

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.10.028>

УДК 519.85

**Ю.Г. Стоян, А.М. Чугай**

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків

E-mail: [stoyan@ipmach.kharkov.ua](mailto:stoyan@ipmach.kharkov.ua), [chugay.andrey80@gmail.com](mailto:chugay.andrey80@gmail.com)

## **Задача упакування гомотетичних опуклих багатогранників**

*Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю.Г. Стояном*

*На підставі Ф-функції для двох опуклих багатогранників побудована математична модель задачі упакування опуклих гомотетичних багатогранників у прямому паралелепіпеді мінімального об'єму. Наведено деякі особливості поставленої задачі, на підставі яких запропоновано підхід для побудови початкових припустимих точок, швидкий алгоритм пошуку локальних екстремумів і спрямований неповний перебір локальних мінімумів для отримання наближення до глобального мінімуму. Наведено числові приклади.*

**Ключові слова:** *упаковка, гомотетичні багатогранники, оптимізація.*

Задачі упакування тривимірних тіл виникають в різних галузях науки та техніки, оскільки заміна натурних експериментів комп'ютерним моделюванням дозволяє значно заощаджувати матеріальні ресурси та час. Так, наприклад, актуальним застосуванням цих задач є імітаційне моделювання 3D мікроструктур різних матеріалів (в тому числі й наноматеріалів). Останні досягнення у цій галузі пов'язані з розвитком технології комп'ютерної мікротомографії [1, 2]. Також ці задачі застосовуються у логістиці для оптимізації витрат на транспортування вантажів у контейнерах [3], у космічній галузі та в різних задачах компонування [4].

Добре відомо, що задачі упакування тривимірних об'єктів є NP-складними, а тому для пошуку їх наближеного розв'язку використовується досить широкий спектр методів, починаючи від евристичних (евристики, засновані на різних правилах, генетичні алгоритми, імітаційне відпалювання, решітки) до традиційних оптимізаційних методів. Але жоден з відомих нам авторів не розв'язує задачу тривимірного пакування за умови можливості безперервного обертання об'єктів через складність побудови адекватної математичної моделі та проведення великого об'єму обчислень [5]. Представлена робота присвячена розв'язанню саме такої задачі.

Нехай задані опуклі гомотетичні багатогранники  $P_i$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , та кубоїд (прямий прямокутний паралелепіпед)  $C = \{X \in R^3 : w_2 \leq x_1 \leq w_1, l_2 \leq x_2 \leq l_1, \eta_2 \leq x_3 \leq \eta_1\}$ , параметри якого  $w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1, \eta_2$  є змінними. Тоді вектор  $\Upsilon = (w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1, \eta_2)$  визначає розміри  $C$ .

© Ю.Г. Стоян, А.М. Чугай, 2017

Багатогранники  $P_i$  задані вершинами та коефіцієнтами гомотетії  $h_i^\nabla$ ,  $i \in I$ . Вважаємо, що  $1 = h_1^\nabla \geq h_2^\nabla \geq \dots \geq h_n^\nabla$  та хоча б одна з нерівностей виконується строго.

Розміщення  $P_i$  у  $R^3$  визначається вектором трансляції  $v_i = (x_i, y_i, z_i)$  та вектором кутів обертання  $\theta_i = (\phi_i, \psi_i, \omega_i)$ ,  $i \in I$ . Таким чином, вектор  $u_i = (v_i, \theta_i) = (x_i, y_i, z_i, \phi_i, \psi_i, \omega_i)$  визначає розташування  $P_i$  в  $R^3$ , а вектор  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^m$ , де  $m = 6n$ , визначає розташування  $P_i$ ,  $i \in I$ , в  $R^3$ .

Надалі багатогранник  $P_i$  з вектором  $v_i$  та кутами  $\theta_i$  позначимо через  $P_i(u_i)$ , а прямиий прямокутний паралелепіпед  $C$  зі змінними розмірами  $\Upsilon$  — через  $C(\Upsilon)$ .

**Задача.** Необхідно визначити вектор  $u \in R^m$ , який забезпечує розміщення  $P_i(u_i)$ ,  $i \in I$ , без їх взаємного перетину в прямому прямокутному паралелепіпеді  $C(\Upsilon)$  так, щоб його об'єм  $H(\Upsilon) = (w_2 - w_1)(l_2 - l_1)(h_2 - h_1)$  досягав мінімального значення.

На основі  $\Phi$ -функцій [6] математична модель задачі може бути записана у вигляді класичної задачі нелінійного програмування

$$H(\Upsilon^*) = \min_{(u, \Upsilon) \in \Lambda} H(\Upsilon), \quad (1)$$

де

$$\Lambda = \{(u, \Upsilon) \in R^{m+6} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, \quad 0 < i < j \in I, \quad \Phi_i(u_i, \Upsilon) \geq 0, \quad i \in I, \quad w_1 \geq 0, l_1 \geq 0, \quad \eta_1 \geq 0, w_2 - w_1 \geq 0, \quad l_2 - l_1 \geq 0, \quad \eta_2 - \eta_1 \geq 0\}. \quad (2)$$

Доведено, що  $\Lambda = \bigcup_{q=0}^{\zeta} \Lambda_q$ , де кожна з підобластей  $\Lambda_q$  визначається системою нерівностей, ліві частини яких є нескінченно диференційовані функції. Таким чином, для знаходження точки глобального мінімуму задачі (1)–(2) необхідно розв'язати задачу  $H(\Upsilon^*) = \min\{H(\Upsilon^{*q}), q \in Q\}$ , де  $H(\Upsilon^{*q}) = \min_{(u, \Upsilon) \in \Lambda_q} H(\Upsilon), q \in Q$ .

Оскільки  $\zeta \gg n!$ , то за розумний час неможливо знайти розв'язок цієї задачі. Тому для пошуку наближення до глобального мінімуму задачі (1)–(2) пропонується підхід, який складається з наступних етапів: побудова початкових точок, пошук точок локальних мінімумів та їх спрямований неповний перебір для отримання наближення до глобального мінімуму.

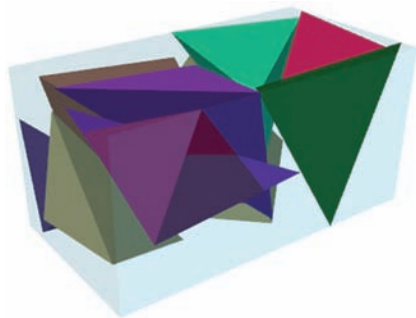
Для отримання початкових точок покриваємо багатогранники  $P_i$  кулями  $S_i$  мінімальних радіусів  $\rho_i^\nabla$ ,  $i \in I$ . Припускаємо, що  $\Upsilon = \Upsilon^0$ , зафіксовано і забезпечує розміщення багатогранників в  $C$ . Радіуси  $\rho_i$  куль  $S_i$ ,  $i \in I$ , є змінними і формують вектор  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \in R^n$ . Це дає можливість сформулювати наступну задачу:

$$\Pi(\rho^0) = \max \Pi(\rho) = \max_{(v, \rho) \in \Omega} \sum_{i=1}^n \rho_i, \quad (3)$$

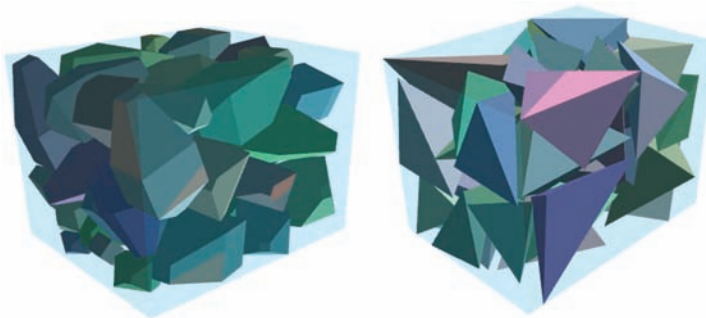
де

$$\Omega = \{(v, \rho) \in R^{4n}, \Phi_{ij}^{SS}(v_i, v_j, \rho_i, \rho_j) \geq 0, \quad 0 < i < j \in I, \quad \Phi_i^S(v_i, \rho_i) \geq 0, \quad i \in I, \quad s_i(\rho_i) = \rho_i - \rho_i^\nabla \geq 0, \quad i \in I\}; \quad (4)$$

$$\Phi_{ij}^{SS}(v_i, v_j, \rho_i, \rho_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - (\rho_i + \rho_j)^2;$$



**Рис. 1.** Результат упакування 10 багатогранників



**Рис. 2.** Результати розміщення 50 різних багатогранників

$$\Phi_i^S(v_i, \rho) = \min\{x_i - \rho_i - \omega_2^0, y_i - \rho_i - l_2^0, z_i - \rho_i - \eta_2^0, \omega_1^0 - x_i - \rho_i, l_1^0 - y_i - \rho_i, \eta_1^0 - z_i + \rho_i\}.$$

Задаємо початкову точку  $(v^0, \rho^0)$ , де  $v_i^0 \in C(\Upsilon^0)$ ,  $\rho^0 = 0$  і для цієї точки обчислюємо точку глобального максимуму  $(v^*, \rho^*)$  задачі (3)–(4).

Після цього беремо багатогранники  $P_i(v_i^*)$  замість куль  $S_i(v_i^*)$ , задаємо випадково кути  $\theta_i^s = (\phi_i^s, \psi_i^s, \omega_i^s) \in [0, \pi]$ ,  $i \in I$ , фіксуємо їх та розв'язуємо задачу

$$H(\Upsilon^*) = \min_{(v, \Upsilon) \in \Gamma \subset R^{3n+6}} H(\Upsilon), \quad (5)$$

де

$$\Gamma = \{(v, \Upsilon) \in R^{3n+6} : \Phi_{ij}(v_i, v_j) \geq 0, \quad 0 < i < j \in I, \quad \Phi_i(v_i, \Upsilon) \geq 0, \quad i \in I, \quad \omega_1 \geq 0, \quad l_1 \geq 0, \quad \eta_1 \geq 0, \quad \omega_2 - \omega_1 \geq 0, \quad l_2 - l_1 \geq 0, \quad \eta_2 - \eta_1 \geq 0\}. \quad (6)$$

Вочевидь,  $\Gamma = \bigcup_{q=0}^{\zeta} \Gamma_q$ , де  $\Gamma_q$  визначається лінійною системою нерівностей. Це означає, що пошук точок локальних мінімумів зводиться до розв'язання послідовності задач лінійного програмування.

Нехай точка  $(v^*, \Upsilon^*)$  є точкою локального мінімуму задачі (5)–(6). Після цього будемо початкову точку  $(u^s, \Upsilon^s) = (v^*, \theta^s, \Upsilon^*)$ . Для цієї початкової точки знаходимо точку  $(u^{0*}, \Upsilon^{0*})$  локального мінімуму задачі (1)–(2).

Спрямований неповний перебір локальних мінімумів задачі (1)–(2) зводиться до розв'язання наступних допоміжних задач.

Припускаємо, що коефіцієнти гомотетії  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$  є змінними. Це дає можливість сформулювати задачу

$$H(\Upsilon) = \min_{Y=(u, \Upsilon, h) \in \Delta} H(\Upsilon), \quad (7)$$

де

$$\Delta = \{Y \in R^{7n+6}, \Phi_{ij}(u_i, u_j, h_i, h_j) \geq 0, \quad 0 < i < j \in I, \quad \Phi_i(u_i, \Upsilon, h_i) \geq 0, \quad (8)$$

$$h_i \geq 0, \quad i \in I, H(\Upsilon^{0*}) - H(\Upsilon) \geq \varepsilon, \quad \omega_1 \geq 0, \quad l_1 \geq 0, \quad \eta_1 \geq 0, \quad \omega_2 - \omega_1 \geq 0, \\ l_2 - l_1 \geq 0, \quad \eta_2 - \eta_1 \geq 0\};$$

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^t 0,1H(\Upsilon^{0*}), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Для початкової точки  $Y^0 = (u^{0*}, \Upsilon^{0*}, h^\nabla)$  знаходимо точку локального мінімуму  $Y^0 = (u^{*1}, \Upsilon^{*1}, h^{*1})$ . Будуємо послідовність  $h_{i_1}^1 \geq h_{i_2}^1 \geq \dots \geq h_{i_n}^1$ . На основі цієї послідовності та послідовності  $1 = h_1^\nabla \geq h_2^\nabla \geq \dots \geq h_n^\nabla$  формуємо точку  $(\tilde{u}, \tilde{h})$ , де  $\tilde{u}_j = u_{i_j}^{*1}$ ,  $\tilde{h}_j = \min\{h_{i_j}^1, h_j^\nabla\}$ ,  $j \in I$ .

Далі для початкової точки  $(\tilde{u}, \tilde{h})$  обчислюємо точку  $(u^0, h^0)$  локального максимуму задачі

$$F(h^*) = \max_{(u, h) \in D} F(h) = \max \sum_{i=1}^n h_i, \quad (10)$$

де

$$D = \{(u, h) \in R^{7n}, \quad \Phi_{ij}(u_i, u_j, h_i, h_j) \geq 0, \quad 0 < i < j \in I, \\ \Phi_i(u_i, h_i) \geq 0, \quad h_i^\nabla - h_i \geq 0, \quad h_i \geq 0, \quad i \in I\}. \quad (11)$$

Якщо  $F(h^0) = \sum_{i=1}^n h_i^0 = \sum_{i=1}^n h_i^\nabla = b$ , то всі  $P_i$ ,  $i \in I$ , пакуються у  $C(\Upsilon^1)$ . У цьому випадку для

початкової точки  $(u^0, \Upsilon^{0*})$  знову розв'язуємо задачу (1)–(2) і так далі. Якщо  $j \neq i_j$ ,  $j \in I$  хоча б для однієї пари індексів і  $F(h^0) < b$ , то збільшуємо  $t$  у формулі (9) на 1 і розв'язуємо задачу (7)–(8) і так далі, поки не отримаємо  $F(h^0) = b$ , або  $j = i_j$ ,  $j \in I$ . У випадку  $F(h^0) = b$  переходимо до розв'язування задачі (1)–(2). Якщо  $j = i_j$ ,  $j \in I$ , то попередня точка локального мінімуму задачі (1)–(2) приймається у якості наближення до точки глобального мінімуму цієї задачі.

Відзначимо, що для пошуку локальних екстремумів сформульованих оптимізаційних задач розроблено спеціальний метод декомпозиції, який дозволяє значно зменшити обчислювальні витрати за рахунок значного зменшення кількості нерівностей у процесі пошуку локальних екстремумів.

#### Параметри розміщення багатогранників

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	9,86	9,61	10,4	10,48	9,58	10,39	10,75	8,99	10,53	10,74
$y_i$	9,53	10,09	10,05	10,03	10,09	10,21	10,14	10,01	10,34	9,66
$z_i$	9,45	10,09	9,94	10,03	10,42	10,10	9,93	10,06	10,06	9,84
$\phi_i$	5,55	2,25	3,68	3,67	1,52	1,17	3,31	2,28	4,19	3,52
$\psi_i$	4,71	-0,75	2,35	2,34	-0,9	3,97	2,53	3,14	5,43	5,53
$\omega_i$	5,55	3,1	-1,23	0,38	-1,52	3,28	2,36	1,6	-1,43	4,84

Наведемо невеликий приклад, який можна використовувати в якості тестового. Нехай задано найпростіший опуклий багатогранник з такими координатами чотирьох вершин:  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$ ,  $(0,0,0,-1)$ . Необхідно упакувати у прямий прямокутний паралелепіпед мінімального об'єму послідовність з 10 заданих багатогранників з такими коефіцієнтами гомотетії: 0,93, 0,92, 0,89, 0,87, 0,83, 0,84, 0,77, 0,75, 0,72, 0,7.

В результаті розв'язання задачі, використовуючи розроблений підхід, отримано точку локального мінімуму, у якій значення об'єму контейнера дорівнює 2,4. Ця точка прийнята в якості наближення до глобального мінімуму задачі, координати її наведено у таблиці, а розміщення багатогранників представлено на рис. 1.

Для того щоб продемонструвати можливості розробленого програмного забезпечення на рис. 2 наведено результати розміщення 50 багатогранників, що мають 16 та 4 вершини.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Wang Y., Lin C.L., Miller J.D. 3D image segmentation for analysis of multisize particles in a packed particle bed. *Powder Technology*. 2016. **301**. P. 160–168. doi: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.05.012>
2. Liu X., Liu J., Cao A. HAP3D-a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem. *Frontiers Inf. Technol. Electronic Eng.* 2015. № 16. P. 380–390. doi: <https://doi.org/10.1631/FITEE.1400421>
3. Verkhoturov M., Petunin A., Verkhoturova G., Danilov K., Kurennov D. The 3D Object Packing Problem into a Parallelepiped Container Based on Discrete-Logical Representation. *IFAC-PapersOnLine*. 2016. **49**, №12. P. 001–005. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.540>.
4. Optimized packings with applications. G. Fasano, J. Pinter (Eds.). New York: Springer, 2015. 326 p. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18899-7>
5. Youn-Kyoung Joung, Sang Do Noh. Intelligent 3D packing using a grouping algorithm for automotive container engineering. *J. Computational Design and Engineering*. 2014. **1**, № 2. P. 140–151. doi: <https://doi.org/10.7315/JCDE.2014.014>
6. Stoyan Yu., Chugay A. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes. *Cybern. Syst. Anal.* 2012, № 48. P. 837–845. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-012-9463-2>

Надійшло до редакції 10.05.2017

#### REFERENCES

1. Wang, Y., Lin, C. L. & Miller, J. D. (2016) 3D image segmentation for analysis of multisize particles in a packed particle bed. *Powder Technology*. 301, pp. 160-168. doi: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.05.012>
2. Liu, X., Liu, J. & Cao, A. (2015) HAP3D-a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem. *Frontiers Inf. Technol. Electronic Eng.*, No. 16. pp. 380-390. doi: <https://doi.org/10.1631/FITEE.1400421>
3. Verkhoturov, M., Petunin, A., Verkhoturova, G., Danilov, K. & Kurennov, D. (2016) The 3D Object Packing Problem into a Parallelepiped Container Based on Discrete-Logical Representation. *IFAC-PapersOnLine*, 49, No. 12, pp. 001-005. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.540>
4. Fasano, G. & Pinter, J. (Eds.) (2015). *Optimized packings with applications*. New York: Springer. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18899-7>
5. Youn-Kyoung, Joung, Sang, & Do, Noh. (2014). Intelligent 3D packing using a grouping algorithm for automotive container engineering. *J. Computational Design and Engineering*, 1, No. 2, pp. 140-151. doi: <https://doi.org/10.7315/JCDE.2014.014>.
6. Stoyan, Yu. & Chugay, A. (2012). Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes. *Cybern. Syst. Anal.*. No. 48, pp. 837-845. doi: <https://doi.org/10.1007/s10559-012-9463-2>

Received 10.05.2017

Ю.Г. Стоян, А.М. Чугай

Институт проблем машиностроения  
им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков  
E-mail: stoyan@ipmach.kharkov.ua, chugay.andrey80@gmail.com

#### ЗАДАЧА УПАКОВКИ ГОМОТЕТИЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

На основании  $\Phi$ -функции для двух выпуклых многогранников построена математическая модель задачи упаковки выпуклых гомотетичных многогранников в прямом параллелепипеде минимального объема. Указаны некоторые особенности поставленной задачи, на основании которых предложены подход к построению начальных допустимых точек, быстрый алгоритм поиска локальных экстремумов и их направленный неполный перебор для получения приближения к глобальному минимуму. Приведены численные примеры.

**Ключевые слова:** упаковка, гомотетичные многогранники, оптимизация.

Yu.G. Stoyan, A.M. Chugay

Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems  
of the NAS of Ukraine, Kharkiv  
E-mail: stoyan@ipmach.kharkov.ua, chugay.andrey80@gmail.com

#### A PROBLEM OF PACKING OF HOMOTHETIC CONVEX POLYTOPES

On the ground of an  $\Phi$ -function for two convex polytopes, a mathematical model of the problem of packing of homothetic convex polytopes into a cuboid of a minimum volume is constructed. A number of characteristics of the mathematical model are pointed out. Based on the characteristics, a way of construction of starting points, a rapid algorithm of searching for local minima, and an original approach to the directed non-exhaustive search for local extrema to obtain a good approximation to a global extremum are offered. Numerical results are given.

**Keywords:** packing, homothetic polytopes, rotations, optimization.