компонентів. Побудовано алгоритми для визначення ефективних деформівних властивостей волокнистих композитних матеріалів. Досліджено вплив нелінійності деформування компонентів на ефективні деформівні властивості волокнистих композитів.*

**Ключові слова:** волокнисті композити, фізична нелінійність деформування компонентів, ефективні деформативні властивості, вплив нелінійності.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **L. P. Khoroshun, E. N. Shikula**

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

*E-mail:* lkhoshun@yandex.ua, ensh@ukr.net

### **Effective deformation properties of fibrous composite materials under physically nonlinear deformation of components**

*A model of nonlinear deformation of fibrous composite materials under physically nonlinear deformation of components is formulated. Algorithms of determination of effective deformative properties of fibrous composite materials are constructed. Influence of a nonlinearity of the deformation of components on the effective deformative properties of fibrous composite materials is investigated.*

**Keywords:** fiber composites, physically nonlinear deformation of components, effective deformative properties, influence of nonlinearity.