

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.12.033>

УДК 539

**Л.П. Хорошун, О.И. Левчук**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: lkhoshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

## **Эффективные упругие свойства зернистых стохастических композитов при несовершенной адгезии**

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л.П. Хорошуну*

*Исходя из стохастических уравнений упругости многокомпонентного композитного материала, исследованы эффективные упругие свойства трехкомпонентного композитного материала, состоящего из матрицы, включений и межфазных пористых слоев. Используется подход, в котором трехкомпонентный материал сводится к двухкомпонентному путем замены включений с межфазным слоем эффективными композитными включениями с эквивалентными или эффективными упругими свойствами. Композитные включения моделируются двухкомпонентным матричным материалом, где включения и матрица имеют упругие модули и объемные содержания соответственно реальных включений и межфазных слоев. Построены кривые зависимостей эффективных модулей объемного сжатия и сдвига от объемного содержания включений и пористости межфазных слоев.*

**Ключевые слова:** стохастический композит, многокомпонентный материал, эффективные упругие свойства, эквивалентные свойства, несовершенные граничные условия, пористые межфазные слои.

Для достижения высоких показателей жесткостных и прочностных свойств композитных материалов необходимо обеспечить максимальное нагружение армирующих элементов (дисперсных частиц и волокон). Это требует надлежащего сцепления (адгезии) их с матрицей, которое в идеальном варианте описывается непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений при переходе через границу раздела фаз и носит название совершенных условий на межфазной границе [1–3]. Большинство работ по прогнозированию эффективных упругих свойств композитных материалов исходят из этой идеальной модели контакта на межфазной границе.

В действительности условия на межфазной границе могут отличаться от совершенного контакта, описываемого непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений. Это связано с недостаточным и неравномерным сцеплением матрицы с армирующими частицами и волокнами. Для усиления сцепления и смачивания поверхности наполнителей связующим их покрывают аппретирующими веществами, свойства которых отличаются от соответствующих свойств матрицы и включений [4]. В зоне сцепления матрицы и наполнителя

© Л.П. Хорошун, О.И. Левчук, 2017

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2017. № 12

33

на некоторых участках возможно образование микротрещин и микропор вследствие недостаточного смачивания поверхности наполнителя связующим или аппретом, а также повреждаемости, вызываемой нагрузками в процессе эксплуатации. Эти факторы свидетельствуют о том, что два контактирующих компонента в реальном композитном материале разделены не поверхностью, а некоторым материальным слоем с дефектами в виде микротрещин и микропор. Поэтому моделирование сцепления компонентов совершенными (идеальными) условиями контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений на межфазной границе (поверхности) может приводить к серьезным погрешностям при прогнозировании эффективных упругих свойств композитных материалов, что обусловило появление ряда работ с различными вариантами несовершенных условий контакта матрицы и включений [5–10].

Адекватная модель несовершенных условий контакта матрицы и включения базируется на представлении, что между матрицей и включением существует межфазный материальный слой с некоторыми свойствами, отличными от свойств матрицы и включения [5, 10], причем на поверхностях раздела слоя с матрицей и включением выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. Это дает основание рассматривать межфазный слой как третью фазу.

При прогнозировании эффективных свойств композитного материала, образованного матрицей и включениями с межфазным слоем, применяется подход, в котором трехфазный материал сводится к двухфазному путем замены включения с межфазным слоем эквивалентным включением, т.е. имеющим эквивалентные или эффективные свойства композитного включения [10]. Это дает возможность использовать известные результаты по вычислению эффективных свойств двухфазных материалов.

Наличие дефектов в виде микротрещин и микропор в зонах контакта включений и матрицы подтверждает актуальность исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности как единичных трещин на границе раздела сред [11], так и образования микротрещин и микропор вследствие повреждаемости и их влияния на эффективные свойства композитных материалов [12].

В настоящей работе рассматривается задача об эффективных упругих свойствах зернистых композитных материалов стохастической структуры с дефектами на межфазной границе в виде микропор. Межфазная граница моделируется межфазным слоем, упругие свойства которого отличаются от свойств включений и матрицы. На поверхностях раздела слоя с матрицей и включением выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. Межфазные слои рассматриваются как третий компонент, состоящий из аппретирующих покрытий, приповерхностных частей матрицы и включений, а также дефектов в виде микротрещин и микропор. При этом микротрещины моделируются микропорами, так как некоторая часть материала в окрестности микротрещины не несет нагрузку.

В основу построения положены стохастические уравнения в перемещениях и напряжениях для многокомпонентного материала с изотропными компонентами, которые приводятся к стохастическим интегральным уравнениям соответственно относительно деформаций и напряжений. Методом условных моментов в пренебрежении флуктуациями деформаций и напряжений в пределах компонента задача сводится к системам алгебраических

уравнений относительно средних по компонентам деформаций или напряжений. В случае статистической изотропии упругих свойств многокомпонентного композитного материала решение систем алгебраических уравнений находится в аналитическом виде. При этом эффективные упругие свойства являются изотропными и зависят от упругих свойств компонентов, их объемных содержаний и выбора упругого тела сравнения. Анализ решения задачи для двухкомпонентного матричного композита показывает, что упругие модули объемного сжатия и сдвига тела сравнения следует принимать в виде математических ожиданий соответствующих модулей упругости композита в случае более жесткой матрицы по сравнению с включениями. В противоположном случае следует принимать упругие податливости тела сравнения в виде математических ожиданий соответствующих податливостей компонентов.

На основе изложенной теории исследованы эффективные упругие свойства трехкомпонентного композитного материала, состоящего из матрицы, включений и межфазных пористых слоев. Используется подход, в котором трехкомпонентный материал сводится к двухкомпонентному заменой включений с межфазным слоем эффективными композитными включениями с эквивалентными или эффективными упругими свойствами. Композитные включения моделируются двухкомпонентным матричным материалом, где включения и матрица имеют упругие модули и объемные содержания соответственно реальных включений и межфазных слоев. Построены кривые зависимостей эффективных модулей объемного сжатия и сдвига от объемного содержания включений и пористости межфазных слоев.

**Исходные уравнения.** Будем исходить из представления, что композитный материал состоит как минимум из трех компонентов — матрицы, включений и межфазных слоев между матрицей и включениями. При этом на поверхностях раздела межфазного слоя с матрицей и включением выполняются условия совершенного контакта, обеспечивающие непрерывность перемещений и поверхностных напряжений [3]. Физико-механические свойства стохастического композитного материала описываются статистически однородными случайными функциями координат, а основная задача сводится к определению эффективных (макроскопических) физико-механических свойств макрообъема композитного материала. Если макрообъем композитного материала находится в условиях однородных макродеформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  или макронапряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , определение эффективных упругих свойств композитного материала стохастической структуры [3] в линейной постановке сводится к уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1)$$

соотношениям упругости

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad (2)$$

и Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — соответственно тензоры напряжений и деформаций;  $u_i$  — вектор перемещений;  $\lambda_{ijmn}$  — тензор модулей упругости, являющийся заданной случайной функцией координат. Тензорное поле модулей упругости  $\lambda_{ijmn}$  принимаем статистически однородным, поэтому

напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$  также будут статистически однородными. Масштабы корреляции случайных полей  $\lambda_{ijmn}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  пренебрежимо малы по сравнению с макрообъемом, поэтому они удовлетворяют свойству эргодичности, т.е. усреднение случайных полей по области определения совпадает с усреднением по ансамблю реализаций.

Если заданы макродеформации  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  макрообъема композита, то, подставляя (2), (3) в (1), приходим к уравнениям равновесия в перемещениях

$$(\lambda_{ijmn} u_{m,n})_{,j} = 0 \quad (4)$$

и граничным условиям на поверхности макрообъема

$$u_i|_S = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j. \quad (5)$$

Если на границе макрообъема композита заданы макронапряжения  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , то задача об эффективных упругих постоянных формулируется в напряжениях

$$e_{ikl} e_{jmn} (s_{lnpq} \sigma_{pq})_{,km} = 0, \quad (6)$$

которые следуют из уравнений совместности деформаций, где  $s_{ijmn} = \lambda_{ijmn}^{-1}$  — тензор упругих податливостей;  $e_{ikl}$  — единичный антисимметричный тензор Леви–Чивита. На границе макрообъема задаются поверхностные напряжения

$$\sigma_{ij} n_j|_S = \langle \sigma_{ij} \rangle n_j. \quad (7)$$

Исходя из представления напряжений, деформаций и перемещений в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0, \quad \varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon_{ij}^0, \quad u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0, \quad (8)$$

приведем уравнение (4) и граничное условие (5) соответственно к виду

$$\lambda_{ijmn}^c u_{m,nj}^0 + (\lambda'_{ijmn} \varepsilon_{mn})_{,j} = 0, \quad u_i^0|_S = 0, \quad \lambda'_{ijmn} = \lambda_{ijmn} - \lambda_{ijmn}^c, \quad (9)$$

где  $\lambda_{ijmn}^c$  — тензор модулей упругости однородного тела сравнения.

Пользуясь тензорной функцией Грина  $G_{ip}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})$  для однородной части уравнения (9), приведем его к интегральному уравнению относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \lambda'_{pqmn} \varepsilon_{mn}^{(2)}. \quad (10)$$

Здесь действие интегрального оператора  $K_{ijpq}$  определяется формулой

$$\begin{aligned} K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \varphi^{(2)} &= \\ &= \int_{V^{(2)}} G_{(ip,j)q}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \varphi^{(2)} dV^{(2)} + \int_{S^{(2)}} G_{(ip,j)}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) n_q^{(2)} \varphi^{(2)} dS^{(2)}, \end{aligned} \quad (11)$$

причем индекс в круглых скобках сверху обозначает соответствующую точку пространства;  $n_q$  — направляющие косинусы нормали.

После условного усреднения уравнения (10) приходим к системе алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \sum_{k=1}^N K_{ijpq}^{vk} \lambda'_{pqmn}{}^k \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle \quad (v=1, \dots, N). \quad (12)$$

Здесь матричный оператор  $K_{ijpq}^{vk}$  определяется формулой

$$K_{ijpq}^{vk} = K_{ijpq} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) p_{vk} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}), \quad (13)$$

где  $p_{vk} (x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) = f \left( \left. \varepsilon_{ij}^{(2)} \right| \varepsilon_{ij}^{(1)} \right)$  – вероятность перехода из  $v$ -компонента в точке  $x_r^{(1)}$  в  $k$ -компонент в точке  $x_r^{(2)}$ .

Для композитного материала с изотропными компонентами имеем

$$\lambda_{ijmn}^k = 3K_k V_{ijmn} + 2\mu_k D_{ijmn} \quad (k=1, \dots, N), \quad \lambda_{ijmn}^c = 3K_c V_{ijmn} + 2\mu_c D_{ijmn}, \quad (14)$$

где  $K_k, \mu_k, K_c, \mu_c$  – соответственно модули объемного сжатия и сдвига  $k$ -компонента и тела сравнения;  $V_{ijmn}, D_{ijmn}$  – объемная и девиаторная составляющие единичного тензора  $I_{ijmn}$ , т. е.

$$\begin{aligned} I_{ijmn} &= V_{ijmn} + D_{ijmn}, \quad V_{ijmn} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{mn}, \\ D_{ijmn} &= \frac{1}{2} \left( \delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{mn} \right) \quad (i, j, m, n = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (15)$$

Если вероятности перехода  $p_{vk}(x_i)$  зависят только от модуля вектора  $x_i$ , то зернистый материал с изотропными компонентами будет изотропным в макрообъеме. В этом случае из (13) находим

$$K_{ijpq}^{vk} = L_{ijpq} (\delta_{vk} - c_k), \quad L_{ijpq} = -\frac{1}{5\mu_c (3K_c + \mu_c)} [5\mu_c V_{ijpq} + 3(K_c + 2\mu_c) \dots D_{ijpq}]. \quad (16)$$

С учетом (16) уравнение (12) можно представить в виде

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + L_{ijpq} \left( \lambda'_{pqmn}{}^v \langle \varepsilon_{mn}^v \rangle - \langle \lambda'_{pqmn} \varepsilon_{mn} \rangle \right), \quad (17)$$

откуда после некоторых преобразований получаем решение

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle &= (I_{ijmn} - L_{ijmn} \lambda'_{mnpq}{}^v)^{-1} \langle (I_{pqrs} - L_{pq\alpha\beta} \lambda'_{\alpha\beta rs})^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{rs} \rangle, \\ (v=1, 2, \dots, N; \quad i, j, p, q, m, n, r, s, \alpha, \beta=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (18)$$

Вводя замену

$$\bar{\lambda}_{ijmn} = -(L_{ijmn}^{-1} + \lambda_{ijmn}^c), \quad (19)$$

приведем выражение (18) к окончательному виду

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = (\lambda_{ijmn}^v + \bar{\lambda}_{ijmn})^{-1} \langle (\lambda_{mnpq} + \bar{\lambda}_{mnpq})^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (20)$$

Аналогично, после некоторых преобразований из уравнения (6) и граничного условия (7) находим выражение средних по компонентам напряжений

$$\langle \sigma_{ij}^v \rangle = (s_{ijmn}^v + \bar{s}_{ijmn})^{-1} \langle (s_{mnpq} + \bar{s}_{mnpq})^{-1} \rangle^{-1} \langle \sigma_{pq} \rangle, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{s}_{ijmn} &= -(M_{ijmn}^{-1} + s_{ijmn}^c), \quad s_{ijmn}^k = 3p_k V_{ijmn} + 2r_k D_{ijmn} \quad (k = 1, \dots, N), \\ s_{ijmn}^c &= 3p_c V_{ijmn} + 2r_c D_{ijmn}, \quad M_{ijln} = -\frac{1}{10r_c(3p_c + r_c)} [10r_c V_{ijln} + 3(2p_c + r_c) D_{ijln}], \end{aligned}$$

$p_k, r_k, p_c, r_c$  — соответственно податливости объемного сжатия и сдвига  $k$ -компонента и тела сравнения, которые связаны с соответствующими модулями упругости соотношениями

$$3p_k = \frac{1}{3K_k}, \quad 2r_k = \frac{1}{2\mu_k}, \quad 3p_c = \frac{1}{3K_c}, \quad 2r_c = \frac{1}{2\mu_c}.$$

**Эффективные упругие постоянные.** На основе (20) находим зависимости между макронапряжениями и макродеформациями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (3K^* V_{ijpq} + 2\mu^* D_{ijpq}) \langle \epsilon_{pq} \rangle, \quad (22)$$

где эффективные упругие модули объемного сжатия и сдвига определяются соотношениями

$$\begin{aligned} K^* &= \left\langle \frac{K}{K + \bar{K}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{K + \bar{K}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k K_k}{K_k + \bar{K}} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{K_k + \bar{K}} \right)^{-1}, \\ \mu^* &= \left\langle \frac{\mu}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\mu + \bar{\mu}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k \mu_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\mu_k + \bar{\mu}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Постоянные  $\bar{K}, \bar{\mu}$  связаны с постоянными тела сравнения, согласно (16), (19), формулами

$$\bar{K} = \frac{4}{3} \mu_c, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu_c(9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)}. \quad (24)$$

На основе (21) находим зависимости между макродеформациями и макронапряжениями

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle = (3p^* V_{ijpq} + 2r^* D_{ijpq}) \langle \sigma_{pq} \rangle, \quad (25)$$

где эффективные упругие податливости объемного сжатия и сдвига определяются соотношениями

$$\begin{aligned} p^* &= \left\langle \frac{p}{p + \bar{p}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{p + \bar{p}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k p_k}{p_k + \bar{p}} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{p_k + \bar{p}} \right)^{-1}, \\ r^* &= \left\langle \frac{r}{r + \bar{r}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{r + \bar{r}} \right\rangle^{-1} = \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k r_k}{r_k + \bar{r}} \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{r_k + \bar{r}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Постоянные  $\bar{p}, \bar{r}$  связаны с постоянными тела сравнения формулами

$$\bar{p} = \frac{r_c}{3}, \quad \bar{r} = \frac{r_c(9p_c + 2r_c)}{3(2p_c + r_c)}. \quad (27)$$

В случае двухкомпонентного композитного материала эффективные постоянные (23), (26) можно представить в виде

$$K^* = \frac{K_1 K_2 + \langle K \rangle \bar{K}}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + \bar{K}}; \quad \mu^* = \frac{\mu_1 \mu_2 + \langle \mu \rangle \bar{\mu}}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \bar{\mu}}; \quad p^* = \frac{p_1 p_2 + \langle p \rangle \bar{p}}{c_1 p_2 + c_2 p_1 + \bar{p}}; \quad r^* = \frac{r_1 r_2 + \langle r \rangle \bar{r}}{c_1 r_2 + c_2 r_1 + \bar{r}}. \quad (28)$$

Учитывая (24), (27), легко установить, что между эффективными упругими модулями и податливостями (23), (26), (28) имеют место соотношения

$$3p^* = \frac{1}{3K^*}, \quad 2r^* = \frac{1}{2\mu^*}. \quad (29)$$

При этом они зависят от упругих постоянных компонентов и тела сравнения, а также объемного содержания компонентов. Другие геометрические параметры структуры для данного вида композитных материалов в решение задачи об эффективных свойствах не входят. Это значит, что достаточно ограничиться решением лишь одной задачи — в перемещениях или напряжениях. Вопрос сводится лишь к корректному выбору тела сравнения.

Из решения рассмотренных задач в перемещениях и напряжениях для двухкомпонентного матричного материала следует, что для случая более жесткой матрицы по отношению к включениям необходимо принять

$$K_c = \langle K \rangle = c_1 K_1 + c_2 K_2, \quad \mu_c = \langle \mu \rangle = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2, \quad (30)$$

$$p_c = \left\langle \frac{1}{p} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_2} \right)^{-1}, \quad r_c = \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{r_1} + \frac{c_2}{r_2} \right)^{-1},$$

для противоположного случая необходимо принять

$$p_c = \langle p \rangle = c_1 p_1 + c_2 p_2, \quad r_c = \langle r \rangle = c_1 r_1 + c_2 r_2, \quad (31)$$

$$K_c = \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1}, \quad \mu_c = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{\mu_1} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}.$$

Это подтверждается предельными случаями  $K_1 = \mu_1 = 0$  (закрытые поры),  $K_1 = \mu_1 = \infty$  (абсолютно жесткие включения), где включения и матрица обозначены соответственно индексами 1, 2.

**Эффективные упругие постоянные трехкомпонентного композитного материала.** Воспользуемся подходом, в котором трехкомпонентный материал сводится к двухкомпонентному заменой включений с межфазным слоем эффективными композитными включениями с эквивалентными или эффективными свойствами по аналогии с [10]. Композитные включения моделируем двухкомпонентным матричным материалом на основе включений

и матрицы, имеющих упругие модули и объемные содержания соответственно реальных включений и межфазных слоев.

Обозначим объемные содержания, модули объемного сжатия и сдвига включений, матрицы и межфазных слоев соответственно  $c_1, K_1, \mu_1$ ,  $c_2, K_2, \mu_2$  и  $c_3, K_3, \mu_3$ . Тогда, согласно (24), (27), (30), (31), эффективные (эквивалентные) модули объемного сжатия и сдвига включений с межфазным слоем определяются формулами

$$K_1^* = \frac{K_1 K_3 + (s_1 K_1 + s_3 K_3) \bar{K}_{13}}{s_1 K_3 + s_3 K_1 + \bar{K}_{13}}, \quad \mu_1^* = \frac{\mu_1 \mu_3 + s_1 \mu_1 + s_3 \mu_3}{s_1 \mu_3 + s_3 \mu_1 + \bar{\mu}_{13}},$$

$$s_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_3}, \quad s_3 = \frac{c_3}{c_1 + c_3}, \quad \bar{K}_{13} = \frac{4}{3} \mu_{13}^c, \quad \bar{\mu}_{13} = \frac{\mu_{13}^c (9K_{13}^c + 8\mu_{13}^c)}{6(K_{13}^c + 2\mu_{13}^c)}, \quad (32)$$

$$K_{13}^c = \begin{cases} s_1 K_1 + s_3 K_3, & K_1 \leq K_3, \\ \left( \frac{s_1}{K_1} + \frac{s_3}{K_3} \right)^{-1}, & K_1 \geq K_3, \end{cases} \quad \mu_{13}^c = \begin{cases} s_1 \mu_1 + s_3 \mu_3, & \mu_1 \leq \mu_3, \\ \left( \frac{s_1}{\mu_1} + \frac{s_3}{\mu_3} \right)^{-1}, & \mu_1 \geq \mu_3. \end{cases}$$

Здесь принимается модель двухкомпонентного матричного материала, где включение тождественно реальному включению, а межфазный слой образует матрицу.

На основе (24), (28), (32) находим эффективные упругие постоянные трехкомпонентного композитного материала, образованного матрицей, включениями и межфазными слоями

$$K^* = \frac{K_1^* K_2 + [(c_1 + c_3) K_1^* + c_2 K_2] \bar{K}_{12}^*}{(c_1 + c_3) K_2 + c_2 K_1^* + \bar{K}_{12}^*}, \quad \mu^* = \frac{\mu_1^* \mu_2 + [(c_1 + c_3) \mu_1^* + c_2 \mu_2] \bar{\mu}_{12}^*}{(c_1 + c_3) \mu_2 + c_2 \mu_1^* + \bar{\mu}_{12}^*},$$

$$\bar{K}_{12}^* = \frac{4}{3} \mu_{12}^{*c}, \quad \bar{\mu}_{12}^* = \frac{\mu_{12}^{*c} (9K_{12}^{*c} + 8\mu_{12}^{*c})}{6(K_{12}^{*c} + 2\mu_{12}^{*c})}, \quad (33)$$

$$K_{12}^{*c} = \begin{cases} (c_1 + c_3) K_1^* + c_2 K_2, & K_1^* \leq K_2, \\ \left( \frac{c_1 + c_3}{K_1^*} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1}, & K_1^* \geq K_2, \end{cases} \quad \mu_{12}^{*c} = \begin{cases} (c_1 + c_3) \mu_1^* + c_2 \mu_2, & \mu_1^* \leq \mu_2, \\ \left( \frac{c_1 + c_3}{\mu_1^*} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}, & \mu_1^* \geq \mu_2. \end{cases}$$

Объемные содержания включений, матрицы и межфазных слоев  $c_1, c_2, c_3$  определяются формулами

$$c_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad c_2 = \frac{v_2}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad c_3 = \frac{v_3}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad (34)$$

где  $v_1, v_2, v_3$  — объемы соответственно включений, матрицы и межфазных слоев в некотором макрообъеме композитного материала. Если предположить, что макрообъем содержит  $n$  сферических включений радиуса  $r_0$ , а толщина межфазного слоя равна  $h$ , то приходим к выражениям

$$v_1 = \frac{4}{3} \pi n r_0^3, \quad v_3 = 4 \pi n h r_0^2. \quad (35)$$



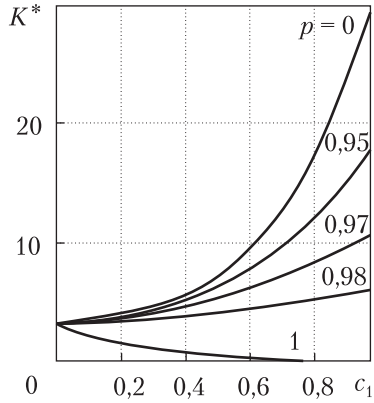


Рис. 1

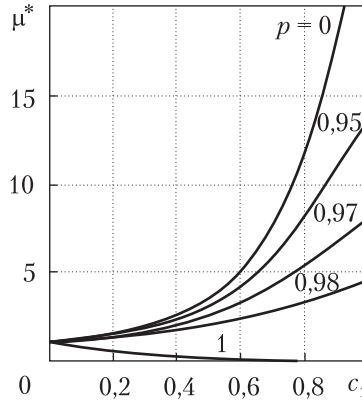


Рис. 2

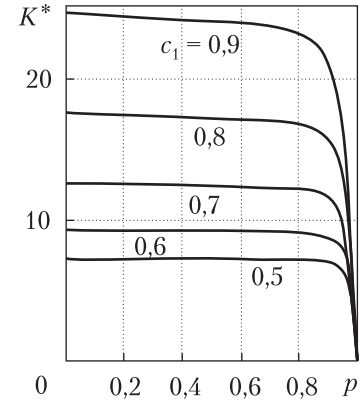


Рис. 3

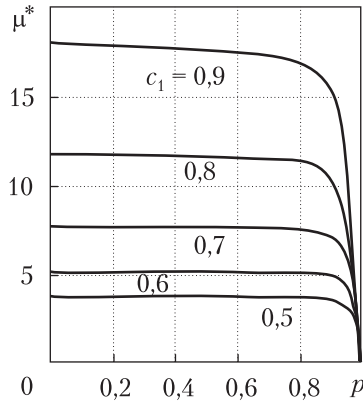


Рис. 4

Из (34), (35) следует зависимость

$$c_3 = 3 \frac{h}{r_0} c_1. \quad (36)$$

**Эффективные упругие постоянные композитных материалов с дефектами на межфазной границе.** Рассмотрим матричный композитный материал зернистой структуры в предположении наличия в межфазном слое дефектов в виде микропор. Тогда, принимая равными нулю модули упругости микропор, на основе (24), (30) получим выражения эффективных модулей объемного сжатия и сдвига пористого межфазного слоя

$$K_3^* = \frac{4K_3\mu_3(1-p)^2}{4\mu_3 + (3K_3 - 4\mu_3)p}, \quad \mu_3^* = \frac{\mu_3(9K_3 + 8\mu_3)(1-p)^2}{9K_3 + 8\mu_3 - (3K_3 - 4\mu_3)p}, \quad (37)$$

где  $p$  – пористость межфазного слоя.

Эффективные модули объемного сжатия и сдвига композитных включений на основе реальных включений и пористых межфазных слоев согласно (32), (37) определяются формулами

$$K_1^* = \frac{K_1K_3^* + (s_1K_1 + s_3K_3^*)\bar{K}_{13}^*}{s_1K_3^* + s_3K_1 + \bar{K}_{13}^*}, \quad \mu_1^* = \frac{\mu_1\mu_3^* + (s_1\mu_1 + s_3\mu_3^*)\bar{\mu}_{13}^*}{s_1\mu_3^* + s_3\mu_1 + \bar{\mu}_{13}^*},$$

$$s_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_3}, \quad \bar{K}_{13}^* = \frac{4}{3}\mu_{13}^{*c}, \quad \bar{\mu}_{13}^* = \frac{\mu_{13}^{*c}(9K_{13}^{*c} + 8\mu_{13}^{*c})}{6(K_{13}^{*c} + 2\mu_{13}^{*c})},$$

$$K_{13}^* = \begin{cases} s_1K_1 + s_3K_3^*, & K_1 \leq K_3^*, \\ \left(\frac{s_1}{K_1} + \frac{s_3}{K_3^*}\right)^{-1}, & K_1 \geq K_3^*, \end{cases} \quad \mu_{13}^* = \begin{cases} s_1\mu_1 + s_3\mu_3^*, & \mu_1 \leq \mu_3^*, \\ \left(\frac{s_1}{\mu_1} + \frac{s_3}{\mu_3^*}\right)^{-1}, & \mu_1 \geq \mu_3^*. \end{cases} \quad (38)$$

На основе (24), (28), (38) находим эффективные модули объемного сжатия и сдвига композитного материала, состоящего из матрицы, включений и пористых межфазных слоев

$$K^* = \frac{K_1^* K_2 + [(c_1 + c_3)K_1^* + c_2 K_2] \bar{K}_{12}^*}{(c_1 + c_3)K_2 + c_2 K_1^* + \bar{K}_{12}^*}, \quad \mu^* = \frac{\mu_1^* \mu_2 + [(c_1 + c_3)\mu_1^* + c_2 \mu_2] \bar{\mu}_{12}^*}{(c_1 + c_3)\mu_2 + c_2 \mu_1^* + \bar{\mu}_{12}^*},$$

$$\bar{K}_{12}^* = \frac{4}{3} \mu_{12}^{*c}, \quad \bar{\mu}_{12}^* = \frac{\mu_{12}^{*c} (9K_{12}^{*c} + 8\mu_{12}^{*c})}{6(K_{12}^{*c} + 2\mu_{12}^{*c})},$$

$$K_{12}^{*c} = \begin{cases} (c_1 + c_3)K_1^* + c_2 K_2, & K_1^* \leq K_2, \\ \left( \frac{c_1 + c_3}{K_1^*} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1}, & K_1^* \geq K_2 \end{cases}, \quad \mu_{12}^{*c} = \begin{cases} (c_1 + c_3)\mu_1^* + c_2 \mu_2, & \mu_1^* \leq \mu_2, \\ \left( \frac{c_1 + c_3}{\mu_1^*} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}, & \mu_1^* \geq \mu_2. \end{cases} \quad (39)$$

При  $p = 0$  из (39) следуют соотношения (33).

**Численные результаты.** Численное исследование проведено для изотропных квазисферических включений алюмоборосиликатного стекла и матрицы из отвержденного эпоксидного связующего с упругими модулями объемного сжатия и сдвига соответственно [13]:

$$K_c = 33,339 \text{ ГПа}, \quad \mu_c = 25 \text{ ГПа}; \quad K_g = 3,333 \text{ ГПа}, \quad \mu_g = 1,111 \text{ ГПа}. \quad (40)$$

Вычисления проводили для несовершенных условий контакта компонентов в виде наличия межфазных пористых слоев между матрицей и включениями, рассматриваемых как третий компонент композитного материала. Аппретирующее покрытие включений нужно принимать с упругими модулями, промежуточными между модулями матрицы и включений. В безразмерных единицах, представляющих отношения соответствующих модулей к модулю сдвига эпоксидной матрицы  $\mu_g$ , принимаем их, согласно (40), следующими:

$$K_1 = 30, \quad \mu_1 = 22,5; \quad K_2 = 3, \quad \mu_2 = 1; \quad K_3 = 16,5, \quad \mu_3 = 11,75. \quad (41)$$

Объемное содержание третьего компонента определяется формулой (36), где отношение толщины межфазного слоя  $h$  к радиусу сферического включения  $r_0$  принято равным 0,01.

На рис. 1–4 приведены графики зависимостей эффективных модулей объемного сжатия  $K^*$  и сдвига  $\mu^*$  от объемного содержания включений  $c_1$  при заданных пористостях  $p$  межфазного слоя, а также от пористости  $p$  при заданных объемных содержаниях  $c_1$  включений, вычисленных согласно формулам (37)–(39) и значениям (41). Здесь объемное содержание включений  $c_1$  находится в допустимом интервале  $0 \leq c_1 < 0,97$ .

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Eshelby J.D. The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society*. 1957. **A241**. P. 376–396.
2. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*. 1963. **11**. P. 357–372.
3. Khoroshun L.P. Mathematical Models and Methods of the Mechanics of Stochastic Composites (Review). *Int. Appl. Mech.* 2000. **36**, № 10. P. 1284–1316

4. Современные композиционные материалы. Браутман Л. и Крок Р. (ред.). Москва: Мир. 1970. 672 с.
5. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. Mater.* 2001. **33**. P. 309–323.
6. Gu S.T., He Q.C. Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interphase as imperfect interfaces. *J. Mech. Phys.* 2011. **59**. P. 1413–1426.
7. Gu S.T., Liu J.T., He Q.C. Size-dependent effective elastic moduli of particulate composites with interfacial displacement and traction discontinuities. *Int. J. Solids Struct.* 2014. **51**. P. 2283–2296.
8. Hashin Z. Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface. *Mech. Mater.* 1990. **8**. P. 333–348.
9. Hashin Z. The spherical inclusion with imperfect interface. *J. Appl. Mech.* 1991 **58**. P. 444–449.
10. Hashin Z. Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids*. 2002. **50**. P. 2509–2537.
11. Khoroshun L.P. Discretization and Numerical Solution of a Plane Problem in the Mechanics of Interfacial Cracks. *Int. Appl. Mech.* 2017. **53**, № 1. P. 76–88.
12. Khoroshun L.P. Deformation and Short-Term Damage of a Physically Nonlinear Unidirectional Fibrous Composite. *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, № 3. P. 272–281.
13. Креггерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов. *Механика композитных материалов*. 1988. № 3. С.433–441.

Поступило в редакцию 26.06.2017

#### REFERENCES

1. Eshelby, J. D. (1957). The determination of the Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems. *Proceedings of the Royal Society*, A241, pp. 376-396.
2. Hill, R. (1963). Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*, 11, pp. 357-372.
3. Khoroshun, L. P. (2000). Mathematical Models and Methods of the Mechanics of Stochastic Composites (Review). *Int. Appl. Mech.*, 36, No. 10, pp. 1284-1316.
4. Brautman, L. & Krok, P. (Eds.). (1970). *Modern composite materials*. Moscow: Mir.
5. Benveniste, Y. & Miloh, T. (2001). Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. Mater.*, 33, pp. 309-323.
6. Gu, S. T. & He, Q. C. (2011). Size-dependent effective elastic moduli of particulate composites with interfacial displacement and traction discontinuities. *J. Mech. Phys.*, 59, pp. 1413-1426.
7. Gu, S. T., Liu, J. T. & He, Q. C. (2014). Size-dependent effective elastic moduli of particulate composites with interfacial displacement and traction discontinuities. *Int. J. Solids Struct.*, 51, pp. 2283-2296.
8. Hashin, Z. (1990). Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface. *Mech. Mater.*, 8, pp. 333-348.
9. Hashin, Z. (1991). The spherical inclusion with imperfect interface. *J. Appl. Mech.*, 58, pp. 444-449.
10. Hashin, Z. (2002). Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 50, pp. 2509-2537.
11. Khoroshun, L. P. (2017). Deformation and Short-Term Damage of a Physically Nonlinear Unidirectional Fibrous Composite. *Int. Appl. Mech.*, 53, No. 1, pp. 76-88.
12. Khoroshun, L. P. (2016). Deformation and Short-Term Damage of a Physically Nonlinear Unidirectional Fibrous Composite. *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 3, pp. 272-281.
13. Kreggers, A. F. (1988). *Mekhanika kompozitnyh materialov*, No. 3, pp. 433-441 (in Russian).

Received 26.06.2017

*Л.П. Хорошун, О.І. Левчук*

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: lkhoshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

**ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ  
ЗЕРНИСТИХ СТОХАСТИЧНИХ КОМПОЗИТІВ  
ПРИ НЕДОСКОНАЛІЙ АДГЕЗІЇ**

Виходячи з стохастичних рівнянь пружності багатокомпонентного композитного матеріалу, досліджено ефективні пружні властивості трикомпонентного композитного матеріалу, що складається з матриці, включень і міжфазних пористих шарів. Використовується підхід, в якому трикомпонентний матеріал зводиться до двокомпонентного шляхом заміни включень з міжфазним шаром ефективними композитними включеннями з еквівалентними або ефективними пружними властивостями. Композитні включення моделюються двокомпонентним матричним матеріалом, де включення і матриця мають пружні модулі та об'ємний вміст відповідно до реальних включень і міжфазних шарів. Побудовано криві залежностей ефективних модулів об'ємного стиску і зсуву від об'ємного вмісту включень і пористості міжфазних шарів.

**Ключові слова:** *стохастичний композит, багатокомпонентний матеріал, ефективні пружні властивості, еквівалентні властивості, недосконалі граничні умови, пористі міжфазні шари.*

*L.P. Khoroshun, O.I. Levchuk*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: lkhoshun@ukr.net, 2013levchuk@gmail.com

**EFFECTIVE ELASTIC PROPERTIES  
OF GRANULAR STOCHASTIC COMPOSITES  
UNDER IMPERFECT ADHESION**

Proceeding from the stochastic equations of elasticity of a multicomponent composite, the effective elastic properties of a three-component composite consisting of a matrix, inclusions, and interphase porous layers are investigated. An approach, in which the three-component material is reduced to a two-component one by replacing the inclusions with the interphase layer by effective composite inclusions with equivalent or effective elastic properties, is used. Composite inclusions are modeled by a two-component matrix material, where the inclusions and the matrix have elastic moduli and volume contents according to the real inclusions and interphase layers, respectively. The curves of the dependences of the effective moduli of volume compression and shear on the volume content of inclusions and the porosity of the interphase layers are constructed.

**Keywords:** *stochastic composite, multicomponent material, effective elastic properties, equivalent properties, imperfect interface conditions, porous interphase layers.*