http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.09.044
УДК 531.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк, Л. Н. Чернецкая,**
Ю. А. Мартынюк-Черниенко

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: amartynyuk@voliacable.com

Динамический анализ множества траекторий на произведении выпуклых компактов

Для множества дифференциальных уравнений с производной Хукухары, определенных на произведении непустых компактных и выпуклых подмножеств, установлен принцип сравнения с векторной функцией Ляпунова и достаточные условия устойчивости стационарного решения. Анализ проведен на основе векторной функции Ляпунова специальной структуры.

Ключевые слова: уравнения с производной Хукухары, принцип сравнения, устойчивость множества траекторий.

Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью [1], именуемые в последнее время множеством дифференциальных уравнений [3], являются предметом интенсивных исследований в связи с рядом инженерных задач теории управления, в частности задачей управления пучками траекторий. Задача об устойчивости множества стационарных решений такого рода систем представляет интерес для приложений. Целью данной статьи является изложение одного метода анализа устойчивости рассматриваемых уравнений на основе принципа сравнения в контексте с векторной функцией Ляпунова [2] специальной структуры.

Пусть $K_C(\mathbb{R}^n)$ – семейство всех непустых компактных и выпуклых подмножеств в пространстве $\mathbb{R}^n$; $D[A,B]$ – расстояние между не пустыми замкнутыми подмножествами A и B в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для многозначной функции $X\colon I \to K_C(\mathbb{R}^n)$ рассматривается производная Хукухары $D_H X(t)$.

1. Постановка задачи. Рассматривается множество дифференциальных систем

$$D_H X = F(t, X), \tag{1}$$

$$X(t_0) = X_0 \in K_C^m(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

где $X \in K_C^m(\mathbb{R}^n)$, отображение $F \in C(\mathbb{R}_+ \times K_C^m(\mathbb{R}^n), K_C^m(\mathbb{R}^n))$, $K_C^m(\mathbb{R}^n) = K_C(\mathbb{R}^n)\times$ $\times K_C(\mathbb{R}^n)\times \ldots \times K_C(\mathbb{R}^n)$ m раз, $1 < m < \infty$, и при любом $i \in [1, m]$ имеем $X_i \in K_C(\mathbb{R}^n)$.

Пусть X_i, Y_i – некоторые множества из семейства $K_C^m(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $D[X_i, Y_i]$ расстояние Хаусдорфа между этими множествами при любом $i \in [1, m]$ и формулой

$D_0[X,Y] = e^T D[X_i, Y_i]$, $e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^m_+$, определим расстояние между множествами $(X,Y) \in K^m_C(\mathbb{R}^n)$. Пара $(D_0, K^m_C(\mathbb{R}^n))$ образует некоторое метрическое пространство.

Наряду с метрикой $D_0[X,Y]$ будем рассматривать векторное расстояние $D : K^m_C(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m_+$, т.е.

$$D[X,Y] = (D[X_1,Y_1], \ldots, D[X_m,Y_m])\,. \tag{3}$$

При этом будем предполагать, что любая пара $(D, K^m_C(\mathbb{R}^n))$ образует некоторое другое метрическое пространство.

Для множества дифференциальных систем (1) будем рассматривать матричнозначную функцию

$$U(t,X) = [U_{ij}(t,X)]\,, \quad i,j \in [1,m], \tag{4}$$

элементы $U_{ij}(t,X)$ которой такие, что $U_{ij}(t,X) \in C(\mathbb{R}_+ \times K^m_C(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}_+)$ при $i=j$ и $U_{ij}(t,X) \in C$ $(\mathbb{R}_+ \times K^m_C(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ при $i \neq j \in [1,m]$.

На основе функции (4) построим векторную функцию

$$L(t,X,b) = U(t,X)b, \quad b \in \mathbb{R}^m_+, \tag{5}$$

и предположим, что $L \in C(\mathbb{R}_+ \times K^m_C(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^m_+)$, а также $L(t,X,b) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, если только $X = 0 \in K^m_C(\mathbb{R}^n)$. Для функции (5) рассматривается полная производная в силу множества дифференциальных систем (1) в виде

$$D^+L(t,X,b) = D^+U(t,X)b, \tag{6}$$

где

$$D^+U(t,A) = \limsup\left\{[U(t+h, A+hF(t,A)) - U(t,A)]h^{-1}\colon h \to 0^+\right\}$$

при любых $A \in K^m_C(\mathbb{R}^n)$.

Теорема принципа сравнения. Установим вначале основную теорему принципа сравнения с векторной функцией (5) для множества дифференциальных систем (1) и (2).

Теорема 1. *Предположим, что для множества систем (1) и (2) построена матричнозначная функция (4) и функция $L(t, X, b)$ удовлетворяет условиям:*

1) $L \in C(\mathbb{R}_+ \times K^m_C(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^m_+)$, $L(t,X,b) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, если только $X = 0$;

2) существует $m \times m$-матрица A с неотрицательными элементами такая, что $|L(t,X_1,b) - L(t,X_2,b)| \leqslant AD[X_1,X_2]$ при всех $(t,X) \in \mathbb{R}_+ \times K^m_C(\mathbb{R}^n)$;

3) для функции (6) существует квазимонотонная по w функция $G(t,w)$, $G \in C$ $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m_+, \mathbb{R}^m_+)$, такая, что

$$D^+L(t,X,b) \leqslant G(t, L(t,X,b)) \text{ при всех } (t,X,b) \in \mathbb{R}_+ \times K^m_C(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m_+; \tag{7}$$

4) при всех $t \geqslant t_0$ существует максимальное решение $R(t) = R(t,t_0,w_0)$ векторной системы

$$\frac{dw}{dt} = G(t,w), \quad w(t_0) = w_0 \geqslant 0. \tag{8}$$

Тогда вдоль любого решения $X(t) = X(t, t_0, X_0)$ уравнений (1), существующего при $t \geqslant t_0$, выполняется оценка

$$L(t, X(t), b) \leqslant R(t) \text{ при } t \geqslant t_0. \tag{9}$$

Доказательство. Предположим, что множество дифференциальных систем (1) и (2) имеет решение *X(t)* при всех $t \geqslant t_0$ для начальных значений $X_0 \in \Pi \subset K_C^m(\mathbb{R}^n)$. Для функции $L(t, X(t), b) = g(t)$ имеем $g(t_0) = L(t_0, X_0, b) \leqslant w_0$. В силу условия (2) теоремы 1 для сколь угодно малого $h > 0$ получим

$$\begin{aligned} g(t+h) - g(t) = L(t+h, X(t+h), b) - L(t, X(t), b) \leqslant AD[X(t+h), X(t) + \\ hF(t, X(t))] + L(t+h, X(t) + hF(t, X(t)), b) - L(t, X(t), b). \end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} D^+g(t) = \limsup \left\{ [g(t+h) - g(t)]h^{-1} : \ h \to 0^+ \right\} \leqslant \\ \leqslant D^+L(t, X(t), b) + A \limsup \{ (D[X(t+h), \\ X(t) + hF(t, X(t))]) \, h^{-1} : \ h \to 0^+ \} . \end{aligned}$$

Так как по предположению $D_H X$ существует, то верно соотношение $X(t+h) = X(t) + Z(t)$, где $Z(t) = Z(t, h)$ является разностью Хукухары для сколь угодно малого $h > 0$. Учитывая это соотношение, преобразуем второе слагаемое в оценке (10) так:

$$\begin{aligned} D[X(t+h), X(t) + hF(t, X(t))] = D[X(t) + Z(t), X(t) + hF(t, X(t))] = \\ = D[Z(t), hF(t, X(t))] = D[X(t+h) - X(t), hF(t, X(t))]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{h} D[X(t+h), X(t) + hF(t, X(t))] = D\left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h}, F(t, X(t)) \right],$$

и далее

$$\begin{aligned} \limsup \left\{ [D[X(t+h), X(t) + hF(t, X(t))]] \, h^{-1} : h \to 0^+ \right\} = \\ = \limsup \left\{ \left[D\left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h}, F(t, X(t)) \right] \right] h^{-1} : h \to 0^+ \right\} = \\ = D[D_H X(t), F(t, X(t))] = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

вдоль любого решения $X(t) = X(t, t_0, X_0)$ системы (1) и (2). Учитывая соотношение (11), из условия 3 теоремы 1 и неравенства (10) имеем

$$D^+g(t) \leqslant G(t, g(t)), \quad g(t_0) \leqslant w_0. \tag{12}$$

При выполнении условия 4 теоремы 1 для неравенства (12) рассматривается система сравнения (8) и в силу теоремы 3.1.2 из монографии [5] устанавливается оценка (9). Этим теорема 1 доказана.

Анализ динамических свойств стационарного решения. Теорема 1 позволяет установить общую схему получения достаточных условий, при которых определенные динамические свойства стационарного решения $\Theta \in K_C^m(\mathbb{R}^n)$ множества дифференциальных систем (1) следуют из соответствующих динамических свойств нулевого решения системы сравнения (8).

Теорема 2. *Предположим, что*

1) для множества дифференциальных систем (1) и (2) построена матричнозначная функция (4) и для функции (5) выполняются условия 1–2 теоремы 1;

2) для функции $L_0(t,X,b) = \sum\limits_{i=1}^{m} L_i(t,X,b)$ *существуют симметрические постоянные* $m\times m$*-матрицы* Φ_1, Φ_2 *и векторные функции сравнения* $b(D_0[X,\Theta])$, $a(D_0[X,\Theta])$, $a,b \in K$*-классу Хана, такие, что*

$$b^T(D_0[X,\Theta])\Phi_1 b(D_0[X,\Theta]) \leqslant L_0(t,X,b) \leqslant a^T(D_0[X,\Theta])\Phi_2 a(D_0[X,\Theta]) \tag{13}$$

при всех $(t,X) \in \mathbb{R}_+ \times K_C^m(\mathbb{R}^n)$;

3) для функции $D^+L(t,X,b)$, *определенной выражением (6), существует квазимонотонная неубывающая по w функция G(t, w),* $G\in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^m,\mathbb{R}_+^m)$, *G(t, 0) = 0, такая, что*

$$D^+L(t,X,b) \leqslant G(t,L(t,X,b)) \;\; \text{при всех} \;\; (t,X)\in\mathbb{R}_+\times S(H),$$

где

$$S(H) = \{X \in K_C^m(\mathbb{R}^n){:}\, D_0[X,\Theta] < H\}\,;$$

4) для отображений $F \in C(\mathbb{R}_+ \times S(H), K_C^m(\mathbb{R}^n))$ *существует множество* $\Theta \in K_C^m(\mathbb{R}^n)$ *такое, что* $F(t,\Theta)=\Theta$ *при всех* $t\in\mathbb{R}_+$.

Тогда, если матрицы Φ_1, Φ_2 *положительно определенные, то свойства устойчивости стационарного решения* Θ *множества систем (1) и (2) следуют из свойств устойчивости нулевого решения системы сравнения (8).*

Доказательство. Пусть $\lambda_m(\Phi_1)$, $\lambda_M(\Phi_2)$ – минимальное и максимальное собственные значения матриц Φ_1, Φ_2 соответственно. Оценку (13) преобразуем к виду

$$\lambda_m(\Phi_1)\beta(D_0[X,\Theta]) \leqslant L_0(T,X,b) \leqslant \lambda_M(\Phi_2)\alpha(D_0[X,\Theta]), \tag{14}$$

где $\alpha,\beta \in K$-классу Хана такие, что

$$b^T(D_0[X,\Theta])b(D_0[X,\Theta]) \geqslant \beta(D_0[X,\Theta])$$

и

$$a^T(D_0[X,\Theta])a(D_0[X,\Theta]) \leqslant \alpha(D_0[X,\Theta]).$$

Предположим, что нулевое решение системы сравнения (8) эквиасимптотически устойчиво, т.е. оно экви-устойчиво и притягивающее. Пусть заданы величины (t_0,ε): $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $0<\varepsilon<H$. Из свойства экви-устойчивости состояния $w=0$ системы (8) следует, что для заданного $\lambda_m(\Phi_1)\beta(\varepsilon)>0$ существует $\delta_1=\delta_1(t_0,\varepsilon)>0$ такое, что из условия $e^T w_0<\delta_1$ следует

$$e^T w(t,t_0,w_0) < \lambda_m(\Phi_1)\beta(\varepsilon) \;\; \text{при всех} \;\; t \geqslant t_0 \tag{15}$$

где $w(t, t_0, w_0)$ – любое решение системы (8). Пусть $w_0 = L(t_0, X_0, b)$. Выберем $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ так, что

$$\lambda_M(\Phi_2)\alpha(\delta) < \delta_1(t_0, \varepsilon). \tag{16}$$

Предположим, что $D_0[X_0, \Theta] < \delta$, и покажем, что для любого решения $X(t) = X(t, t_0, X_0)$ выполняется оценка $D_0[X(t), \Theta] < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

Рассмотрим решение *X(t)* с начальными значениями $X_0 \in K_C^m(\mathbb{R}^n)$, для которых $D_0[X_0, \Theta] < \delta$. Пусть существует значение $t_1 > t_0$ такое, что

$$D_0[X(t_1), \Theta] = \varepsilon \quad \text{и} \quad D_0[X(t), \Theta] \leqslant \varepsilon < H \quad \text{при всех} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Согласно теореме 1 имеем оценку

$$L(t, X(t), b) \leqslant R(t, t_0, w_0) \quad \text{при всех} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{17}$$

где $R(t, t_0, w_0)$ – максимальное решение системы сравнения (8). Согласно оценке (14) имеем

$$L_0(t_0, X_0, b) \leqslant \lambda_M(\Phi_2)\alpha(D_0[w_0, \Theta]) < \lambda_M(\Phi_2)\alpha(\delta) < \delta_1(t_0, \varepsilon).$$

Из оценки (14) и неравенств (15) получим

$$\lambda_m(\Phi_1)\beta(D_0[X(t_1), \Theta]) \leqslant L_0(t_1, X(t_1), b) \leqslant R_0(t_1, t_0, w_0) < \lambda_m(\Phi_1)\beta(\varepsilon), \tag{18}$$

где $R_0(t, t_0, w_0) = e^T R(t, t_0, w_0)$, $e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}_+^m$. Противоречие (18) показывает, что не существует $t_1 \in \mathbb{R}_+$, для которого $D_0[X(t_1), \Theta] = \varepsilon$. Этим доказана эквиустойчивость стационарного решения $\Theta \in K_C^m(\mathbb{R}^n)$ множества систем (1) и (2).

Далее предположим, что тривиальное решение векторной системы сравнения (8) притягивающее. Пусть $\varepsilon = H$ и $\widehat{\delta} = \delta(t_0, H)$. Для некоторого $0 < \eta < H$ при заданных $\lambda_m(\Phi_1)\beta(\eta) > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ найдутся $\delta_1^* = \delta_1(t_0) > 0$ и $\tau = \tau(t_0, \eta) > 0$ такие, что из условия $e^T w_0 < \delta_1^*$ следует оценка

$$e^T w(t) < \lambda_m(\Phi_1)\beta(\eta) \quad \text{при всех} \quad t \geqslant t_0 + \tau(t_0, \eta).$$

Пусть $w_0 = L(t_0, X_0, b)$. Выберем $\delta_0^* = \delta_0(t_0) > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\lambda_M(\Phi_2)\alpha(\delta_0^*) < \delta_1^*$. Далее предположим, что $D_0[w_0, \Theta] < \delta_0$, где $\delta_0 = \min(\delta_1^*, \delta_0^*)$. При этом $D_0[X(t), \Theta] < H$ при всех $t \geqslant t_0$ и оценка (9) имеет место при всех $t \geqslant t_0$. Предположим теперь, что существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k \geqslant t_0 + \tau$, $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$, и $D_0[X(t_k), \Theta] \geqslant \eta$, где *X(t)* – решение множества дифференциальных систем (1) с начальным условием $D_0[X_0, \Theta] < \delta_0$. Из оценки (18) имеем

$$\lambda_m(\Phi_1)\beta(\eta) \leqslant L_0(t_k, X(t_k), b) \leqslant R_0(t_k, t_0, w_0) < \lambda_m(\Phi_1)\beta(\eta).$$

Полученное противоречие доказывает, что не существует последовательности $\{t_k\}$, для которой $D_0[X(t_k), \Theta] \geqslant \eta$ при $t_k \to \infty$. Этим теорема 2 доказана.

Эффективное применение теоремы 2 связано с анализом устойчивости состояния $w = 0$ системы сравнения (8). Укажем один критерий устойчивости этой системы.

Следствие 1. Пусть выполняются условия (1), (2) и (4) теоремы 2 и существует постоянная $m \times m$-матрица P с неотрицательными внедиагональными элементами такая, что

$$D^+L(T, X, b) \leqslant PL(T, X, b) \quad \text{при всех} \quad (t, X, b) \in \mathbb{R}_+ \times K_C^m(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+^m.$$

Если матрицы Φ_1, Φ_2 в оценке (13) положительно определенные система неравенств

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij}\Theta_j < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

допускает решение $\Theta_1, \ldots, \Theta_m$ такое, что $0 < \Theta_j$ при всех $j = 1, 2, \ldots, m$, то тогда стационарное решение $\Theta \in K_C^m(\mathbb{R}^n)$ множества дифференциальных систем (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Замечание: условия устойчивости уравнений (1) и (2) в случае $X \in K_C(\mathbb{R}^n)$ получены в монографии [6] при помощи матричной вспомогательной функции и принципа сравнения со скалярной функцией Ляпунова.

Цитированная литература

1. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set Valued Analysis. – Basel: Birkhäser, 1990. – 461 p.
2. *Матросов В. М., Л. Ю.* Анапольский, Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем. – Новосибироск: Наука, 1980. – 479 с.
3. *Lakshmikantham V., Bhaskar T. G., Devi J. V.* Theory of Set Differential Equations in a Metric Space. – Melbourne: Florida Institute of Technology, 2005. – 250 p.
4. *Martynyuk A. A.* Stability of Motion. The Role of Multicomponent Liapunov's Functions. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2007. – 322 p.
5. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Stability Analysis of Nonlinear Systems. – New York: Marcel Dekker, 1989. – 315 p.
6. *Martynyuk A. A., Martynyuk-Chernienko Yu. A.* Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control. – Boca Raton: CRC Press, 2012. – 296 c.

References

1. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set Valued Analysis, Basel: Birkhäser, 1990.
2. *Matrosov V.M., Anapol'skii L.Yu., Vasil'yev S.N.* Comparison method in mathematical theory of systems, Novosibirsk: Nauka, 1980.
3. *Lakshmikantham V., Bhaskar T. G., Devi J. V.* Theory of Set Differential Equations in a Metric Space, Melbourne: Florida Institute of Technology, 2005.
4. *Martynyuk A. A.* Stability of Motion. The Role of Multicomponent Liapunov's Functions, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2007.
5. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Stability Analysis of Nonlinear Systems, New York: Marcel Dekker, 1989.
6. *Martynyuk A. A., Martynyuk-Chernienko Yu. A.* Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control, Boca Raton: CRC Press, 2012.

Поступило в редакцию 20.11.2016

Академік НАН України **А. А. Мартинюк, Л. Н. Чернецька, Ю. А. Мартинюк-Чернієнко**

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Динамічний аналіз множини траєкторій на добутку опуклих компактів

Для множини диференціальних рівнянь з похідною Хукухари, визначених на добутку непустих компактних і опуклих підмножин, встановлено принцип порівняння з векторною функцією Ляпунова і достатні умови стійкості стаціонарного руху. Аналіз проведено на основі векторної функції Ляпунова спеціальної структури.

Ключові слова: рівняння з похідною Хукухари, принцип порівняння, стійкість множини траєкторій.

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk, L. M. Chernetskaya, Yu. A. Martynyuk-Chernienko**

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Dynamics analysis of the set of trajectories on a product of convex compacts

For a set of differential equations with Hukuhara derivative defined on a product of nonempty convex and compact spaces, the comparison principle and sufficient conditions of stability of a stationary motion are established. We use the vector Lyapunov-like function of a special structure.

Keywords: equations with Hukuhara derivative, comparison principle, stability of the set of trajectories.