ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2016

МАТЕМАТИКА

http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.07.007
УДК 517.98

Член-кореспондент НАН України **М. Л. Горбачук**[1], **В. М. Горбачук**[2]

[1]Інститут математики НАН України, Київ
[2]НТУ України "Київський політехнічний інститут"

E-mail: valgorbachuk@gmail.com, v.m.horbach@gmail.com

Прямі й обернені теореми теорії наближень розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі

Розглянуто рівняння вигляду $y'(t) = Ay(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, де A — генератор C_0-групи лінійних операторів у банаховому просторі. Наведено прямі й обернені теореми теорії наближень слабких розв'язків цього рівняння цілими розв'язками експоненціального типу, які встановлюють взаємно однозначну відповідність між порядком прямування до нуля найкращого наближення розв'язку і степенем його гладкості.

Ключові слова: банахів простір, диференціальне рівняння у банаховому просторі, слабкий розв'язок, C_0-група лінійних операторів, ціла вектор-функція, ціла вектор-функція експоненціального типу, найкраще наближення, модуль неперервності.

1. Нехай $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ — обмежена C_0-група лінійних неперервних операторів у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|\cdot\|$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, тобто (див. [1]):

(i) $\forall t,\ s \in \mathbb{R}\colon U(t+s) = U(t)U(s)$;
(ii) $\forall f \in \mathfrak{B}\colon U(t)f \to f$ при $t \to 0$;
(iii) $\|U(t)\| \leqslant c$, $t \in \mathbb{R}$, $c > 0$ — стала.

Введенням нової норми в $\mathfrak{B}$, еквівалентної вихідній, можна добитися, щоб $\|U(t)\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$, а тому надалі групу $\{U(t)\}_{t\mathbb{R}}$ вважатимемо ізометричною. Позначимо через A її генератор, а через $C_{\{1\}}(A)$ — множину його цілих векторів експоненціального типу:

$$C_{\{1\}}(A) = \left\{ f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n) \mid \exists c = c(f) > 0, \exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}\colon \|A^n f\| \leqslant c\alpha^n \right\}$$

($\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора). Величину

$$\sigma(f, A) = \inf\{\alpha > 0\colon \|A^n f\| \leqslant c\alpha^n\ (n \in \mathbb{N}_0, c = c(f))\}$$

називатимемо типом вектора $f \in C_{\{1\}}(A)$ відносно оператора A. Як показано в [2], у випадку, коли A — генератор обмеженої C_0-групи, множина $C_{\{1\}}(A)$ є щільною в $\mathfrak{B}$.

Розглянемо тепер рівняння

$$y'(t) = Ay(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Під слабким розв'язком рівняння (1) розумітимемо неперервну вектор-функцію $y(t)\colon \mathbb{R} \mapsto \mapsto \mathfrak{B}$ таку, що $\int\limits_0^t y(s)\,ds \in \mathcal{D}(A)$ для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ і яка задовольняє рівняння

$$y(t) = A\int\limits_0^t y(s)\,ds + y(0).$$

Множину всіх слабких розв'язків рівняння (1) позначимо через S. Відомо (див. [3]), що

$$S = \{y(t)\colon \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B} \mid y(t) = U(t)f,\ f \in \mathfrak{B}\}, \tag{2}$$

тоді як множина сильних (або просто) розв'язків описується формулою (2), де f перебігає всю множину $\mathcal{D}(A)$. Неважко переконатися, що S — банахів простір відносно норми $\|y\|_S = = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|U(t)f\|$.

Якщо оператор A обмежений, то будь-який слабкий розв'язок рівняння (1) допускає продовження до цілої $\mathfrak{B}$-значної вектор-функції експоненціального типу

$$\sigma(y) = \inf\{\alpha > 0\colon \|y(t)\| \leqslant ce^{\alpha t}\} \leqslant \|A\|.$$

Це не так у випадку необмеженого A. Множина S_0 усіх слабких розв'язків, що мають таку властивість, описується нижченаведеною теоремою.

Теорема 1. *Слабкий розв'язок $y(t)$ рівняння (1) належить до множини S_0 тоді і тільки тоді, коли його можна зобразити у вигляді*

$$y(t) = U(t)f, \qquad f \in C_{\{1\}}(A).$$

Ця множина є щільною в просторі S і $\sigma(y) = \sigma(f, A)$. Більш того, для $y \in S_0$ має місце аналог нерівності Бернштейна

$$\|y^{(k)}\|_S \leqslant \sigma^k(y)\|y\|_S.$$

З огляду на цю теорему природно постає питання про можливість наближення довільного слабкого розв'язку рівняння (1) цілими розв'язками експоненціального типу. Нижче дається відповідь на це питання, а саме, установлюються прямі й обернені теореми, в яких з'ясовується зв'язок між степенем гладкості розв'язку і порядком прямування до нуля його найкращого наближення. Важливу роль при цьому відіграє операторний підхід до задач апроксимації, розвинутий в [4–6].

2. Для $y \in S$ покладемо

$$\mathcal{E}_r(y) = \inf_{z\in S_0:\sigma(z)\leqslant r} \|y - z\|_S \qquad (r > 0).$$

Отже, $\mathcal{E}_r(y)$ — найкраще наближення слабкого розв'язку $y(t)$ рівняння (1) цілими його розв'язками $z(t)$ експоненціального типу, тип яких не перевищує r. При фіксованому y функція $\mathcal{E}_r(y)$ не зростає і, оскільки $\overline{S_0} = S$, $\mathcal{E}_r(y) \to 0$ при $r \to \infty$.

Для довільних $t > 0$ і $k \in \mathbb{N}$ позначимо через $\omega_k(t, y)$ модуль неперервності порядку k вектор-функції $y \in S$:

$$\omega_k(t, y) = \sup_{|h|<t} \sup_{s\in\mathbb{R}} \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j y(s + jh) \right\|, \qquad \omega_0(t, y) = \|y(t)\|.$$

Виходячи з (2), приходимо до висновку, що

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \colon \omega_k(t, y) = \sup_{|\tau|<t} \|(U(\tau) - I)^k y\|_S.$$

Нижчесформульована теорема установлює зв'язок між $\mathcal{E}_r(y)$ та $\omega_k(t, y)$, який по суті є аналогом нерівності Джексона при наближенні неперервної періодичної функції тригонометричними поліномами.

Теорема 2. *Нехай $y \in S$. Тоді*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \exists c_k \colon \quad \mathcal{E}_r(y) \leqslant c_k \omega_k\left(\frac{1}{r}, y\right) \qquad (r > 0).$$

Позначимо через $C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ множину всіх m разів неперервно диференційовних $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій на $\mathbb{R}$. Замкненість оператора A і включення $y \in S \bigcap C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ зумовлюють включення $y^{(k)} \in S$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Якщо $f \in \mathcal{D}(A^m)$, то

$$\forall t \in \left(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right) \colon \quad \|(U(t) - I)^{m+k} f\| \leqslant \frac{1}{r^m} \|(U(t) - I)^k A^m f\|$$

(I — тотожний оператор). З цієї нерівності і теореми 2 випливає

Теорема 3. *Припустимо, що $y \in S \bigcap C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Тоді*

$$\forall m, k \in \mathbb{N}_0, \qquad \forall r > 0 \colon \quad \mathcal{E}_r(y) \leqslant \frac{c_k}{r^m} \omega_k\left(\frac{1}{r}, y^{(m)}\right)$$

(сталі c_k такі самі, як у теоремі 2).

Покладаючи в теоремі 3 $k = 0$ і враховуючи, що $\omega_0(t, y) = \|y(t)\|$, одержуємо

Наслідок 1. *Нехай $y \in S \bigcap C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $m \in \mathbb{N}_0$. Тоді*

$$\forall r > 0 \colon \quad \mathcal{E}_r(y) \leqslant \frac{c_0}{r^m} \|y^{(m)}\|.$$

Зазначимо, що з нерівності $\mathcal{E}_r(y) \leqslant \dfrac{c}{r^m}$, $r > 0$, ще не випливає, що $y \in C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Проте має місце таке твердження, обернене до теореми 3.

Теорема 4. *Нехай $\omega(t)$ — функція типу модуля неперервності, тобто:*

1) $\omega(t)$ є неспадною неперервною функцією на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$;

2) $\omega(0) = 0$;

3) $\exists \gamma > 0$, $\forall t \in [0, 1] \colon \omega(2t) < \gamma \omega(t)$;

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty.$

Якщо для $y \in S$ *існують стала* $c > 0$ *і* $m \in \mathbb{N}$ *такі, що*

$$\mathcal{E}_r(y) \leqslant \frac{c}{r^m}\omega\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (\forall r > 0),$$

то $y \in C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *і*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \forall t \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad \exists c_k > 0\colon \quad \omega_k(t, y) \leqslant c_k\left(t^k \int_0^t \frac{\omega(s)}{s}\,ds + \int_t^1 \frac{\omega(s)}{s^{k+1}}\,ds\right).$$

Наслідок 2. *Нехай* $y \in S$ *і*

$$\exists \varepsilon > 0, \qquad \exists c > 0\colon \quad \mathcal{E}_r(y) \leqslant \frac{c}{r^{m+\varepsilon}}.$$

Тоді $y \in C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Позначимо через $C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ множину всіх нескінченно диференційовних $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій на $\mathbb{R}$.

Наслідок 3. *Має місце таке співвідношення еквівалентності:*

$$y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\colon \quad \mathcal{E}_r(y) = o\left(\frac{1}{r^k}\right).$$

3. У випадку, коли $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ — гільбертів простір, групу $\{U(t)\}_{t\mathbb{R}}$ можна вважати унітарною, оскільки (див. [7]) для будь-якої обмеженої групи в $\mathfrak{H}$ можна підібрати в цьому просторі скалярний добуток, еквівалентний вихідному, так, щоб відносно нього розглядувана група була саме такою. За теоремою Стоуна її генератор має вигляд $A = iB$, де B — самоспряжений оператор. Позначимо через $E(\Delta)$ його спектральну міру. Як показано у [8],

$$C_{\{1\}}(A) = \{f \in \mathfrak{H} \mid f = E([-\alpha, \alpha])g,\ \forall \alpha > 0, \forall g \in \mathfrak{H}\}.$$

У цьому випадку можна явно виписати сталі c_k, що фігурують в теоремах 2 і 3, а саме: $c_k = \sqrt{k+1}/2^k$. Більш того, сформульовані вище прямі й обернені теореми для розв'язків скінченної гладкості можна поширити на розв'язки, що належать деяким класам нескінченно диференційовних $\mathfrak{H}$-значних вектор-функцій. Перейдемо до результатів, отриманих у цьому напрямку.

Нехай $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ — неспадна послідовність додатних чисел (не обмежуючи загальності, можна завжди припустити, що $m_0 = 1$). Покладемо

$$C_{\{m_n\}} = C_{\{m_n\}}(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) = \bigcup_{\alpha>0} C^\alpha_{m_n}, \qquad C_{(m_n)} = C_{(m_n)}(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) = \bigcap_{\alpha>0} C^\alpha_{m_n},$$

де

$$C^\alpha_{m_n} = C^\alpha_{m_n}(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) = \{y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) \big| \exists c = c(y),\ \forall k \in \mathbb{N} : \|y^{(k)}\|_S \leqslant c\alpha^k m_k\} \text{ —}$$

банахів простір відносно норми

$$\|y\|_{C^{\alpha}_{m_n}} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\|y^{(k)}\|_S}{\alpha^k m_k}.$$

У просторі $C_{\{m_n\}}$ ($C_{(m_n)}$) вводиться топологія індуктивної (проективної) границі банахових просторів $C^{\alpha}_{m_n}$. Зауважимо, що простори $C_{\{n!\}}$, $C_{(n!)}$ ($m_n = n!$) та $C_{\{1\}}$ ($m_n \equiv 1$) є не що інше, як простори обмежених на $\mathbb{R}$ аналітичних, цілих та цілих експоненціального типу $\mathfrak{H}$-значних вектор-функцій.

Припустимо, що послідовність $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовольняє умову

$$\forall\alpha > 0, \qquad \exists c = c(\alpha) > 0\colon \quad m_n \geqslant c\alpha^n, \tag{3}$$

і розглянемо функцію

$$p(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{m_n}.$$

Внаслідок (3) ця функція є цілою, $p(\lambda) \geqslant 1$ при $\lambda > 0$ і $p(\lambda) \uparrow \infty$ при $\lambda \to \infty$.

Теорема 5. *Нехай додатково послідовність $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ має властивість*

$$\exists c > 0, \qquad \exists h > 1\colon \quad m_{n+1} \leqslant ch^n m_n.$$

Тоді виконуються такі співвідношення еквівалентності:

$$y \in C_{\{m_n\}} \Longleftrightarrow \exists\alpha > 0\colon \quad \mathcal{E}_r(y) = O(p^{-1}(\alpha r));$$

$$y \in C_{(m_n)} \Longleftrightarrow \forall\alpha > 0\colon \quad \mathcal{E}_r(y) = O(p^{-1}(\alpha r)).$$

У випадку, коли $m_n = n^{n\beta}$, $0 < \beta < \infty$, з теореми 5 випливає

Наслідок 4. *Мають місце співвідношення*

$$y \in C_{\{n^{n\beta}\}} \Longleftrightarrow \exists\alpha > 0\colon \quad \mathcal{E}_r(y) = O(e^{-\alpha r^{1/\beta}});$$

та

$$y \in C_{(n^{n\beta})} \Longleftrightarrow \forall\alpha > 0\colon \quad \mathcal{E}_r(y) = O(e^{-\alpha r^{1/\beta}}).$$

Нагадаємо, що ціла $\mathfrak{H}$-значна вектор-функція $x(\lambda)$ є скінченного порядку росту, якщо

$$\exists\gamma > 0\colon \quad \|x(\lambda)\| \leqslant \exp(|\lambda|^{\gamma}).$$

Точна нижня межа $\rho(x)$ таких γ називається порядком $x(\lambda)$. З наслідка 4 випливає таке твердження.

Наслідок 5. *Розв'язок $y \in S$ рівняння (1) допускає продовження до цілої $\mathfrak{H}$-значної вектор-функції порядку ρ і скінченного типу тоді і тільки тоді, коли*

$$\exists\alpha > 0\colon \quad \mathcal{E}_r(y) = O(e^{-\alpha r^{1/\beta}}),$$

де ρ і β пов'язані між собою рівністю $\beta = (\rho - 1)/\rho < 1$.

4. Результати п. 2 можна в певному сенсі поширити на випадок, коли генератор A групи $\{U(t)\}_{t\mathbb{R}}$ є неквазіаналітичним, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \|U(t)\|}{1+t^2}\, dt < \infty.$$

За цієї умови, як показано у [8], множина всіх цілих векторів експоненціального типу оператора A є щільною в $\mathfrak{B}$. Оскільки в цьому випадку група $\{U(t)\}_{t\mathbb{R}}$ може бути необмеженою, то наближення $y \in S$ розв'язками з S_0 проводиться не на $\mathbb{R}$, а на довільному скінченному проміжку $[-b, b]$, при цьому норма в S визначається як

$$\|y\|_{S,b} = \sup_{|t|\leqslant b} \|y(t)\|,$$

а в означеннях величин $\mathcal{E}_r(y)$ та $\omega_k(t, y)$ замість норми $\|\cdot\|_S$ фігурує $\|\cdot\|_{S,b}$. Теореми 2–4 та наслідки 1, 2 залишаються вірними, лише сталі c_k в них тепер залежать від b: $c_k = c_k(b)$.

Цитована література

1. *Хилле Э., Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
2. *Радыно Я. В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 9. – С. 215–229.
3. *Ball J. M.* Continuity properties of nonlinear semigroups // J. Funct. Anal. – 1974. – **17**, No 1. – P. 91–103.
4. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 4. – С. 118–178.
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Операторный подход к задачам аппроксимации // Алгебра и анализ. – 1997. – **9**, вып. 6. – С. 90–108.
6. *Горбачук М. Л., Грушка Я. І., Торба С. М.* Прямі й обернені теореми в теорії наближень методом Рітца // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5. – С. 633–643.
7. *de Sz.-Nagy B.* On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space // Acta Sci. Math. (Szeged.) – 1947. – **11**, No 3. – P. 152–157.
8. *Горбачук М. Л.* Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 596–607.

References

1. *Hille E., Phillips R. S.* Functional Analysis and Semi-Groups, Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962 (in Russian).
2. *Radyno Ya. V.* Dokl. AN BSSR, 1983, **27**, No 9: 215–229 (in Russian).
3. *Ball J. M.* J. Funct. Anal., 1974, **17**, No 1: 91–103.
4. *Kupcov N. P.* Uspekhi Mat. Nauk, 1968, **23**, Iss. 4: 118–178 (in Russian).
5. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Algebra and Analysis, 1997, **9**, Iss. 6: 90–108 (in Russian).
6. *Gorbachuk M. L., Grushka Ya. I., Torba S. M.* Ukrain. Mat. Zh., 2005, **57**, No 5: 633–643 (in Ukrainian).
7. *de Sz.-Nagy B.* Acta Sci. Math., 1947, **11**, No 3: 152–157.
8. *Gorbachuk M. L.* Ukrain. Mat. Zh., 2000, **52**, No 5: 596–607 (in Ukrainian).

Надійшло до редакції 26.01.2016

Член-корреспондент НАН Украины **М. Л. Горбачук**[1], **В. М. Горбачук**[2]

[1]Институт математики НАН Украины, Киев
[2]НТУ Украины “Киевский политехнический институт”

E-mail: valgorbachuk@gmail.com, v. m.horbach@gmail.com

Прямые и обратные теоремы теории приближений решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

Рассмотрено уравнение вида $y'(t) = Ay(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, где A — генератор C_0-группы линейных операторов в банаховом пространстве. Представлены прямые и обратные теоремы теории приближений слабых решений этого уравнения целыми решениями экспоненциального типа, которые устанавливают взаимно однозначное соответствие между порядком стремления к нулю наилучшего приближения решения и степенью его гладкости.

Ключевые слова: банахово пространство, дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, слабое решение, C_0-группа линейных операторов, целая вектор-функция, целая вектор-функция экспоненциального типа, наилучшее приближение, модуль непрерывности.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. L. Gorbachuk**[1], **V. M. Gorbachuk**[2]

[1]Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
[2]NTU of Ukraine “Kiev Polytechnic Institute”

E-mail: valgorbachuk@gmail.com, v. m.horbach@gmail.com

The direct and inverse theorems of the approximation theory for solutions of differential equations in a Banach space

An equation of the form $y'(t) = Ay(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, where A is the generator of a C_0-group of linear operators on a Banach space, is considered. The direct and inverse theorems of the theory of approximation of weak solutions of this equation by entire solutions of exponential type, which establish the one-to-one correspondence between the order of convergence to zero of the best approximation of a solution and its smoothness degree, are presented.

Keywords: Banach space, differential equation in a Banach space, weak solution, C_0-group of linear operators, entire vector-valued function, entire vector-valued function of exponential type, the best approximation, continuity module.