http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.09.023
УДК 519.21

К. К. Москвичова

НТУ України "Київський політехнічний інститут"
E-mail: kamok@ua.fm

Великі відхилення корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії

(Представлено членом-кореспондентом НАН України П. С. Кноповим)

Розглянуто нелінійну модель регресії з неперервним часом і неперервним у середньому квадратичному та майже напевно стаціонарним гауссівським випадковим шумом з нульовим середнім та додатною обмеженою спектральною щільністю. Доведено теорему про великі відхилення залишкової корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму. Отриманий результат посилює відомі раніше факти про консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції гауссівського стаціонарного випадкового шуму.

Ключові слова: нелінійна модель регресії, стаціонарний гауссівський шум, коваріаційна функція, корелограмна оцінка, ймовірність великих відхилень, псевдометрика.

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t, \theta) + \xi(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{1}$$

де $g : [0, +\infty) \times \Theta^c \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\theta =(\theta_1, ..., \theta_q) \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, $\Theta)$, Θ – обмежена відкрита опукла множина, Θ^c – замикання Θ; $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – випадковий шум, відносно якого припустимо, що

N.1. $\xi = \{\xi(t), \ t \in \mathbb{R}\}$, – дійсний неперервний в середньому квадратичному та майже напевно стаціонарний гауссівський процес, заданий на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, з нульовим середнім та додатною обмеженою спектральною щільністю $f = f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

За умови **N.1.** f та коваріаційна функція $B = \{B(t), \ t \in \mathbb{R}\}$ процесу ξ належить $L_2(\mathbb{R})$, і за тотожністю Планшереля

$$||B||_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} B^2(t)dt\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)d\lambda\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}||\, f||_2.$$

Якщо функція B невідома, то виникає задача оцінювання B за спостереженнями $\{X(t), \ t \in [0, \infty)\}$ за наявності заважаючого параметра θ. Звичайно, аналогічна задача виникає і стосовно невідомої функції f, але в цій роботі йдеться про оцінювання B.

Оцінкою найменших квадратів (ОНК) невідомого параметра $\theta \in \Theta$ на інтервалі спостережень $[0, T]$ називається будь-який випадковий вектор $\widehat{\theta}_T = (\widehat{\theta}_{1T}, \ldots \widehat{\theta}_{qT})$, для якого

$$Q_T(\widehat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} L_T(\tau), \quad Q_T(\tau) = \int\limits_0^T [X(t) - g(t, \tau)]^2 \, dt. \tag{2}$$

За введених вище умов мінімум у (2) досягається, і тоді на підставі теореми (3.10) роботи [1, с. 270] існує хоча б один такий випадковий вектор $\widehat{\theta}_T$.

За оцінку B, прив'язану до оцінки $\widehat{\theta}_T$ заважаючого параметра θ, візьмемо залишкову корелограму, побудовану за відхиленнями спостережень $\widehat{X}(t) = X(t) - g(t, \widehat{\theta}_T)$, $t \in [0, T + H]$, а саме

$$B_T(z, \widehat{\theta}_T) = T^{-1} \int\limits_0^T \widehat{X}(t+z)\widehat{X}(t)dt, \quad z \in [0, H], \tag{3}$$

$H > 0$ – фіксоване число.

Зауважимо, що $B_T(0, \widehat{\theta}_T) = T^{-1} Q_T(\widehat{\theta}_T)$ є ОНК дисперсії $B(0)$ випадкового процесу ξ. З іншого боку,

$$B_T(z, \theta) = B_T(z) = T^{-1} \int\limits_0^T \xi(t+z)\xi(t)dt, \ z \in [0, H],$$

є корелограмою ξ.

Стохастичний асимптотичний розклад та асимптотичний розклад моментів оцінки (3) отримано в роботах [2, 3]. Властивості консистентності та асимптотичної нормальності цієї оцінки вивчалися в статтях [4, 5]. У даній роботі отримано теорему про ймовірності великих відхилень величини

$$T^{1/2} \sup_{z \in [0, H]} |B_T(z, \widehat{\theta}_T) - B(z)|, \tag{4}$$

яка, зокрема, посилює результат роботи [4] про консистентність корелограмної оцінки (3).

Імовірності великих відхилень для ОНК. Тематика ймовірностей великих відхилень нормованої ОНК $\widehat{\theta}_T$ параметра θ моделі регресії (1) з дискретним та неперервним часом широко обговорювалася в статистичній літературі. Так, у роботі [6] було доведено теорему про ймовірності великих відхилень ОНК скалярного параметра нелінійної моделі регресії зі степеневим спаданням, а в роботі [7] одержано аналогічний результат з експоненційною швидкістю збіжності для нелінійної гауссівської регресії.

У роботі [8] було отримано теорему про ймовірності великих відхилень, що узагальнює результат монографії [9], із застосуванням до ОНК параметра нелінійної моделі регресії з незалежними передгауссівськими та субгауссівськими похибками спостережень. Деякі результати про ймовірності великих відхилень ОНК в моделях регресії з корельованими спостереженнями наведено в [10, 11].

У цьому пункті сформульовано потрібну нам теорему про ймовірності великих відхилень нормованої ОНК $\widehat{\theta}_T$ параметра θ моделі (1), доведення якої аналогічно доведенню теореми 3.2 роботи [8].

В асимптотичній теорії нелінійної регресії (див., наприклад, [12]) в задачах нормальної апроксимації розподілу ОНК відхилення ОНК від істинного значення параметра $\widehat{\theta}_T - \theta$ нормується діагональною матрицею

$$d_T(\theta) = \mathrm{diag}\left(d_{iT}(\theta), i = \overline{1,q}\right), \quad d_{iT}^2(\theta) = \int\limits_0^T \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i} g(t,\theta)\right)^2 dt.$$

Нижченаведена умова забезпечує існування матриці $d_T(\theta)$ та регулює її поведінку.

F.1. (i) Функції $g(t,\theta)$ при кожному $t \geqslant 0$ неперервно диференційовні за $\theta \in \Theta$ та при кожному $\theta \in \Theta$ частинні похідні $\dfrac{\partial}{\partial\theta_i} g(t,\theta)$ інтегровні за t з квадратом на кожному проміжку $[0,T]$, $T > 0$.

(ii) Для будь-якого фіксованого $H > 0$

$$\lim_{T\to\infty} d_{i,T+H}(\theta) d_{iT}^{-1}(\theta) = 1, \quad i = \overline{1,q}.$$

Позначимо $\Phi_T(\theta_1,\theta_2) = \int\limits_0^T (g(t,\theta_1) - g(t,\theta_2))^2 dt$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta^c$ і введемо таку умову (пор. з [6–8]):

F.2. Існують додатні числа $c_0(\theta)$ і $c_1(\theta)$ такі, що для будь-яких $u, v \in U_T(\theta) = d_T(\theta)(\Theta^c - \theta)$ та достатньо великих T ($T > T_0$)

$$c_0(\theta)\|u - v\|^2 \leqslant \Phi_T\left(\theta + d_T^{-1}(\theta)u, \theta + d_T^{-1}(\theta)v\right) \leqslant c_1(\theta)\|u - v\|^2.$$

Теорема 1. *Нехай виконано умови* ***N.1, F.1(i), F.2.*** *Тоді існують такі константи A та b, що для $T > T_0$, $R > R_0$*

$$P\left\{\|d_T(\theta)\left(\widehat{\theta}_T - \theta\right)\| \geqslant R\right\} \leqslant A \exp\left\{-bR^2\right\},$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ можна обрати A таким чином, щоб виконувалася нерівність

$$b \geqslant \frac{c_0(\theta)}{16\pi f_0(1+q)} - \beta,$$

де $f_0 = \sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda) < \infty$.

Імовірності великих відхилень для залишкової корелограми. Розглянемо псевдометрики (див. [13])

$$\rho(z_1,z_2) = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^2\frac{\lambda(z_1 - z_2)}{2} d\lambda\right)^{1/2}, \quad \sqrt{\rho}(z_1,z_2) = \sqrt{\rho(z_1,z_2)}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

Нехай $\mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}([0,a],\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, – метрична ентропія множини $[0,a]$, $a > 0$, відносно псевдометрики $\sqrt{\rho}$.

N.2. $\displaystyle\int\limits_{0+} \mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}([0,1],\varepsilon)d\varepsilon < \infty.$

Нижче ми наводимо теорему про ймовірності великих відхилень величини (4). Введемо константу

$$D_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{\ln 2}}(2e^2(1+\ln 2)-1)\|f\|_2 + e^2\sqrt{\frac{8\pi}{\ln 2}}\|f\|_2^{1/2}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\mathbf{H}_{\sqrt{\rho}}([0,H],\varepsilon)d\varepsilon\,,$$

де $\varepsilon_0 = \sup\limits_{z_1,z_2\in[0,H]}\sqrt{\rho}(z_1,z_2) \leqslant \|f\|_2^{1/2}$

Теорема 2. *Нехай виконано умови* ***N.1, N.2, F.1, F.2.*** *Тоді існують такі константи* A_0 *та* b_0, *що для* $T > T_0$, $R > R_0$

$$P\left\{T^{1/2}\sup_{z\in[0,H]}|B_T(z,\hat{\theta}_T)-B(z)| \geq R\right\} \leqslant A_0\exp\{-b_0R\}\,(1+\gamma(T,R))\,,$$

причому $\lim\limits_{T\to\infty,R\to\infty}\gamma(T,R)=0$, *та для будь-якого* $\beta>0$ *можна дібрати* A_0 *таким, щоб виконувалася нерівність* $b_0 \geqslant a_0-\beta$, *де*

$$a_0 = \min\left(\frac{1}{16\pi f_0(1+q)}\frac{c_0(\theta)}{c_1(\theta)}\min\left(1,\frac{1}{2B(0)}\right),\frac{1}{\|B\|_2},\frac{1}{D_0}\right).$$

Доведення теореми полягає у

1) заданні величини (4) у вигляді

$$T^{1/2}(B_T(z,\widehat{\theta}_T)-B(z)) = Y_T(z)+T^{-1/2}I_{2T}(z)-T^{-1/2}I_{3T}(z)-T^{-1/2}I_{4T}(z),\ z\in[0,H],$$

де

$$Y_T(z)=T^{1/2}(B_T(z)-B(z)),\quad I_{2T}(z)=\int\limits_0^T(g(t+z,\widehat{\theta}_T)-g(t+z,\theta))\times$$
$$\times(g(t,\widehat{\theta}_T)-g(t,\theta))dt,$$
$$I_{3T}(z)=\int\limits_0^T\varepsilon(t+z)(g(t,\widehat{\theta}_T)-g(t,\theta))dt,\quad I_{4T}(z)=\int\limits_0^T\varepsilon(t)(g(t+z,\widehat{\theta}_T)-$$
$$-g(t+z,\theta))dt\,;$$

2) отриманні експоненціальних оцінок імовірностей великих відхилень супремумів $T^{-1/2}\,|I_{2T}(z)|$, $T^{-1/2}\,|I_{3T}(z)|$, $T^{-1/2}\,|I_{4T}(z)|$, за $z\in[0,H]$, з використанням теореми 1 та нерівностей 3.3 роботи [13, с. 205];

3) використанні результатів робіт [13, 4] для отримання експоненціальної оцінки хвостів розподілу величини $\sup\limits_{z\in[0,H]}|Y_T(z)|$ з константою, що не залежить від T.

Цитована література

1. *Pfanzagl J.* On the measurability and consistency of minimum contrast estimates // Metrika. – 1969. – **14**. – P. 249–272.
2. *Іванов О. В., Москвичова К. К.* Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2014. – Вип. 90. – С. 77–90.

3. *Іванов О. В., Москвичова К. К.* Асимптотичний розклад моментів корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії // Укр. мат. журн. –2014. – **66**, № 6. – С. 787–805.
4. *Іванов О. В., Москвичова К. К.* Консистентність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2015. – **4**. – С. 57–62.
5. *Іванов О. В., Москвичова К. К.* Асимптотична нормальність корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2014. – Вип. 91. – С. 55–63.
6. *Иванов А. В.* Асимптотическое разложение распределения оценки наименьших квадратов параметра нелинейной регрессии // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – **21**. – С. 571–583.
7. *Prakasa Rao B.L.S.* On the exponential rate of convergence of the least squares estimator in the nonlinear regression model with Gaussian errors // Stat. Probab. Lett. – 1984. – **2**. – P. 139–142.
8. *Sieders A., Dzhaparidze K.* A large deviation result for parameter estimators and its application to nonlinear regression analysis // Ann. Statist. – 1987.– **15**. – P. 1031–1049.
9. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. – Москва: Наука, 1979. – 528 с.
10. *Леоненко Н.Н., Иванов А.В.* Статистический анализ случайных полей. – Киев: Вища шк., 1986. – 216 с.
11. *Hu Shuhe.* A large deviation result for the least squares estimators in nonlinear regression // Stoch. Proc. Appl. – 1993. – **47**. – P. 345–352.
12. *Ivanov A. V.* Asymtotic Theory of Nonlinear Regression. – Dordecht; Boston; London: Kluwer, 1997. – 330 p.
13. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов. – Киев: ТВіМС, 1998. – 289 с.

References

1. *Pfanzagl J.* Metrika, 1969, **14**: 249–272.
2. *Ivanov O. V., Moskvichova K. K.* Theory Probab. Math. Statist., 2015, **90**: 87–101.
3. *Ivanov O. V., Moskvichova K. K.* Ukr. Math. J., 2014, **66**, No 6: 787–805 (in Ukrainian).
4. *Ivanov O. V., Moskvichova K. K.* Naukovi visti NTUU "KPI", 2015, **4**: 57–62 (in Ukrainian).
5. *Ivanov O.V., Moskvichova K.K.* Theory Probab. Math. Statist., 2015, **91**: 61–70.
6. *Ivanov A. V.* Theory Probab. Appl., 1976, **21**: 557–570.
7. *Prakasa Rao B. L. S.* Stat. Probab. Lett., 1984, **2**: 139–142.
8. *Sieders A., Dzhaparidze K.* Ann. Statist., 1987, **15**: 1031–1049.
9. *Ibragimov I. A., Has'minskii R. Z.* Statistical estimation: asymptotic theory, New York: Springer, 1981.
10. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Statistical Analysis of Random Fields, Dordecht, Boston, London: Kluwer, 1989.
11. *Hu Shuhe.* Stoch. Proc. Appl., 1993, **47**: 345–352.
12. *Ivanov A. V.* Asymtotic Theory of Nonlinear Regression, Dordecht, Boston, London: Kluwer, 1997.
13. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric characterization of random variables and random processes, Providence: AMS, 2000.

Надійшло до редакції 11.04.2016

Е. К. Москвичева

НТУ Украины “Киевский политехнический институт”
E-mail: kamok@ua.fm

Большие отклонения коррелограммной оценки ковариационной функции случайного шума в нелинейной модели регрессии

Рассмотрена нелинейная модель регрессии с непрерывным временем и непрерывным в среднем квадратичном и почти наверное стационарным гауссовским случайным шумом с нулевым средним и положительной ограниченной спектральной плотностью. Доказана теорема о больших отклонениях остаточной корреллограммной оценки ковариационной функции случайного шума. Полученный результат усиливает ранее известные факты о состоятельности коррелограммной оценки ковариационной функции гауссовского стационарного случайного шума.

Ключевые слова: нелинейная модель регрессии, стационарный гауссовский шум, ковариационная функция, коррелограммная оценка, вероятность больших отклонений, псевдометрика.

K. K. Moskvychova

NTU of Ukraine “Kiev Polytechnic Institute”
E-mail: kamok@ua.fm

Large deviations of a correlogram estimator of the random noise covariance function in a nonlinear regression model

A time continuous nonlinear regression model with mean square continuous and almost sure Gaussian stationary random noise with zero mean and positive bounded spectral density is considered. A theorem on probabilities of large deviations of a residual correlogram estimator of the random noise covariance function is proved. The result obtained sharpens previously known facts on the consistency of a correlogram estimator of the covariance function of Gaussian stationary random noise.

Keywords: nonlinear regression model, stationary Gaussian noise, covariance function, correlogram estimator, probability of large deviations, pseudometric.