doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.11.010
УДК 531.36

Р.В. Муллажонов, Ш.Н. Абдугаппарова, Ж.В. Мирзаахмедова

Андижанский государственный университет им. З.М. Бабура, Узбекистан
E-mail: mat-fak@rambler.ru

Устойчивость некоторых стационарных нелинейных крупномасштабных систем

Представлено академиком НАН Украины А.А. Мартынюком

Для системы линейных уравнений и соответвующей параметрически возмущенной скалярной функцией нелинейной системы установлены условия однотипного свойства нулевого решения.

Ключевые слова: *система линейных уравнений, возмущение скалярной функцией, устойчивость, неустойчивость.*

Анализ устойчивости движения нелинейных крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях приведен в монографии [1]. Стационарные системы с нелинейными структурными возмущениями исследованы не достаточно полно. Поэтому представляет интерес задача об устойчивости такого рода систем.

Целью этой работы является получение условий устойчивости стационарных систем с нелинейными структурными возмущениями с учетом ранее полученных результатов [2, 3].

Покажем, что имеет место, следующее утверждение.

Теорема 1. *Состояние равновесия* $x = 0$ *системы*

$$x = Ax \tag{1}$$

и системы

$$x = A\varphi(x)x, \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $\mathrm{A} - n \times n$ *постоянная матрица, одновременно будет устойчивым (асимптотически устойчивым) или неустойчивым соответственно при любой скалярной строго положительной функции* $\varphi(x): R^n \to R$.

Доказательство. Пусть для системы (1) построена функция Ляпунова

$$\nu(x) = x^T P x, \tag{3}$$

где $x \in R^n$, и $P - n \times n$ положительно определенная, симметрическая относительно главной диагонали матрица. Тогда имеем

© Р.В. Муллажонов, Ш.Н. Абдугаппарова, Ж.В. Мирзаахмедова, 2017

$$\nu(x(t))|_{(1)} = x^T(A^T P + PA)x,$$

$$\nu(x(t))|_{(2)} = x^T(A^T\varphi(x)P + P\varphi(x)A)x = x^T(A^T P + PA)x\varphi(x) = \nu(x(t))|_{(1)}\,\varphi(x).$$

Так как функция $\varphi(x)$ — строго положительная, то функции $\nu(x(t))|_{(1)}$ и $\nu(x(t))|_{(2)}$ имеют одинаковый знак. Откуда следует справедливость утверждений теоремы 1.

Далее рассмотрим нелинейные системы уравнений возмущенного движения

$$x = f(x), \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R^n$, $f(x): R^n \to R^n$, $f(x) = (f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$, $f(0) = 0$.

Предположим, что $f_j(x) = \sum\limits_{l=1}^{n} f_{jl}(x)x_l$, $\quad j = \overline{1, n}$. При этом систему (4) можно представить в следующем виде:

$$x = A(x)x, \tag{5}$$

где $A(x) = (f_{jl}(x)), \quad j, l = \overline{1, n}$.

Для функции $(f_{jl}(x)), \quad j, l = \overline{1, n}$, существуют линейно независимые строго положительные скалярные функции [3]

$$\varphi_0(x) = c, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$$

с порядком строгости $\varepsilon_i > 0, \quad i = \overline{1, m}$, соответственно, такие, что

$$f_{jl}(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{jl}^{i}\varphi_i(x), \quad j, l = \overline{1, n},$$

где α_{jl}^{i} — некоторые постоянные.

Учитывая это, систему (4) представим в виде

$$x = \left(\sum_{i=0}^{m} A_i\varphi_i(x)\right)x, \tag{6}$$

где $A_i = (\alpha_{jl}^{i}), \quad j, l = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}.$

Для исследования устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (6) вместе с этой системой рассмотрим следующие системы

$$x = A_i x, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m. \tag{7}$$

Лемма 1. *Если матрицы* $A_i, i = 1, 2, \ldots, m$, *невырожденные, симметричные относительно главной диагонали и для каждого* $i (i \leqslant 1 \leqslant m)$ A_i и $-A_i$ *не имеют общих собственных значений, то для каждой матрицы* A_i *существует матрица* $G_{i0} = G_{i0}^T \in R^{n\times n}$ *такая, что матрица*

$$P = A_i^{-1}G_{i0} + G_{i0}^T A_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

удовлетворяет уравнениям

$$A_i^T P + PA_i = G_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{9}$$

где

$$G_i = G_{i0} + G_{i0}^T + A_i^{-1}G_{i0}A_i + (A_i^{-1}G_{i0}A_i)^T, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Доказательство. Если $G_{i0} = G_{i0}^T$, то соотношения (8) равносильны следующим матричным уравнениям относительно матриц G_{i0}

$$A_i^{-1}G_{i0} + G_{i0}A_i^{-1} = P, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{11}$$

Уравнения (11) имеют единственное решение, так как из-за невырожденности матриц A_i для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$ матрицы A_i^{-1} и $-A_i^{-1}$ не имеют общих собственных значений.

Учитывая, что $A_i = A_i^T, \quad i = 1, 2, \ldots, m$, имеем

$$A_i^T P + PA_i = A_i(A_i^{-1}G_{i0} + G_{io}^T A_i^{-1}) + (A_i^{-1}G_{i0} + G_{i0}^T A_i^{-1})A_i = G_{i0} + A_i G_{i0}^T A_i^{-1} + A_i^{-1}G_{i0}A_i + G_{i0}^T =$$
$$= G_{i0} + G_{i0}^T + A_i^{-1}G_{i0}A_i + (A_i^{-1}G_{i0}A_i)^T = G_i.$$

Если выполняются все условия леммы 1 и

$$G_{i0} = A_i H, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{12}$$

где $H \in R^{n\times n}$ — положительно определенная матрица, то матрица $P = H + H^T$ удовлетворяет уравнениям (9).

Действительно, учитывая, что $A_i^T = A_i$, из (8) получим

$$P = A_i^{-1}(A_i H) + (A_i H)^T A_i^{-1} = A_i^{-1}A_i H + H^T A_i A_i^{-1} = H + H^T.$$

Теорема 2. *Пусть в системах* (6) и (7) *матрицы* A_i *и функции* $\varphi_i(x)$ *удовлетворяют условиям*:

а) *матрицы* $A_i \in R^{n\times n}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *невырожденные, симметричные относительно главной диагонали и для каждого* $1 \leqslant i \leqslant m$ A_i *и* $-A_i$ *не имеют общих собственных значений*;

б) $\varphi_i(x)$ — *строго положительные скалярные функции с порядком строгости* $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *соответственно.*

Тогда из устойчивости (асимптотической устойчивости) или неустойчивости состояния равновесия $x = 0$ *всех систем* (7) *следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) или неустойчивость состояния равновесия* $x = 0$ *системы* (6) *соответственно.*

Доказательство. На основе условия *а* теоремы 2 и леммы 1 для систем (7) существует функция Ляпунова

$$\nu(x) = x^T Px, \tag{13}$$

где матрица P положительно определенная, симметричная относительно главной диагонали и имеет вид (8).

Для полной производной функции (13) в силу i-й системы совокупности систем (7) имеем

$$\dot{\nu}(x(t))\big|_{(7)} = x^T A_i^T P + PA_i)x = x^T G_i x, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_m(G_i)\|x\|^2 \leqslant (\nu(x(t))\big|_{(7)} \leqslant \lambda_M(G_i)\|x\|^2, \tag{14}$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2017. № 11

где $\dot{v}(x(t))|_{(7)}$ означает, что производная вычисляется в силу i-й системы совокупности систем (7), G_i имеют вид (10), $\lambda_m(G_i)$ и $\lambda_M(G_i)$ — минимальные и максимальные собственные значения матриц G_i соответственно.

В качестве функции Ляпунова для системы (6) возьмем функцию (13). Ее полная производная в силу системы (6) имеет вид

$$\dot{v}(x(t))|_{(6)} = x^T\left[\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\phi_i(x)\right)^T P + P\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\phi_i(x)\right)\right]x = x^T\left[\sum_{i=1}^{m}\phi_i(x)(A_i^T P + PA_i)\right]x =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\phi_i(x)[x^T(A_i^T P + PA_i)x] = \sum_{i=1}^{m}\phi_i(x)x^T G_i x = \sum_{i=1}^{m}\phi_i(x)\dot{v}(x(t))|_{(7)}\,.$$

Нетрудно проверить справедливость следующих неравенств:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\lambda_m(G_i)\right]\|x\|^2 \leqslant \dot{v}(x)\big|_{(6)} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}\max_{x\in R^n}\varphi_i(x)\lambda_M(G_i)\right]\|x\|^2, \qquad (15)$$

если $\lambda_m(G_i) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$;

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\max_{x\in R^n}\varphi_i(x)\lambda_m(G_i)\right]\|x\|^2 \leqslant \dot{v}(x)\big|_{(6)} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\lambda_M(G_i)\right]\|x\|^2, \qquad (16)$$

если $\lambda_m(G_i) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$.

Из неравенств (14)–(16) и условия $\varepsilon_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$, следует справедливость утверждений теоремы 2.

Пример. Рассмотрим систему четвертого порядка, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
x_1 &= (2 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2\|x\|)x_1 + (x^2 + 2\sin^2\|x\| + 1)x_2 + x_3 + (3e^{x^2} - 2)x_4,\\
x_2 &= (x^2 + 2\sin^2\|x\| + 1)x_1 + (2 - 9e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2\|x\|)x_2 + (3e^{x^2} - 2)x_3 + x_4,\\
x_3 &= x_1 + (3e^{x^2} - 2)x_2 + (1 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2\|x\|)x_3 + (3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2\|x\| - 1)x_4,\\
x_4 &= (3e^{x^2} - 2)x_1 + x_2 + (3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2\|x\| - 1)x_3 + (1 - 6e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2\|x\|)x_4,
\end{aligned} \qquad (17)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$.

В системе (17) выполняются условия $f_i(x) = \sum_{j=1}^{4} f_{ij}(x)x_j, \quad i = 1, 2, 3, 4$, поэтому ее можно представить в виде (5), т. е.

$$x = A(x)x \qquad (18)$$

где

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T,$$

$$A=\begin{pmatrix} 2-6e^{x^2}-x^2-2\sin^2\|x\| & x^2+2\sin^2\|x\|+1 & 1 & 3e^{x^2}-2 \\ x^2+2\sin^2\|x\|+1 & 2-9e^{x^2}-2x^2-4\sin^2\|x\| & 3e^{x^2}-2 & 1 \\ 1 & 3e^{x^2}-2 & 1-6e^{x^2}-x^2-2\sin^2\|x\| & 3e^{x^2}+x^2+2\sin^2\|x\|-1 \\ 3e^{x^2}-2 & 1 & 3e^{x^2}+x^2+2\sin^2\|x\|-1 & 1-6e^{x^2}-2x^2-4\sin^2\|x\| \end{pmatrix}.$$

Обозначим, $\varphi_1(x)=3e^{x^2}-2$ и $\varphi_2(x)=x^2+2\sin^2\|x\|+1$. Нетрудно проверить, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ строго положительные. Тогда система (18) представляется в виде

$$x=A_0x+\varphi_1(x)A_1x+\varphi_2(x)A_2x\,, \tag{19}$$

где $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$,

$$A_0=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для исследования устойчивости состояния равновесия $x=0$ системы (19) вместе с этой системой рассмотрим следующие системы:

$$x=A_0x, \tag{20}$$

$$x=A_1x, \tag{21}$$

$$x=A_2x, \tag{22}$$

Характеристические уравнения матриц A_0 и A_2 имеют вид $(\lambda^2+3\lambda+1)^2=0$ и $\lambda_1=\lambda_2=$ $=-1,5+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\approx-0,382<0$, $\lambda_3=\lambda_4=-1,5-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\approx-2,618<0$, а характеристическое уравнение матрицы A_1 имеет вид $\lambda^4+9\lambda^3+27\lambda^2+30\lambda+9=0$ и $\lambda_1=-3<0$, $\lambda_2\approx-3{,}532<0$, $\lambda_3\approx-1,647<0$, $\lambda_4\approx-0,468<0$.

Итак, состояние равновесия систем (20)—(22) асимптотически устойчиво, поэтому на основе теоремы 2 состояние равновесия $x=0$ системы (19), а также (17) асимптотически устойчиво.

Следствие A. *Если состояние равновесия $x=0$ хотя бы одной системы из совокупности систем* (7) *асимптотически устойчиво, и состояние равновесия $x=0$ остальных систем устойчиво, то состояние равновесия системы* (6) *асимптотически устойчиво.*

Следствие B. *Пусть выполняются все условия теоремы* 2. *Тогда состояние равновесия $x=0$ системы* (6)

а) устойчиво, если $\sum\limits_{i=1}^{m}\varepsilon_i\lambda_M(G_i)\leqslant 0$;

б) асимптотически устойчиво, если $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \lambda_M (G_i) < 0;$

в) неустойчиво, если $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \lambda_M (G_i) > 0.$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Martynytuk A.A., Miladzhanov V.G. Stability Analysis of Nonlinear Systems under Structural Perturbations. Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2014. 253 p.
2. Миладжанов В.Г., Муллажонов Р.В. Анализ устойчивости динамической системы на основе матриц – функций Ляпунова. Ош. Конф. 2005. 56 с.
3. Миладжанов В.Г., Муллажонов Р.В. Об одном методе анализа устойчивости линейных крупномасштабных систем. *Проблемы механики*. 2009. № 2—3. С.112—120.
4. Мартынюк А.А., Муллажонов Р.В. К теории устойчивости стационарных линейных крупномасштабных систем. *Прикл. механика*. 2012. **48**, № 1. С. 121—132.
5. Мартынюк А.А., Муллажонов Р.В. Об одном методе исследования устойчивости нелинейных крупномасштабных систем. *Прикл. механика*. 2010. **46**, № 5. С 125—134.

Поступило в редакцию 18.05.2017

REFERENCES

1. Martynytuk, A. A. & Miladzhanov, V. G. (2014). Stability Analysis of Nonlinear Systems under Structural Perturbations. Cambridge: Cambridge Sci. Publ.
2. Miladzhanov, V. G. & Mullajonov, R. V. (2005). Analysis of the stability of a dynamical system on the basis of Liapunov matrix-valued functions. Osh. Conference. P. 56 (in Russian).
3. Miladzhanov, V. G. & Mullajonov, R. V. (2009). On one method of analyzing the stability of linear large-scale systems. Problems Mechanics. No. 2-3, pp. 112-120 (in Russian).
4. Martynytuk, A. A. & Mullajonov, R. V. (2012). On the theory of stability of stationary linear large-scale systems. Appl. Mechanics. 48, No. 1, pp. 121-132 (in Russian).
5. Martynytuk, A. A. & Mullajonov, R. V. (2010). On a method for investigating the stability of nonlinear large-scale systems. Appl. Mechanics. 46, No. 5, pp. 125-134 (in Russian).

Received 18.05.2017

Р.В. Муллажонов, Ш.Н. Абдугаппарова, Ж.В. Мірзаахмедова

Андижанський державний університет ім. З.М. Бабура, Узбекистан
E-mail: mat-fak@rambler.ru

СТІЙКІСТЬ ДЕЯКИХ СТАЦІОНАРНИХ НЕЛІНІЙНИХ ВЕЛИКОМАСШТАБНИХ СИСТЕМ

Для системи лінійних рівнянь і відповідної параметрично збуреної скалярною функцією нелінійної системи встановлено умови однотипної властивості нульового розв’язку.

Ключові слова: *система лінійних рівнянь, збурення скалярною функцією, стійкість, нестійкість.*

R.V. Mullajonov, Sh.N. Abdugapparova, Zh.V. Mirzaakhmedova

Z.M. Babur Andizhan State University, Uzbekistan
E-mail: mat-fak@rambler.ru

STABILITY OF SOME STATIONARY NONLINEAR LARGE-SCALE SYSTEMS

For a system of linear equations and the corresponding nonlinear system parametrically perturbed by a scalar function, the conditions of the single-type property of the zero solution are established.

Keywords: *system of linear equations, perturbation by a scalar function, stability, instability.*