http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.09.014
УДК 519.21

В. А. Кузнецов

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: vasylkuz@mail.ru

Предельное распределение взаимных углов обхода частиц в броуновском стохастическом потоке со старшим показателем Ляпунова, равным нулю

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Н. И. Портенко)

Исследование геометрических свойств траекторий частиц в стохастических потоках приводит к изучению предельного поведения их взаимных углов обхода. Автор решает эту задачу в случае изотропных броуновских стохастических потоков со старшим показателем Ляпунова, равным нулю.

Ключевые слова: броуновские стохастические потоки, углы обхода, показатели Ляпунова.

1. Предварительные замечания. Задача об асимптотическом поведении взаимных углов обхода независимых двумерных броуновских движений была решена в статье [1]. В настоящей работе приводится решение соответствующей задачи для частиц, движущихся в броуновском стохастическом потоке. Броуновские стохастические потоки возникли в работах [2–4] как модели турбулентного течения жидкости.

Определение 1 [5]. Стохастическим потоком гомеоморфизмов в пространстве $\mathbb{R}^d$ называется семейство случайных отображений $F_{s,t} = F_{s,t}(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, 0 \leqslant s \leqslant t$, обладающих на некотором множестве Ω_0 с $P(\Omega_0) = 1$ следующими свойствами:

1) поле $\varphi(s, t, x) = F_{s,t}(\omega, x)$ является непрерывным по совокупности параметров s, t, x;

2) все отображения $F_{s,t}$ являются гомеоморфизмами $\mathbb{R}^d$;

3) при каждом $s \geqslant 0$ имеет место $F_{s,s} = Id$, т.е. отображение $F_{s,s}$ является тождественным;

4) при любых $s < t < u$ выполняется соотношение $F_{t,u} \circ F_{s,t} = F_{s,u}$.

Определение 2 [5]. Броуновским стохастическим потоком в $\mathbb{R}^d$ называется стохастический поток гомеоморфизмов $F_{s,t}$ со следующим свойством: при любых $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n$ отображения $F_{s_1,s_2}, F_{s_2,s_3}, \ldots, F_{s_{n-1},s_n}$ независимы.

Согласно [5], броуновский стохастический поток $F_{s,t}$, удовлетворяющий определенным условиям регулярности, можно задать как решение стохастического дифференциального уравнения

$$dF_{s,t}(x) = U(F_{s,t}(x), dt), \quad F_{s,s}(x) = x, \tag{1}$$

где U – некоторый непрерывный гауссовский семимартингал с пространственным параметром [5]. Уравнение (1) следует понимать как сокращенную запись соотношения

$$F_{s,t}(x) = x + \int_s^t U(F_{s,r}(x), dr),$$

а последний интеграл определяется как интеграл по семимартингалу с пространственным параметром [5].

Важный класс потоков составляют однородные изотропные броуновские потоки, возникшие при изучении наиболее простой модели турбулентности – изотропной турбулентности. В этой модели распределение поля скоростей жидкости инвариантно относительно параллельных переносов, поворотов и отражений.

Сначала введем, следуя работе [6], определение однородности и изотропности для гауссовских случайных полей на $\mathbb{R}^d$. Пусть $a(x, y) = (a_{kl}(x, y))_{1 \leqslant k,l \leqslant d}$ – ковариационная матрица компонент центрированного гауссовского поля V, т.е.

$$\mathbb{E} V_k(x) V_l(y) = a_{kl}(x, y).$$

Поле V однородно, если $a_{kl}(x, y)$ зависит лишь от разности $x - y$:

$$\mathbb{E} V_k(x) V_l(y) = a_{kl}(x, y) = b_{kl}(x - y), \quad k, l = 1, \ldots, d.$$

Далее, однородное поле V изотропно, если матричнозначная функция $b(z) = (b_{kl}(z))$ удовлетворяет соотношению

$$G b(G^{-1} z) G^{-1} = b(z) \tag{2}$$

для всех ортогональных матриц G и для всех $z \in \mathbb{R}^d$.

Определения однородности и изотропности можно дать и для броуновских стохастических потоков. Однородный броуновский стохастический поток описывается уравнением (1), в котором U – центрированное гауссовское случайное поле, удовлетворяющее соотношению

$$\mathbb{E} U_k(x, t) U_l(y, s) = b_{kl}(x - y) \min\{t, s\}, \quad k, l = 1, \ldots, d.$$

Здесь $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, +\infty)$, $b(z) = (b_{kl}(z), 1 \leqslant k, l \leqslant d)$ – некоторая матричнозначная функция. Однородный броуновский поток называется изотропным, если соответствующая матричнозначная функция $b = b(z)$ удовлетворяет соотношению (2) для каждого $z \in \mathbb{R}^d$ и каждой ортогональной матрицы G. Заметим, что это условие эквивалентно существованию однородного изотропного поля $V = V(z)$, для которого $b_{kl}(z) = \operatorname{cov}(V_k(x), V_l(x + z))$ при всех $x, z \in \mathbb{R}^d$.

Условие изотропности накладывает ограничения на вид матричнозначной функции *b(z)*. Полное описание ковариационных функций компонент изотропных случайных полей было получено в работе А. М. Яглома [7]. Мы приведем результат для случая двумерного броуновского потока ($d = 2$), следуя работе [6]. В этом случае вид матрицы b описывается следующим утверждением.

Утверждение 1 [6]. *Если матричнозначная функция $b = (b_{kl}(z), 1 \leqslant k, l \leqslant 2)$ является ковариационной матрицей компонент некоторого однородного изотропного случайного поля f, то она имеет вид*

$$b_{kl}(z) = \delta_{kl} b_N(\|z\|) + \frac{z^k z^l}{\|z\|^2}(b_L(\|z\|) - b_N(\|z\|)).$$

Здесь $b_L, b_N\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ – некоторые функции, которые можно представить в виде

$$b_L(r) = \int_0^\infty J_1'(r\alpha)\Phi_P(d\alpha) + \int_0^\infty \frac{J_1(r\alpha)}{r\alpha}\Phi_S(d\alpha), \tag{3}$$

$$b_N(r) = \int_0^\infty \frac{J_1(r\alpha)}{r\alpha}\Phi_P(d\alpha) + \int_0^\infty J_1'(r\alpha)\Phi_S(d\alpha), \tag{4}$$

для некоторых конечных мер Φ_P, Φ_S на $[0,+\infty)$; J_1 – функция Бесселя первого рода.

При определенных дополнительных предположениях функции b_L и b_N являются достаточно гладкими. В этом случае, согласно результатам [5], поток $F_{s,t}$ является потоком диффеоморфизмов. Это дает возможность говорить о показателях Ляпунова λ_1, λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2)$ потока F. Эти показатели, как было показано в работе [8], выражаются через функции b_L и b_N. Так, имеет место следующий результат.

Утверждение 2 [6]. *Пусть $U(x,t), x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0$ – гауссовское векторное поле со значениями в $\mathbb{R}^2$, задающее однородный изотропный броуновский поток F. Предположим, что меры Φ_P, Φ_S в представлениях (3), (4) из утверждения 1 имеют конечный четвертый момент. Тогда функции b_L, b_N четырежды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют следующим асимптотическим соотношениям:*

$$b_L(r) = b_0 - \frac{1}{2}\beta_L r^2 + O(r^4), \quad r \to 0, \tag{5}$$

$$b_N(r) = b_0 - \frac{1}{2}\beta_N r^2 + O(r^4), \quad r \to 0, \tag{6}$$

где $b_L(0) = b_N(0) = b_0$, и

$$\beta_L = \frac{3}{8}\int_0^\infty \alpha^2\Phi_P(d\alpha) + \frac{1}{8}\int_0^\infty \alpha^2\Phi_S(d\alpha),$$

$$\beta_N = \frac{1}{8}\int_0^\infty \alpha^2\Phi_P(d\alpha) + \frac{3}{8}\int_0^\infty \alpha^2\Phi_S(d\alpha).$$

При этом показатели Ляпунова равны

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\beta_N - \beta_L), \quad \lambda_2 = -\beta_L.$$

Показатели Ляпунова определяют асимптотическое поведение расстояния между частицами в потоке. Так, имеют место следующие результаты, полученные в работах [3, 9].

Теорема 1. *Для двумерного однородного изотропного броуновского стохастического потока имеют место следующие варианты асимптотического поведения $R_{ab}(t) = \|F_t(a) - F_t(b)\|$ расстояния между частицами, вышедшими из двух произвольных различных точек плоскости a и b, в зависимости от максимального показателя Ляпунова λ_1:*

1. Если $\lambda_1 < 0$, то $R_{ab}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ почти наверное.

2. Если $\lambda_1 \geqslant 0$, то $R_{ab}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ по вероятности.

Замечание 1. Мы обозначаем $F_t(x) = F_{0,t}(x)$.

Заметим, что изучение траекторий частиц, движущихся под действием потока жидкости, может быть использовано для анализа свойств самого потока. Этот подход применяется в работе [10]. Поэтому представляет интерес описание различных геометрических характеристик системы частиц, движущихся под воздействием стохастического потока. Одной из таких характеристик являются взаимные углы обхода частиц вокруг друг друга. Мы приводим решение задачи об асимптотическом распределении взаимных углов обхода частиц в броуновском стохастическом потоке. Точная формулировка полученного результата приводится в п. 2. Для независимых броуновских движений аналогичная задача была решена в статье [1]. В этой работе был получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $w_1, \ldots w_n$ – независимые двумерные стандартные броуновские движения, выходящие из попарно различных точек плоскости. Тогда для углов обхода $\Phi_{kl}(t)$ траектории броуновского движения w_k вокруг броуновского движения w_l справедливо асимптотическое соотношение*

$$\left(\frac{2}{\ln t}\Phi_{kl}(t), 1 \leqslant k < l \leqslant n\right) \xrightarrow[t\to\infty]{d} (\xi_{kl}, 1 \leqslant k < l \leqslant n)\,.$$

Здесь $\xi_{kl}, 1 \leqslant k < l \leqslant n$, – независимые в совокупности случайные величины, имеющие распределение Коши с параметром 1.

В настоящей работе показано, что то же самое предельное соотношение выполнено для траекторий частиц в броуновском стохастическом потоке, в котором функции b_L и b_N совпадают: $b_L \equiv b_N$. Как и в рассмотренном в работе [1] случае независимых броуновских движений, доказательство использует оценку на рост совместной характеристики углов обхода частиц $\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t$. Но если в случае независимых броуновских движений эта оценка может быть проведена за счет явного нахождения математического ожидания $\mathbb{E}\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t$, то в нашем случае изучение асимптотического поведения $\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t$ гораздо более сложно. Основная сложность состоит в том, что движения различных частиц в потоке теперь не являются независимыми. Вместо использования понятия независимости приходится проводить рассуждения, основанные на понятии ортогональности мартингалов.

Замечание 2. Естественно ожидать, что полученный нами результат выполнен в более общем случае броуновского потока со старшим показателем Ляпунова, равным нулю. Однако рассмотрение этого случая технически более сложно и требует дальнейшего исследования.

2. Основной результат.

Теорема 3. *Пусть F – однородный изотропный броуновский стохастический поток, задаваемый стохастическим дифференциальным уравнением*

$$dF_t(x) = U(F_t(x), dt),$$

$x \in \mathbb{R}^2, t \geqslant 0$, где $U = U(x,t)$ – центрированное гауссовское случайное векторное поле с

$$\mathbb{E}\, U_k(x,t)U_l(y,s) = b_{kl}(x-y)t \wedge s,$$

а матрица b имеет вид $b(z) = (b_{kl}(z)) = (\delta_{kl} b_L(\|z\|))$, $1 \leqslant k, l \leqslant 2$, $b_L \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ – некоторая функция, удовлетворяющая условиям

$b_0 = b_L(0) = 1;$

$b_L(r) < 1$ *при* $r > 0;$

$b_L \in C^{(4)}(\mathbb{R});$

$b_L(r) \to 0 \quad (r \to \infty);$

$$\int\limits_0^\infty r|b_L'(r)|dr < \infty;$$

$$\int\limits_0^\infty r|b_L'(r) - rb_L''(r)|dr < \infty;$$

$b_L(r) = 1 - \frac{1}{2}\beta_L r^2 + O(r^4)$, $r \to 0+$ *для некоторого* $\beta_L > 0$.

Пусть $F_t(x_1), \ldots, F_t(x_n)$ – траектории потока F, выходящие из попарно различных точек плоскости $x_1, \ldots, x_n$. Тогда для углов обхода $\Phi_{kl}(t)$ траектории $F_t(x_k)$ вокруг траектории $F_t(x_l)$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\left(\frac{2}{\ln t}\Phi_{kl}(t), 1 \leqslant k < l \leqslant n\right) \xrightarrow[t\to\infty]{d} (\xi_{kl}, 1 \leqslant k < l \leqslant n).$$

Здесь $\xi_{kl}, 1 \leqslant k < l \leqslant n$, – независимые в совокупности случайные величины, имеющие рас пределение Коши с параметром 1.

Для дальнейших рассмотрений нам понадобится следующее определение.

Определение 2. Броуновским движением, ассоциированным с непрерывным локальным мартингалом M, называется такое броуновское движение β, что при всех $t \geqslant 0$ с вероятностью 1 выполнено соотношение $M_t = \beta(\langle M \rangle_t)$.

Заметим, что такое броуновское движение существует в силу известного результата Дэмбиса–Дубинса–Шварца (см. теорему 18.4 в [11]).

Для доказательства теоремы 3 используется следующее утверждение из [12].

Теорема 4. *Пусть $(M_j^n, 1 \leqslant j \leqslant m)$ – последовательность m-компонентных наборов непрерывных локальных мартингалов таких, что*

$$\forall j, n \ \ \langle M_j^n \rangle_\infty = \infty,$$

и для любой пары различных индексов j, k существует последовательность положительных случайных величин H_n таких, что

$$\langle M_j^n \rangle_{H_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \infty, \ \langle M_k^n \rangle_{H_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \infty,$$

$$\int\limits_0^{H_n} |d\langle M_j^n, M_k^n \rangle_s| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0,$$

здесь через $\int\limits_0^t |df(s)|$ мы обозначаем полную вариацию функции f на $[0,t]$. Тогда при $n \to \infty$ броуновские движения β_j^n, ассоциированные с M_j^n, асимптотически независимы, т.е.

$(\beta_j^n, 1 \leqslant j \leqslant m) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\beta_j^\infty, 1 \leqslant j \leqslant m)$, *где* $\beta_j^\infty, 1 \leqslant j \leqslant m$, *– независимые броуновские движения.*

Поясним, как применяется теорема 4 для получения нашего результата в случае $m = 3$, когда рассматриваются три траектории потока F (схема рассуждений в общем случае остается такой же). Пусть a, b, c – попарно различные точки плоскости, $\Phi_{ab}(t)$ – угол обхода $F_t(b)$ вокруг $F_t(a)$, $\Phi_{ac}(t)$ определяется аналогично, $R_{ab}(t)$ – расстояние между частицами a и b в момент времени t. Для применения теоремы 4 нужно показать, что совместные характеристики

$$\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t, \langle \ln R_{ab}, \ln R_{ac}\rangle_t, \langle \Phi_{ab}, \ln R_{ab}\rangle_t, \tag{7}$$

$$\langle \Phi_{ac}, \ln R_{ac}\rangle_t, \langle \ln R_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t, \langle \ln R_{ac}, \Phi_{ab}\rangle_t, \tag{8}$$

в определенном смысле, растут по времени t намного медленнее, чем характеристики

$$\langle \Phi_{ab}\rangle_t = \langle \ln R_{ab}\rangle_t, \quad \langle \Phi_{ac}\rangle_t = \langle \ln R_{ac}\rangle_t.$$

Так, можно проверить, что $\dfrac{\langle \Phi_{ab}\rangle_t}{(\ln t)^2}$ сходится по распределению при $t \to \infty$ к некоторой положительной с вероятностью 1 случайной величине, а

$$\frac{\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t\to\infty]{P} 0;$$

остальные характеристики в (7), (8) оцениваются аналогично.

Последующие рассуждения аналогичны проведенным в статье [12] для исследования асимптотического распределения углов обхода двумерного броуновского движения вокруг нескольких точек плоскости. Полученные оценки на характеристики дают возможность применить теорему 4 к последовательности локальных мартингалов

$$\frac{\ln R_{ab}}{h_n}, \frac{\ln R_{ac}}{h_n}, \frac{\Phi_{ab}}{h_n}, \frac{\Phi_{ac}}{h_n},$$

h_n – некоторая возрастающая бесконечно большая последовательность положительных чисел. Таким образом, мы имеем асимптотическую независимость наборов

$$(\beta_{ab}^{(h_n)}, \beta_{ac}^{(h_n)}, \gamma_{ab}^{(h_n)}, \gamma_{ac}^{(h_n)}),$$

полученных из ассоциированных с локальными мартингалами $\ln R_{ab}, \ln R_{ac}, \Phi_{ab}, \Phi_{ac}$ броуновских движений

$$(\beta_{ab}, \beta_{ac}, \gamma_{ab}, \gamma_{ac})$$

с помощью перемасштабирования:

$$\beta_{ab}^{(h_n)}(t) = \frac{1}{h_n}\beta_{ab}(h_n^2 t), \quad \beta_{ac}^{(h_n)}(t) = \frac{1}{h_n}\beta_{ac}(h_n^2 t),$$

$$\gamma_{ab}^{(h_n)}(t) = \frac{1}{h_n}\gamma_{ab}(h_n^2 t), \quad \gamma_{ac}^{(h_n)}(t) = \frac{1}{h_n}\gamma_{ac}(h_n^2 t).$$

Итак, мы получаем слабую сходимость последовательности

$$(\beta_{ab}^{(h_n)}, \beta_{ac}^{(h_n)}, \gamma_{ab}^{(h_n)}, \gamma_{ac}^{(h_n)})$$

к набору независимых броуновских движений. В то же время значения углов обхода $\Phi_{ab}(t), \Phi_{ac}(t)$ в моменты $T_{ab}(e^{h_n}) = \inf\{t\colon R_{ab}(t) = e^{h_n}\}$, $T_{ac}(e^{h_n}) = \inf\{t\colon R_{ac}(t) = e^{h_n}\}$ выхода $R_{ab}(t), R_{ac}(t)$ на уровень e^{h_n} выражаются через броуновские движения

$\beta_{ab}^{(h_n)}, \beta_{ac}^{(h_n)}, \gamma_{ab}^{(h_n)}, \gamma_{ac}^{(h_n)}$,

$$\frac{\Phi_{ab}(T_{ab}(e^{h_n}))}{h_n} = \gamma_{ab}^{(h_n)}(\inf\{u : \beta_{ab}^{(h_n)}(u) = 1\}),$$

$$\frac{\Phi_{ac}(T_{ac}(e^{h_n}))}{h_n} = \gamma_{ac}^{(h_n)}(\inf\{u : \beta_{ac}^{(h_n)}(u) = 1\}).$$

Отсюда и из того, что $\Phi_{ab}(e^{2h_n})$, $\Phi_{ac}(e^{2h_n})$ хорошо приближаются случайными величинами $\Phi_{ab}(T_{ab}(e^{h_n}))$, $\Phi_{ac}(T_{ac}(e^{h_n}))$, уже получается соотношение

$$\left(\frac{\Phi_{ab}(e^{2h_n})}{h_n}, \frac{\Phi_{ac}(e^{2h_n})}{h_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\xi_1, \xi_2),$$

где ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины со стандартным распределением Коши.

Наиболее технически сложным моментом доказательства является оценка характеристики $\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_t$. Приведем схему соответствующих рассуждений.

Фиксируем функцию f такую, что

$$f(t) \to \infty (t \to \infty);$$

$$f(t) = o(\ln\ln\ln\ln t)(t \to \infty).$$

Выделим компоненту траектории $F_t(c)$, ортогональную к $F_t(a), F_t(b)$. А именно, представим $F_t(c)$ в виде

$$F_t(c) = \xi_t + \zeta_t,$$

где ξ_t измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{F}^{ab} = \sigma\{F_s(a), F_s(b) \mid 0 \leqslant s < \infty\}$, порожденной движениями стартовавших из a и b частиц, а $\zeta = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$ – ортогональный к $F(a)$, $F(b)$ локальный мартингал. Точнее говоря, пусть

$$\xi_t = \int\limits_0^t \frac{b_L(R_{ac}(s)) - b_L(R_{ab}(s))b_L(R_{bc}(s))}{1 - b_L(R_{ab}(s))^2} U(F_s(a), ds) +$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{b_L(R_{bc}(s)) - b_L(R_{ab}(s))b_L(R_{ac}(s))}{1 - b_L(R_{ab}(s))^2} U(F_s(b), ds),$$

$$\zeta_t = F_t(c) - \xi_t.$$

Обозначим $\eta_t = \sqrt{\dfrac{d\langle\zeta_x\rangle_t}{dt}}$. Тогда $\zeta_t = \tilde{w}\left(\int\limits_0^t \eta_s ds\right)$, где $\tilde{w}$ – двумерный винеровский процесс, не зависящий от $\mathcal{F}^{ab}$.

Выберем $R > 0$ так, что при любом $s > 0$ имеет место $\eta_s \geqslant \dfrac{3}{4}$, как только $R_{ab}(s) \geqslant R$, $R_{ac}(s) \geqslant R$, $R_{bc}(s) \geqslant R$.

"Типичное" поведение характеристики $\langle\Phi_{ab}\rangle_t$ существенно отличается от поведения ее математического ожидания. Так, можно показать, что $\mathbb{E}\langle\Phi_{ab}\rangle_t$ ведет себя как $\sqrt{t}\ln t$, тогда как в "типичном" случае $\langle\Phi_{ab}\rangle_t$ ведет себя как $(\ln t)^2$. Выделим теперь "хорошее" множество траекторий A_t, на котором характеристика не очень большая.

Обозначим для каждого $t > 0$

$$A_t = \left\{\omega \in \Omega\colon \int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leqslant R} ds \leqslant (\ln t)^2 f(t),\right.$$
$$\left.\int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{ac}(s) \leqslant R} ds \leqslant (\ln t)^2 f(t), \int\limits_0^t \mathbb{1}_{R_{bc}(s) \leqslant R} ds \leqslant (\ln t)^2 f(t)\right\}.$$

Можно показать, что $P(A_t) \to 1\,(t \to \infty)$.

Теперь мы готовы получить оценку на поведение $\langle\Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t$.

Утверждение 3.

$$\mathbb{E}(\langle\Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t \mathbb{1}_{A_t}) = o((\ln t)^2), t \to \infty.$$

Из утверждения 3 и того факта, что $P(A_t) \to 1\ (t \to \infty)$, следует

Утверждение 4.

$$\frac{\langle\Phi_{ab}, \Phi_{ac}\rangle_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t\to\infty]{P} 0.$$

Цитированная литература

1. *Yor M.* Etude asymptotique des nombres de tours de plusieurs mouvements browniens complexes corrélés // Random Walks, Brownian Motion, and Interacting Particle Systems. – Boston: Birkhäuser, 1991. – P. 441–455. – (Progress in Probability; Vol. 28).
2. *Монин А. С., Яглом И. М.* Статистическая гидромеханика: В 2 ч. – Москва: Наука, 1967. – Ч. 2. – 720 с.
3. *Le Jan Y.* On isotropic Brownian motions // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Gebiete. – 1985. – **70**, No 1. – P. 609–620.
4. *Kesten H., Papanicolaou G.* A limit theorem for turbulent diffusion // Commun. Math. Phys. – 1979. – **65**, No 2. – P. 97–128.
5. *Kunita H.* Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations. – Cambridge: Univ. Press, 1997. – 346 p.
6. *Zirbel C.L.*, *Woyczyński W.A.* Rotation of particles in polarized Brownian flows // Stoch. Dyn. – 2002. – 2, Iss. 1. – P. 109–129.
7. *Yaglom A.M.* Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions. – New York: Springer, 1987. – 258 p.
8. *Baxendale P.H.* The Lyapunov spectrum of a stochastic flow of diffeomorphisms // Lyapunov Exponents. – New York: Springer, 1986. – P. 322–337. – (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1186).

9. *Zirbel C.L. Woyczyński W.* Mean occupation times of continuous one-dimensional Markov processes // Stoch. Proc. Appl. – 1997. – **69**, No 2. – P. 161–178.
10. *Thiffeault J.-L.* Braids of entangled particle trajectories // Chaos. – 2010. – **20**, Iss. 1. – 017516.
11. *Kallenberg O.* Foundations of Modern Probability. – New York: Springer, 2002. – 638 p.
12. *Pitman J., Yor M.* Asymptotic Laws of Planar Brownian Motion // Ann. Probab. – 1986. – **14**, No 3. – P. 733–779.

References

1. *Yor M.* Random Walks, Brownian Motion, and Interacting Particle Systems, Progress in Probability, Vol. 28, Boston: Birkhäuser, 1991: 441–455.
2. *Monin A.S., Yaglom I.M.* Statistical Fluid Mechanics, Moscow: Nauka, 1967, Vol. 2 (in Russian).
3. *Le Jan Y.* Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Gebiete, 1985, **70**, No 1: 609–620.
4. *Kesten H., Papanicolaou G.* Commun. Math. Phys., 1979, **65**, No 2: 97–128.
5. *Kunita H.* Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations, Cambridge: Univ. Press, 1997.
6. *Zirbel C.L.*, *Woyczyński W.A.* Stoch. Dyn., 2002, **2**, Iss. 1: 109–129.
7. *Yaglom A.M.* Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, New York: Springer, 1987.
8. *Baxendale P.H.* Lyapunov Exponents, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1186, New York: Springer, 1986: 322–337
9. *Zirbel C.L. Woyczyński W.* Stoch. Proc. Appl., 1997, **69**, No 2: 161–178.
10. *Thiffeault J.-L.* Chaos, 2010, **20**, Iss. 1: 017516.
11. *Kallenberg O.* Foundations of Modern Probability, New York: Springer, 2002.
12. *Pitman J., Yor M.* Ann. Probab., 1986, **14**, No 3: 733–779.

Поступило в редакцию 04.03.2016

В. О. Кузнецов

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: vasylkuz@mail.ru

Граничний розподіл взаємних кутів обходу частинок у броунівському стохастичному потоці зі старшим показником Ляпунова, що дорівнює нулю

Дослідження геометричних властивостей траєкторій частинок у стохастичних потоках приводить до вивчення граничної поведінки їхніх взаємних кутів обходу. Автор розв'язує цю задачу для випадку броунівських стохастичних потоків зі старшим показником Ляпунова, що дорівнює нулю.

Ключові слова: броунівські стохастичні потоки, кути обходу, показники Ляпунова.

V. A. Kuznetsov

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: vasylkuz@mail.ru

The limiting distribution of the mutual winding angles of particles in a Brownian stochastic flow with Lyapunov's zero top exponent

The investigation of geometrical properties of particles moving in stochastic flows leads to the study of the limiting behaviour of their mutual winding angles. This problem is solved for isotropic Brownian stochastic flows with zero top Lyapunov exponent.

Keywords: Brownian stochastic flows, windings, Lyapunov exponents.