doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.11.037
УДК 539.3

В.Г. Карнаухов[1], В.І. Козлов[1], Т.В. Карнаухова[2]

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
[2] НТУ України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського"
E-mail: lkarn@inmech.kiev.ua

Вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної пластини з п'єзосенсорами з врахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву

Представлено академіком НАН України В.Д. Кубенком

Представлена модель вимушених резонансних коливань і вібророзігріву в'язкопружних пластин з п'єзосенсорами з врахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву. Методом Бубнова—Гальоркіна одержано наближений аналітичний розв'язок сформульованої задачі для прямокутної шарнірно опертої пластини. Подано аналіз впливу геометричної нелінійності, зсувних деформацій і температури на ефективність роботи п'єзосенсорів.

Ключові слова: *резонансні коливання, геометрична нелінійність, деформації зсуву, температура дисипативного розігріву, п'єзосенсори.*

Для експериментального дослідження вимушених резонансних коливань пластин і їх активного демпфування широко використовуються п'єзосенсори [1]. Всі матеріали при коливаннях мають певні гістерезисні втрати, які суттєво збільшуються для непружних матеріалів. За деяких умов вони призводять до значного підвищення температури дисипативного розігріву (ДР), яка може помітно вплинути на ефективність роботи сенсорів. При резонансних коливаннях не досить тонких пластин та при значній анізотропії матеріалу виникає необхідність враховувати геометричну нелінійність та деформації поперечного зсуву [2] при дослідженні їх резонансних коливань і ДР.

В даній роботі представлена уточнена модель вимушених резонансних коливань і ДР ортотропних в'язкопружних пластин з використанням гіпотез С.П.Тимошенка та адекватних їм гіпотез про розподіл електричних польових величин і температури по товщині пластини.

Постановка задачі. Розглядається тришарова пластина, складена з середнього пасивного (без п'єзоефекту) ортотропного в'язкопружного шару товщиною h_0 і двох зовнішніх шарів товщиною h_1 з трансверсально-ізотропних п'єзоелектричних матеріалів з товщинною поляризацією. Всі властивості п'єзошарів однакові, але вони мають протилежну поляризацію. Пластина навантажена рівномірним поверхневим гармонічним за часом тиском

© В.Г. Карнаухов, В.І. Козлов, Т.В. Карнаухова, 2017

з частотою, близькою до резонансної. Використана декартова система координат (x, y, z), при цьому вісь Oz направлена по товщині пластини. Для моделювання електромеханічних коливань пластини приймаються уточнені гіпотези, наведені в [2—4]. Тоді одержимо спрощені визначальні рівняння електров'язкопружності, представлені в [3, 4]. Для пасивного пружного матеріалу спрощені визначальні рівняння при використанні гіпотез С.П. Тимошенка наведено в [3—6]. З них на основі принципу відповідності [7] знайдемо визначальні рівняння для в'язкопружного матеріалу. З використанням спрощених визначальних рівнянь для активних і пасивних шарів, шляхом інтегрування по повній товщині пластини одержимо визначальні рівняння для зусиль і моментів:

$$N_{xx} = A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2, \ldots, M_{xx} = D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2, \ldots$$
$$Q_x = K_s A_{55}\varepsilon_{13}, \quad Q_x = K_s A_{44}\varepsilon_{23}, \tag{1}$$

Жорсткісні характеристики A_{ij}, D_{ij} наведено в [4]. Для в'язкопружного матеріалу вони є операторами Вольтера.

Для уточненої моделі С.П. Тимошенка нормальний прогин вважається постійним по товщині, а компоненти вектора тангенціальних зміщень u_1, ν_1 апроксимуємо за лінійним законом [6]:

$$w = w(x, y), u_1(x, y, z) = u(x, y) + z\varphi_x(x, y), v_1(x, y, z) = v(x, y) + z\varphi_y(x, y)\,. \tag{2}$$

Величини φ_x, φ_y характеризують незалежний поворот нормалі до пластини.

Вирази для деформацій пластини $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ через $u, v, \varphi_x \varphi_y, w$ представлено, наприклад, в [4, 6].

Універсальні рівняння уточненої теорії пластин (рівняння руху, кінематичні співвідношення, граничні й початкові умови) мають такий же вигляд, як і в механічній теорії пластин [6]. Специфічні особливості поведінки матеріалу описуються наведеними вище визначальними рівняннями. Використовуючи універсальні й визначальні рівняння, одержимо рівняння через зміщення й кути повороту, які збігаються з рівняннями термопружності пластин (10.1.31) — (10. 1. 35) з монографії [5], в яких необхідно лише модифікувати жорсткісні характеристики і дати іншу інтерпретацію температурним членам. Зберігаючи сили інерції лише в нормальному напрямку, представимо ці рівняння у вигляді

$$L_1(u, v, w) = 0, \quad L_2(u, v, w) = 0, \quad L_3(u, v, w, \varphi_x, \varphi_y) = 0,$$
$$L_4(w, \varphi_x, \varphi_y) = 0, \quad L_5(w, \varphi_x, \varphi_y) = 0, \tag{3}$$

вирази для операторів $L_i (i = 1 \div 5)$ наведено в [5]. В них слід всі пружні характеристики замінити на інтегральні оператори Вольтера з використанням алгебри операторів [7]. Наприклад, для оператора L_1 маємо

$$L_1(u,v,w) = A_{11}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + A_{12}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) +$$
$$A_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{4}$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2017. № 11

Оператор $L_2(u, v, w)$ одержимо з (4) за допомогою таких замін: $u \to v, v \to u, x \to y, y \to x$, $A_{11} \to A_{22}$. Оператор L_4 є лінійним і має вигляд

$$L_4 = D_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{66}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y}\right) - K_S A_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x\right) \tag{5}$$

Оператор L_5 одержимо з (5) шляхом замін:

$$\varphi_x \to \varphi_y, \varphi_y \to \varphi_x, x \to y, y \to x, D_{11} \to D_{12}, A_{55} \to A_{44}$$

Оператор L_3 має вигляд

$$L_3 = K_S A_{55}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right) + K_S A_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right) + N(u, v, w) + q(x, y, t) - I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Тут при врахуванні сил інерції тільки в поперечному напрямку

$$N(u, v, w) = N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{7}$$

Для короткозамкнутих електродів заряд Q, який знімається з них, розраховується за формулою [3, 4, 8]:

$$Q = \gamma_{31}(h_0 + h_1)\iint_{(s)}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)dxdy. \tag{8}$$

Таким чином, для визначення показників сенсора необхідно розв'язати задачу електромеханіки і виразити φ_x, φ_y через поперечний прогин. Тоді за формулою (8) можна знайти прогин через показники сенсора.

Наближений аналітичний розв'язок задачі та його аналіз. Оператори L_4, L_5 є лінійними відносно $\varphi_x, \varphi_y w$. Розглянемо резонансні коливання шарнірно опертої пластини в околі деякої (наприклад, першої) власної частоти коливань прямокутної пластини з розмірами $a \leqslant x \leqslant a;\ \ 0 \leqslant y \leqslant b$. Для шарнірного опирання представимо розв'язок задачі та навантаження у вигляді:

$$\begin{gathered} w = W_{mn}\sin k_m x \sin p_n y; \quad \varphi_x = \varphi_{1mn}\cos k_m x \sin p_n y; \\ \varphi_y = \varphi_2 \sin k_m x \cos p_n y \quad (k_m = m\pi / a;\ \ p_n = n\pi / b); \\ q_0 = q_{mn}\sin k_m x \sin p_n y. \end{gathered} \tag{9}$$

Підставляючи ці вирази в оператори L_4, L_5 і розв'язуючи отримані рівняння, матимемо:

$$\varphi_{1mn} = w_{1mn}W_{mn}, \quad \varphi_{2mn} = w_{2mn}W_{mn}. \tag{10}$$

Тут коефіцієнти при W_{mn} є операторами Вольтера, які виражаються через електромеханічні властивості матеріалів. Підставляючи (9) та (10) в оператори L_1, L_2, приходимо до лінійних ної системи інтегро-диференціальних рівнянь відносно u і v:

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+A_{66}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=(C\sin 2kx\cos 2py+C_1\sin kx)W^2,$$
$$A_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+A_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=(D\cos 2kx\sin 2py+D_1\sin py)W^2, \tag{11}$$

де зірочки опущено, а

$$C=-\frac{1}{4}A_{11}k^3-\frac{1}{4}A_{12}kp^2-\frac{1}{2}A_{66}kp^2 \quad C_1=\frac{1}{4}A_{11}k^3-\frac{1}{4}A_{12}kp^2,$$
$$D=-\frac{1}{4}A_{22}p^3-\frac{1}{4}A_{12}k^2p-\frac{1}{2}A_{66}k^2p,\ D_1=\frac{1}{4}A_{22}p^3-\frac{1}{4}A_{12}k^2p. \tag{12}$$

Граничні умови для u і v вибираємо у вигляді

$$u=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0\ (x=0;a);\quad v=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0\ (y=0;b)\,. \tag{13}$$

Тоді отримаємо такий розв'язок системи (11):

$$u=W^2(A\cos 2py+A_1)\sin 2kx;\quad v=W^2(B\cos 2kx+B_1)\sin 2py. \tag{14}$$

Використовуючи одержані розв'язки для φ_x,φ_y,u,v через $W(t)$, з третього рівняння системи (1) методом Бубнова—Гальоркіна одержимо інтегро-диференціальне рівняння з кубічною нелінійністю

$$I_0\ddot{W}+D\dot{W}+(Kw)(GW^2)=q, \tag{15}$$

За допомогою асимптотичних методів нелінійної механіки зведемо рівняння (15) до диференціального рівняння з кубічною нелінійністю

$$\ddot{W}+2\tilde{\mu}_1\dot{W}+\omega_0^2W+K_1w^3)=q_1,\quad q_1=q/I_0\,. \tag{16}$$

Розв'язок цього рівняння і детальний його аналіз міститься в [9].

При вимушених коливаннях з частотою, близькою до резонансної, коли

$$\omega=\omega_0+\delta,\quad \delta/\omega_0<<1\,, \tag{17}$$

квадрат амплітуди коливань $X=|W|^2$ знаходиться з кубічного рівняння [1]:

$$X\left[\left(\delta-\frac{3K_1}{8\omega_0}X\right)^2+\tilde{\mu}_1^2\right]=\frac{q_1^2}{4\omega_0^2}\,. \tag{18}$$

Після визначення W з (10), (14) знаходимо φ_x,φ_y, u і v. Потім з (14) маємо u і v. Знаючи $w,\varphi_x,\varphi_y,u,v$, розраховуємо деформації, а з визначальних рівнянь — зусилля і моменти. З (8) одержуємо

$$Q_{mn}=-4(h_0+h_1)\gamma_{31}\left(\frac{\varphi_{1mn}}{p_n}+\frac{\varphi_{2mn}}{k_m}\right). \tag{19}$$

Підставляючи в (19) вирази (14), маємо

$$Q_{mn} = -4(h_0 + h_1)\gamma_{31}\left(\frac{w_{1mn}}{p_n} + \frac{w_{2mn}}{k_m}\right)w_{mn}\,. \tag{20}$$

Задача электромеханіки розв'язана. З цього рівняння видно, що поведінка модуля заряду з частотою повторює поведінку модуля амплітуди коливань. Для ортотропного матеріалу стаціонарна температура ДР знаходиться з розв'язку рівняння теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке збігається з дисипативною функцією:

$$\bar{\lambda}_{11}\theta_{xx} + \bar{\lambda}_2\theta_{yy}) - (2\delta / h)\theta + D / h = 0 \tag{21}$$

за відповідних граничних умов для температури.

Утримуючи в дисипативній функції члени, пропорційні квадрату амплітуди поперечного зміщення, матимемо

$$D = \frac{\omega}{2}\left\{\begin{aligned} & D''_{11}\left|\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right|^2 + 2D''_{12}\left|\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right| + D''_{22}\left|\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right|^2 + 2D''_{66}\left|\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\right|^2 + \\ & + K_s A''_{44}\left|\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right|^2 + K_s A''_{55}\left|\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x\right|^2 \end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

Підставляючи в (22) одержаний розв'язок задачі електромеханіки, одержимо

$$D = |W|^2 (D_0 + D_1 \cos 2k_m x D_2 \cos 2p_m y + D_{12} \cos 2k_m x \cos 2p_m y)\,. \tag{23}$$

Для випадку теплоізольованих торців пластини розв'язок рівняння теплопровідності (21) з врахуванням (23) визначаємо у вигляді:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos 2kx + \theta_2 \cos 2py + \theta_3 \cos 2kx \cos 2py\,. \tag{24}$$

Константи $\theta_i (i = 0 \div 3)$ легко знайти підстановкою (24) в рівняння (21) і прирівнюванням коефіцієнтів при $1, \cos 2kx, \cos 2py, \cos 2kx \cos 2py$. Через їх громіздкість вирази для них не наводяться. Ці константи пропорційні квадрату амплітуди $|W|^2$:

$$\theta_0 = \psi_0 |W|^2,\ \theta_1 = \psi_1 |W|^2,\ \theta_2 = \psi_2 |W|^2,\ \theta_3 = \psi_3 |W|^2\,. \tag{25}$$

Детальний аналіз поведінки амплітуди коливань з частотою, яка описується кубічним рівнянням (21), наведено в [9]. Ця характеристика має типовий для нелінійних систем вигляд. Поведінка температури ДР аналогічна амплітудно-частотній характеристиці.

З виразу (24) та з фізичних міркувань випливає, що при коливаннях по першій моді максимальна температура досягається в центрі пластини, коли $x = a/2, y = b/2$, і дорівнює

$$\theta_{\max} = |\theta_0| + |\theta_1| + |\theta_2| + |\theta_3| = |W|^2\,\tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta} = (|\psi_0| + |\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3|)\,. \tag{26}$$

Прирівнюючи максимальну температуру до температури, яка відповідає точці деградації матеріалу θ_k, знайдемо критичне механічне навантаження, після досягнення якого сенсор перестає виконувати своє функціональне призначення. З використанням (26) критична амплітуда коливань визначається із співвідношення

$$\left|W_{kr}\right|^2 = X_{kr} = \theta_k / \tilde{\theta}. \tag{27}$$

Підставляючи (27) в (18), одержимо критичне механічне навантаження

$$(q_1)_{kr} = 2\omega_0 \left(\frac{\theta_k}{\tilde{\theta}}\right)^{1/2} \left[\left(\delta - \frac{3K_1}{8\omega_0}\frac{\theta_k}{\tilde{\theta}}\right)^2 + \tilde{\mu}_1^2\right]. \tag{28}$$

Після досягнення механічним навантаженням критичного значення п’єзоматеріал деполяризується і сенсор перестає виконувати своє функціональне призначення.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Шульга Н.А., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п’єзоелектричних пластин. Київ: Наук. думка, 2008. 272 с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974. 446 с.
3. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость. Киев: Наук. думка, 1988. 328 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т. 4).
4. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В. Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п’єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2015. № 95. С. 75—95.
5. Reddy J.N. Theory and analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton etc.: CRC Press. 2007.
6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва: Наука, 1977. 384 с.
7. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. Москва: Машиностроение, 1965. 272 с.
8. Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. Киев: Наук. думка, 2014. 520 с. (Прикладная механика упруго–наследственных сред. В 3-х томах. Т. 4.).
9. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 290 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций, В 5-ти томах. Т. 5).

Надійшло до редакції 09.06.2017

REFERENCES

1. Shul’ga, M. O. & Karlash, V. L. (2008). Rezonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates. Kiev: Naukova Dumka (in Ukrainian).
2. Ambartsumian, S. A. (1974). General theory of anisotropic shells. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Karnaukhov, V. G. & Kyrychok, I. F. (1988). Electrothermoviscoelasticity. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
4. Karnaukhov, V. G., Kozlov, V. I. & Karnaukhova, T. V. (2015). Strength of materials and theory of structures. No. 95, pp. 75-95 (in Russian).
5. Reddy, J. N. (2007). Theory and analysis of elastic plates and shells. Boca Raton etc.: CRC Press.
6. Rabotnov, Yu. N. (1977). Elements of hereditary solid mechanics. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Koroliov, V. I. (1965). Laminated anisotropic plates and shells with reinforced plastics. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. Moscow: Machine-building.
8. Bulat, A. F., Dyrda, V. I., Karnaukhov, V. G., Zviagil’sky, E. L. & Kobets, A. S. (2014). Forced vibrations and dissipative heating of nonelastic bodies. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
9. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F. & Shul’ga, N. A. (1989). Electroelasticity. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).

Received 09.06.2017

В.Г. Карнаухов[1], *В.И. Козлов*[1], *Т.В. Карнаухова*[2]

[1] Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
[2] НТУ "Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского"
E-mai: lkarn@inmech.kiev.ua

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЬЕЗОСЕНСОРАМИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Представлена модель вынужденных резонансных колебаний и виброразогрева вязкоупругих пластин с пьезосенсорами с учетом геометрической нелинейности и деформаций поперечного сдвига. Методом Бубнова—Галеркина получено приближенное аналитическое решение сформулированной задачи для прямоугольной шарнирно опертой пластины. Представлен анализ влияния геометрической нелинейности, деформаций поперечного сдвига и температуры диссипативного разогрева на эффективность работы пьезосенсоров.

Ключевые слова: *резонансные колебания, геометрическая нелинейность, деформации сдвига, температура диссипативного разогрева, пьезосенсоры.*

V.G. Karnaukhov[1], *V.I. Kozlov*[1], *T.V. Karnaukhova*[1]

[1] S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
[2] NTU "Igor Sikorski Kyiv Polytechnic Institute"
E-mai: lkarn@inmech.kiev.ua

FORCED RESONANT VIBRATIONS AND THE VIBROHEATING OF A HINGED VISCOELASTIC PLATE WITH PIEZOSENSORS WITH REGARD FOR A GEOMETRICAL NONLINEARITY AND TRANSVERSE SHEAR STRAINS

A model of forced resonant vibrations and the vibroheating of viscoelastic plates with piezosensors with regard for a geometrical nonlinearity and transverse shear strains is considered. By the Bubnov—Galerkin method, the approximate analytic solution of the formulated problem for a hinged rectangular plate is given. The influence of these factors on the effectiveness of the work of sensors is investigated.

Keywords: *resonant vibrations, geometrical nonlinearity, shear strains, temperature of dissipative heating, piezosensors.*