

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.10.003>

УДК 517.98

**Е.Н. Ашурова<sup>1</sup>, В.Л. Островський<sup>2</sup>, Ю.С. Самойленко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Український центр клінічних досліджень компанії “Chiltern”, Київ

<sup>2</sup> Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: work1991@ukr.net, vo@imath.kiev.ua, yurii\_sam@imath.kiev.ua

## **Про зображення алгебр, породжених скінченним розкладом одиниці та набором ортогональних проекторів**

*Представлено академіком НАН України Ю.С. Самойленком*

*Досліджено властивості зображень інволютивної алгебри, породженої самоспряженими ідемпотентами  $q_1, \dots, q_n$  та  $p_1, \dots, p_m$ , що задовольняють співвідношення  $q_1 + \dots + q_n = e$ ,  $p_j p_k = 0$ ,  $j \neq k$ . Відповідні набори проекторів у гільбертовому просторі виникають при дослідженні фредгольмовості теплицевих операторів. Зокрема, для незвідних зображень загального положення з  $\dim P_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ , знайдено комутативний набір нормальних операторів, сумісний спектр якого визначає зображення з точністю до унітарної еквівалентності.*

**Ключові слова:** набори ортопроекторів, теплицеві оператори.

Один з ефективних методів дослідження фредгольмовості теплицевих операторів полягає у відображенні опертора у певну  $C^*$ -алгебру, породжену набором ортопроекторів і її реалізації неперервними матричними полями (див., наприклад, [1] та наведену там бібліографію). Зокрема, вивчалися властивості  $C^*$ -алгебри, породженої наборами ортопроекторів  $P, Q_1, \dots, Q_n$  у деякому гільбертовому просторі  $H$ , що задовольняють співвідношення  $Q_1 + \dots + Q_n = I$ , а також більш загальними наборами ортопроекторів  $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$  в  $H$ , які задовольняють співвідношення

$$P_j \perp P_k, \quad k \neq j, \quad Q_1 + \dots + Q_n = I \quad (1)$$

(див. [2]). У вказаних роботах досліджувалися властивості  $C^*$ -алгебри, породженої незвідними наборами ортопроекторів, для яких образ проектора  $P$  чи образи проекторів  $P_1, \dots, P_m$  є одновимірними просторами. Саме такі набори виникають у конкретних реалізаціях локальних алгебр, пов'язаних з операторами Тепліца з кусково-неперервними символами. Зокрема, показано, що відповідна  $C^*$ -алгебра вкладається в алгебру неперервних матричнозначних функцій на певній множині параметрів. У випадку  $m = 1$  мно-

© Е.Н. Ашурова, В.Л. Островський, Ю.С. Самойленко, 2017

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2017. № 10

3

жина параметрів  $c_1, \dots, c_n$ , що індексують незвідні зображення, є симплексом

$$c_1 + \dots + c_n = 1, \quad c_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

і розклад довільного зображення на незвідні задається спектральним розкладом відповідного комутативного набору самоспряжених операторів  $C_1, \dots, C_n$ .

Проте у разі  $m \geq 2$  подібного опису множини, що параметризує незвідні зображення, наведено не було. Питання про параметризацію незвідних зображень таких алгебр у випадку  $m \geq 2$  досліджується в даній роботі.

Зручним інструментом дослідження наборів ортопроекторів у гільбертовому просторі є операторна матриця Грама (див. [3]). У першому пункті викладено конструкцію операторної матриці Грама та її основні властивості, що використовуються у подальшому.

У другому пункті розглядаються загальні властивості наборів ортопроекторів з умовами (1) при  $m \geq 2$ . Зокрема, показано, що за умови, коли кожна пара проекторів  $(P_j, Q_k)$ ,  $(P_j, Q_k)$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, n$ , знаходиться у загальному положенні, задача опису з точністю до унітарної еквівалентності наборів еквівалентна задачі опису блочних  $m \times m$  додатних самоспряжених матриць  $A_1, \dots, A_n$  з умовою  $A_1 + \dots + A_n = I$ . Ця умова є природним аналогом умови (2) у випадку  $m = 1$ .

Відомо [4], що навіть у випадку  $m = 1$ ,  $n \geq 3$ , задача опису наборів ортопроекторів з умовами (1) з точністю до унітарної еквівалентності є надзвичайно складною (\*-дикою). У третьому пункті досліджуються набори з додатковими комутаційними співвідношеннями, які еквівалентні умові, що у незвідному зображенні образи ортопроекторів  $P_1, \dots, P_m$  одновимірні. У цьому випадку задача опису незвідних наборів є ручною. Основним результатом є теорема 4, яка описує комутативний набір нормальних операторів, спектральний розклад яких дає розклад набору на незвідні набори.

Дана робота є узагальненням попередньої роботи [5], де аналогічні питання досліджувались у випадку  $m = 2$ .

**1. Операторна матриця Грама.** Нехай  $P_1, \dots, P_n$  — набір проекторів у  $H$  і нехай  $H_j = \text{Im } P_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Позначимо  $S_j: H_j \rightarrow H$  ізометричні вкладення, так що  $S_j S_j^* = P_j$ ,  $S_j^* S_j = I_{H_j}$ . Розглянемо простір  $\tilde{H} = H_1 \oplus \dots \oplus H_n$  та оператор  $J = (S_1, \dots, S_n): \tilde{H} \rightarrow H$ .

**Означення 1** [3, 6]. Оператор  $G = J^* J: \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$  називається операторною матрицею Грама системи підпросторів  $(H; H_1, \dots, H_n)$ .

Блочні елементи операторної матриці Грама мають вигляд  $(S_j^* S_k)_{j,k=1}^n$ , отже, у випадку одновимірних проекторів  $P_j$  маємо  $H_j = \mathbb{C}\langle e_j \rangle$ ,  $\|e_j\| = 1$  та  $G$  є матрицею Грама системи векторів  $(e_1, \dots, e_n)$ .

**Теорема 1** [3]. Операторна матриця Грама має такі властивості:

1.  $G = G^*$ ,  $G \geq 0$ .
2. Діагональні блоки  $G$  є одиничними операторами,  $G_{jj} = I_{H_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .
3.  $G_{jk} = 0 \Leftrightarrow H_j \perp H_k$ .

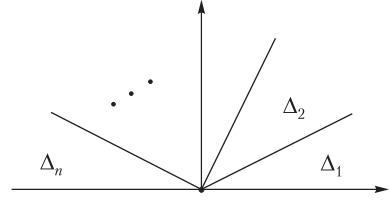
Нехай  $Q_1, \dots, Q_n$  — проектори на  $H_j$  в  $\tilde{H}$ .

**Теорема 2** [3]. Набір  $(P_1, \dots, P_n)$  в  $H$  незвідний тоді і лише тоді, коли набір  $(G, Q_1, \dots, Q_n)$  незвідний в  $\tilde{H}$ .

1. Набори  $(P_1, \dots, P_n)$  та  $(P'_1, \dots, P'_n)$  унітарно еквівалентні тоді і лише тоді, коли відповідні набори  $(G, Q_1, \dots, Q_n)$  та  $(G', Q'_1, \dots, Q'_n)$  унітарно еквівалентні.

Таким чином, маючи набір проекторів  $P_1, \dots, P_n$  в  $H$ , можна побудувати відповідний оператор  $G \geq 0$  та набір ортопроекторів  $Q_1, \dots, Q_n$ , для яких

$$\sum_{j=1}^n Q_j = I, \quad Q_j G Q_j = Q_j.$$



Навпаки, маючи набір проекторів  $Q_1, \dots, Q_n$  у гільбертовому просторі  $\tilde{H}$ , для яких  $\sum_{k=1}^n Q_k = I$ , та обмежений оператор  $B \geq 0$  в  $\tilde{H}$ , для якого  $Q_j B Q_j = Q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , можна однозначно з точністю до унітарної еквівалентності відновити набір  $P_1, \dots, P_n$ , для якого  $B$  буде операторною матрицею Грама.

**2. Алгебри “all but one”.** Розглянемо  $*$ -алгебру  $\mathcal{P}_{abo,n}$  (див. [1]), породжену твірними  $p, q_1, \dots, q_n$  та співвідношеннями

$$p^2 = p^* = p, \quad q_j^2 = q_j^* = q_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ q_1 + \dots + q_n = e.$$

Зображення цієї алгебри – набір проекторів  $P, Q_1, \dots, Q_n$  з умовою  $Q_1 + \dots + Q_n = I$ . При  $n \geq 2$  задача унітарної класифікації усіх зображень є дуже складною ( $*$ -дикую). Водночас, за додаткової умови  $\dim P = 1$  опис усіх незвідних зображень є  $*$ -ручною задачею. Множина незвідних зображень загального положення параметризується  $n$ -ками додатних чисел  $c_1, \dots, c_n$ , для яких  $c_1 + \dots + c_n = 1$ . При цьому усі незвідні зображення мають розмірність  $\leq n$ .

**Приклад** (простір Бергмана). Нехай  $\Pi$  позначає верхню комплексну півплощину. Функції з  $L_2(\Pi)$ , що є аналітичними всередині  $\Pi$ , утворюють підпростір  $\mathcal{A}^2(\Pi)$  (підпростір Бергмана). Позначимо  $P$  проектор на  $\mathcal{A}^2(\Pi)$  в  $L_2(\Pi)$  (проектор Бергмана). Поділимо  $\Pi$  на сектори  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  з вершинами у точці  $0$  (рисунок),  $\bigcup_1^n \Delta_k = \Pi$ , і покладемо  $Q_j = M_{\chi_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , – оператори множення на індикатори множин  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ . Тоді  $Q_1 + \dots + Q_n = I$  і набір  $P, Q_1, \dots, Q_n$  розкладається на незвідні набори з  $\dim P \leq 1$ . Такі набори виникають при вивченні фредгольмовості певних класів теплицевих операторів (див. [1]).

**3. Набори “All but  $m$ ” проекторів.**

**Приклад** (простори типу Бергмана). Для кожного  $k = 1, 2, \dots$ , розглянемо підпростір бергманівського типу  $\mathcal{A}_k^2, \mathcal{A}_{-k}^2 \subset L_2(\Pi)$ , породжений функціями  $f$ , для яких відповідно  $\frac{\partial^k}{\partial \bar{z}^k} f = 0$  чи  $\frac{\partial^k}{\partial z^k} f = 0$ . Означимо

$$\mathcal{A}_1^2 = \mathcal{A}_1^2 = \mathcal{A}^2, \quad \mathcal{A}_k^2 = \mathcal{A}_k^2 \ominus \mathcal{A}_{k-1}^2, \quad k > 1,$$

$$\mathcal{A}_{-1}^2 = \mathcal{A}_{-1}^2, \quad \mathcal{A}_{-k}^2 = \mathcal{A}_{-k}^2 \ominus \mathcal{A}_{-k+1}^2, \quad k < -1,$$

і розглянемо проектор  $\mathcal{P}_k$  на підпростір  $\mathcal{A}_k$  в  $L_2(\Pi)$ . Тоді  $\sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{P}_k + \mathcal{P}_{-k}) = I$  [7].

Нехай  $P_1, \dots, P_m$  – скінченний піднабір проекторів з набору  $(\mathcal{P}_k)$ . Тоді проектори  $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_m$  задовольняють умови

$$Q_1 + \dots + Q_n = I, \quad P_j P_k = 0, \quad j \neq k.$$

Більш того, такий набір розкладається на незвідні набори, для яких  $\dim P_j \leq 1$ ,  $j = 1, \dots, m$  (див. [2]).

Нижче ми вивчатимемо структуру з точністю до унітарної еквівалентності наборів проєкторів  $Q_1, \dots, Q_n$ ,  $P_1, \dots, P_m$ , для яких

$$\sum_{i=1}^n Q_i = I, \quad P_j \perp P_k, \quad 1 \leq j \neq k \leq m. \quad (3)$$

Такі набори є зображеннями відповідної \*-алгебри "all but  $m$ ". Як і у випадку  $m = 1$ , унітарний опис усіх зображень цієї алгебри є \*-дикою задачею. Нижче ми вивчимо деякі загальні властивості таких наборів та вкажемо природну додаткову умову, за якої задача класифікації стає ручною.

Розглянемо ізометричні вкладення  $S_j : \text{Im } Q_j \rightarrow H$ ,  $j = 1, \dots, n$  та ізометричні вкладення  $T_i : \text{Im } P_i \rightarrow H$ ,  $i = 1, \dots, m$ , так що

$$S_j^* S_j = I_{\text{Im } Q_j}, \quad S_j S_j^* = Q_j, \quad T_i^* T_i = I_{\text{Im } P_i}, \quad T_i T_i^* = P_i.$$

Операторна матриця Грама  $G$  набору проєкторів  $P_1, \dots, P_m$ ,  $Q_1, \dots, Q_n$  має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} I & \dots & 0 & T_1^* S_1 & \dots & T_1^* S_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I & T_m^* S_1 & \dots & T_m^* S_n \\ S_1^* T_1 & \dots & S_1^* T_m & I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n^* T_1 & \dots & S_n^* T_m & 0 & \dots & I \end{pmatrix}.$$

Позначимо  $H_j = \text{Im } P_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $H_0 = \bigoplus_{j=1}^m H_j$  та розглянемо проєктори  $P'_j$  в  $H_0$  на підпростори  $H_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Розглянемо оператори

$$B_j = \begin{pmatrix} T_1^* S_j \\ \vdots \\ T_m^* S_j \end{pmatrix} : \text{Im } Q_j \rightarrow H_0,$$

$$A_j = B_j B_j^* : H_0 \rightarrow H_0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

**Твердження 1.** *Набір операторів  $(P'_1, \dots, P'_m, A_1, \dots, A_n)$  в  $H_0$  має такі властивості:*

- 1)  $P'_1 + \dots + P'_m = I_{H_0}$ ,  $A_1 + \dots + A_n = I_{H_0}$ ;
- 2) якщо набори проєкторів  $(P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n)$  та  $(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n)$  унітарно еквівалентні, то відповідні набори операторів  $(P'_1, \dots, P'_m, A_1, \dots, A_n)$  та  $(\tilde{P}'_1, \dots, \tilde{P}'_m, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$  унітарно еквівалентні.

**Зауваження 1.** Обернене твердження до п. 2 невірне: легко вказати приклади унітарно нееквівалентних наборів  $(P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n)$  та  $(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n)$ , які породжують той самий набір  $(P'_1, \dots, P'_m, A_1, \dots, A_n)$ .

Будемо казати, що підпростори  $E \subset H$  та  $K \subset H$  знаходяться в загальному положенні, якщо  $E \cap K = 0$ ,  $E \cap K^\perp = 0$ ,  $E^\perp \cap K = 0$ .

Позначимо  $P_0 = P_1 + \dots + P_m$ .

**Теорема 3.** Нехай  $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$  у просторі  $H$  задовольняють умови (3) і нехай  $A_1, \dots, A_n$  — відповідні невід’ємні оператори в  $H_0$ , побудовані вище, та нехай також кожна з пар  $P_0, Q_j, j = 1, \dots, n$ , знаходиться у загальному положенні. Тоді

$$\dim P_0 = \dim Q_j, \quad \ker A_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Навпаки, якщо задано проектори  $P'_1, \dots, P'_m$  та невід’ємні оператори  $A_1, \dots, A_n$  в  $H_0$ , для яких

$$P'_1 + \dots + P'_m = I, \quad A_1 + \dots + A_n = I, \quad \ker A_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

то існує єдиний з точністю до унітарної еквівалентності набір проекторів  $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$  з умовою (3), для яких  $P_0, Q_j, j = 1, \dots, n$ , знаходяться у загальному положенні, і який породжує за наведеною вище конструкцією набір проекторів  $P'_1, \dots, P'_m$  та операторів  $A_1, \dots, A_n$ .

**4. Незвідні зображення.** Позначимо  $\Lambda$  множину всіх мультиіндексів вигляду

$$\alpha = (j_1, k_1, j_2, \dots, k_{l-1}, j_l, k_l, j_1),$$

$$j_s = 1, \dots, m; \quad k_s = 1, \dots, n; \quad s = 1, \dots, l; \quad l = 0, 1, \dots$$

Розглянемо таку множину операторів  $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$ :

$$C_\alpha = P_{j_1} Q_{k_1} P_{j_2} \dots Q_{k_{l-1}} P_{j_l} Q_{k_l} P_{j_1}. \quad (5)$$

**Твердження 2.** Нехай  $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_m$  — незвідний набір проекторів з умовами (3), для яких  $P_j \neq 0, j = 1, \dots, m$ . Тоді  $\dim P_j = 1, j = 1, \dots, m$  тоді і лише тоді, коли оператори  $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$ , утворюють комутативний набір.

Нехай  $\Lambda_i \subset \Lambda$  — підмножина індексів, що починаються та закінчуються на  $i, i = 1, \dots, m$ , так що  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m$ .

**Теорема 4.** Нехай набір проекторів  $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$  породжує незвідне зображення (3), причому:

i)  $P_i \neq 0, i = 1, \dots, m$ ;

ii) для кожного  $j = 1, \dots, n$  пара проекторів  $P_0 = P_1 + \dots + P_m$  та  $Q_j$  знаходяться у загальному положенні;

iii) оператори  $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$ , утворюють комутативний набір.

Тоді  $C_\alpha = c_\alpha P_j, c_\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in \Lambda_j$ , та скінченний набір чисел

$$c_\alpha, \quad |\alpha| \in \{3, 5, 7\},$$

визначає проектори  $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$  однозначно з точністю до унітарної еквівалентності.

**Зауваження.** 1. У загальному (звідному) випадку спектральний розклад комутативного набору нормальних операторів  $C_\alpha, \alpha \in \Lambda$  дає розклад набору  $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$  на незвідні набори.

2. Скінченний набір параметрів, описаний у попередній теоремі, є надлишковим. Для різних конкретних зображень можна вказати різні підмножини цього набору, яких достатньо для відновлення зображення.

3. Наведена теорема не дає опису множини всіх можливих наборів параметрів. Ця множина визначається умовами  $A_1 + \dots + A_n = I, A_j > 0$  в  $\mathbb{C}^m$ .

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Vasilevski N.L.  $C^*$ -algebras generated by orthogonal projections and their applications. *Integr. Equ. Oper. Theory*. 1998. **31**. P. 113–132.
2. Karlovich Yu.I., Pessoa L.V.  $C^*$ -algebras of Bergmann type operators with piecewise continuous coefficients. *Integr. Equ. Oper. Theory*. 2007. **57**. P. 521–565.
3. Стрелец А.В., Фещенко И.С. О системах подпространств гильбертова пространства, удовлетворяющих условиям на углы между каждой парой подпространств. *Алгебра и анализ*. 2012. **24**, № 5. С. 181–214.
4. Кругляк С.А., Самойленко Ю.С. Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов. *Функц. анализ из его прил.* 1980. **14**, вып. 1. С. 60–62.
5. Ашурова Е.Н., Островський В.Л. Про зображення “all but two” алгебр. *Зб. праць Інституту математики НАН України*. 2015. **12**, № 1. С. 8–21.
6. Самойленко Ю.С., Стрелец А.В. О простых  $n$ -ках подпространств гильбертова пространства. *Укр. мат. журн.* 2009. **61**, № 12. С. 1668–1703.
7. Vasilevski N.L. On the structure of Bergmann and poly-Bergmann spaces. *Integr. Equ. Oper. Theory*. 1999. **33**. P. 471–488.

Надійшло до редакції 27.06.2017

REFERENCES

1. Vasilevski, N. L. (1998).  $C^*$ -algebras generated by orthogonal projections and their applications. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 31, pp. 113-132.
2. Karlovich, Yu. I. & Pessoa, L. V. (2007).  $C^*$ -algebras of Bergmann type operators with piecewise continuous coefficients. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 57, pp. 521-565.
3. Strelets, A. V. & Feshchenko, I. S. (2012). On systems of subspaces of a Hilbert space that satisfy conditions on the angles between every pair of subspaces. *St. Petersburg Math. J.*, 24, No. 5, pp. 823–846.
4. Kruglyak, S. A. & Samoilenko, Ju. S. (1980). Unitary equivalence of sets of self-adjoint operators. *Funct. Anal. Appl.*, 14, No. 1, pp. 48-50.
5. Ashurova, E.N. & Ostrovskiy, V.L. (2015). On representations of “all but two” algebras. *Zbirnyk Prats Instytutu Matematyky NAN Ukrainy*, 12, No. 1. pp. 8-21 (in Ukrainian).
6. Samoilenko, Yu. S. & Strelets, A. V. (2009). On simple  $n$ -tuples of subspaces of a Hilbert space. *Ukr. Math. J.*, 61, No. 12, pp. 1956-1994.
7. Vasilevski, N.L. (1999). On the structure of Bergmann and poly-Bergmann spaces. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 33, pp. 471-488.

Received 27.06.2017

Е.Н. Ашурова<sup>1</sup>, В.Л. Островський<sup>2</sup>, Ю.С. Самойленко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Український центр клінічних досліджень компанії “Chiltern”, Київ

<sup>2</sup> Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: work1991@ukr.net, vo@imath.kiev.ua, yurii\_sam@imath.kiev.ua

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АЛГЕБР,  
ПОРОЖДЕННЫХ КОНЕЧНЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ ЕДИНИЦЫ  
И НАБОРОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКТОРОВ

Исследованы свойства представлений инволютивной алгебры, порожденной самосопряженными идемпотентами  $q_1, \dots, q_n$  и  $p_1, \dots, p_m$ , удовлетворяющими соотношениям  $q_1 + \dots + q_n = e$ ,  $p_j p_k = 0$ ,  $j \neq k$ . Соответствующие наборы проекторов в гильбертовом пространстве возникают при исследовании фредгольмовости тёплицевых операторов. В частности, для неприводимых представлений общего положения с  $\dim P_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ , найден набор коммутирующих нормальных операторов, совместный спектр которых определяет соотношение с точностью до унитарной эквивалентности.

**Ключевые слова:** наборы ортопроекторов, тёплицевы операторы.

*E.N. Ashurova*<sup>1</sup>, *V.L. Ostrovskiy*<sup>2</sup>, *Yu.S. Samoilenko*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Chiltern Clinical Research in Ukraine, Kiev

<sup>2</sup> Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: work1991@ukr.net, vo@imath.kiev.ua, yurii\_sam@imath.kiev.ua

ON REPRESENTATIONS OF THE ALGEBRAS GENERATED  
BY A FINITE RESOLUTION OF THE IDENTITY  
AND A COLLECTION OF JOINTLY ORTHOGONAL PROJECTIONS

We study properties of representations of the involutive algebra generated by self-adjoint idempotents,  $q_1, \dots, q_n$  and  $p_1, \dots, p_m$ , which satisfy the conditions  $q_1 + \dots + q_n = e$ ,  $p_j p_k = 0$ ,  $j \neq k$ . The corresponding collections of projections in a Hilbert space arise in the study of the Fredholm properties of Toeplitz operators. In particular, for generic irreducible representations with  $\dim P_j = 1$ ,  $j = 1 \dots, m$ , we have constructed a commuting family of normal operators, whose joint spectrum determines the representation up to unitary equivalence.

**Keywords:** *families of orthoprojections, Toeplitz operators.*