

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.01.021>

УДК 517.9:519.6

**В.А. Богаенко, В.М. Булавацкий**

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев

E-mail: sevab@ukr.net, v\_bulav@ukr.net

## **Численное моделирование дробно-дифференциальной динамики процесса фильтрационно-конвективной диффузии на основе параллельных алгоритмов для кластерных систем**

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А.Н. Химичем*

*В рамках дробно-дифференциальной математической модели аномального конвективно-диффузионного процесса в условиях массообмена и плоского фильтрационного поля, выполнена постановка соответствующей двухмерной нестационарной краевой задачи и изложена конечноразностная методика получения ее приближенного решения, основанная на применении локально одномерного метода в области комплексного потенциала течения. Разработаны параллельные алгоритмы расчета задачи для кластерных систем, приведены результаты тестирования их быстродействия и результаты численных экспериментов по моделированию динамики изучаемого процесса.*

**Ключевые слова:** аномальный конвективно-диффузионный процесс, массообмен, плосковертикальная фильтрация, уравнение диффузии дробного порядка, краевые задачи, численное моделирование, параллельные алгоритмы.

Разработка методов математического моделирования конвективно-диффузионной динамики растворимых веществ при фильтрации из источников загрязнений грунтовых вод является весьма актуальным научным направлением как в вопросах охраны водных ресурсов, так и во многих других гидроэкологических исследованиях [1]. Актуальной является также проблема повышения степени адекватности существующих количественных моделей конвективно-диффузионных процессов при фильтрации в геопористых средах. Особенно это касается систем со сложной пространственно-временной структурой, для которых характерны эффекты памяти, пространственной нелокальности и самоорганизации. В этих условиях использование для моделирования динамики указанных процессов классических математических моделей не всегда корректно и прогресс в моделировании динамики таких процессов связан с использованием подхода, базирующегося на применении формализма интегро-дифференцирования дробного порядка [2–5].

Настоящее сообщение посвящено математическому моделированию локально-неравновесного во времени конвективно-диффузионного процесса в пористой среде со слож-

ной пространственно-временной структурой, для которого не выполняется классический закон диффузии Фика. Рассматривается новая дробно-дифференциальная математическая модель, предназначенная для исследования неравновесной динамики процесса конвективной диффузии растворимых веществ в схеме плосковертикальной установившейся фильтрации со свободной границей. Для указанной фильтрационной схемы поставлена соответствующая двумерная нестационарная краевая задача, разработана и апробирована методика ее численного решения с использованием параллельных алгоритмов для кластерных систем.

**Дробно-дифференциальная математическая модель конвективно-диффузионного процесса и постановка краевой задачи.** Запишем уравнение релаксационного закона Фика в виде [6, 7]

$$\bar{q} + \tau_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -d \nabla C(x, y, t) + \bar{v} C(x, y, t), \quad (1)$$

где  $\bar{q}$  — конвективно-диффузионный поток;  $C$  — концентрация растворимых веществ в жидкой фазе;  $\bar{v}$  — вектор скорости фильтрации;  $d$  — коэффициент конвективной диффузии (гидродинамической дисперсии);  $\nabla$  — оператор Гамильтона;  $\tau_q$  — параметр релаксации потока;  $x, y, t$  — геометрические и временная переменные соответственно.

Предполагая выполненным обобщенное уравнение материального баланса [7], из соотношения (1), с учетом уравнения неразрывности фильтрационного потока, получаем следующее уравнение для концентрации диффундирующего вещества в условиях массообмена (неравновесная необратимая сорбция):

$$\sigma (D_t^{(\alpha)} + \tau_q D_t^{(\alpha+1)}) C(x, y, t) = d \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - v_x \frac{\partial C}{\partial x} - v_y \frac{\partial C}{\partial y} - \gamma C, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2)$$

где  $v_x, v_y$  — проекции вектора скорости на оси  $O_x$  и  $O_y$  соответственно;  $\sigma$  — пористость среды;  $D_t^{(\alpha)}$  — оператор дробного дифференцирования Капуто—Герасимова по переменной  $t$  порядка  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) [2, 3];  $\gamma$  — параметр массообмена.

В рамках неклассической математической модели конвективной диффузии, базирующейся на уравнении (2), задача моделирования дробно-дифференциальной динамики неравновесного во времени конвективно-диффузионного процесса в случае плосковертикальной установившейся фильтрации со свободной поверхностью из рек или каналов (согласно фильтрационной схеме, приведенной в [8, с.155]) сводится к решению в области  $G_z \times (0, +\infty)$  ( $G_z$  — область течения) уравнения (2) при следующих краевых условиях:

$$C|_{\gamma} = C_1, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial n} \right|_{\gamma_i} = 0, \quad C(x, y, 0) = 0, \quad C'_t(x, y, 0) = 0, \quad (3)$$

где  $C_1$  — заданная концентрация растворимых веществ на входе фильтрационного потока с границей  $\gamma$ ;  $\gamma_i$  ( $i=1,2$ ) — границы области фильтрации, являющиеся линиями тока;  $n$  — внешняя нормаль к соответствующей кривой.

Поскольку решение собственно фильтрационной задачи известно [8] (то есть известна характеристическая функция течения  $z = f(\omega)$ ), то, переходя в задаче (2), (3) к новым пере-

менным  $(\varphi, \psi)$  — точкам геометрически более простой области комплексного потенциала течения  $G_\omega = \{(\varphi, \psi) : 0 < \varphi < +\infty, 0 < \psi < Q\}$ , имеем

$$\sigma(D_t^{(\alpha)} + \tau_q D_t^{(\alpha+1)})C(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \left( d\Delta C(\varphi, \psi, t) - \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right) - \gamma C, \quad (4)$$

$$(\varphi, \psi, t) \in G_\omega \times (0, +\infty),$$

$$C(0, \psi, t) = C_1, \quad \frac{\partial C}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0, \psi=Q} = 0, \quad C(\varphi, \psi, 0) = 0, \quad C'_t(\varphi, \psi, 0) = 0, \quad (5)$$

где  $Q$  — фильтрационный расход [8];  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ ;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$  — оператор Лапласа.

Вводя в рассмотрение новые переменные и параметры соотношениями

$$\varphi' = \frac{\varphi}{Q}, \quad \psi' = \frac{\psi}{Q}, \quad t' = \left( \frac{v_0^2}{Q} \right)^{1/\alpha} t, \quad C' = \frac{C}{C_1}, \quad v' = \frac{v}{v_0}, \quad d' = \frac{d}{Q}, \quad \tau'_q = \left( \frac{v_0^2}{Q} \right)^{1/\alpha} \tau_q \quad (6)$$

и опуская в дальнейшем знак "штрих", получаем в области  $G_\omega \times (0, +\infty)$  краевую задачу

$$\sigma(D_t^{(\alpha)} + \tau_q D_t^{(\alpha+1)})C(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \left( d\Delta C - \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right) - \gamma C, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (7)$$

$$C(0, \psi, t) = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0, \psi=1} = 0, \quad C(\varphi, \psi, 0) = 0, \quad C'_t(\varphi, \psi, 0) = 0, \quad (8)$$

где  $G_\omega = \{(\varphi, \psi) : 0 < \varphi < +\infty, 0 < \psi < 1\}$  — горизонтальная полуполоса.

Ниже кратко излагается конечноразностная методика получения приближенного решения краевой задачи (7), (8).

Вводя в рассмотрение сеточную область  $\omega_{h_1, h_2, \tau}$  ( $h_1, h_2, \tau$  — шаги сетки по геометрическим переменным  $\varphi, \psi$  и времени  $t$  соответственно), поставим в соответствие рассматриваемой краевой задаче следующий аналог локально одномерной [9] разностной схемы А.А. Самарского:

$$\frac{\sigma}{2} \left( \Delta_t^{(\alpha)} \bar{C} + \tau_q \Delta_t^{(\alpha+1)} \bar{C} \right) = v^2 (d \bar{C}_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}} - \bar{C}_{\bar{\varphi}}) - \frac{\gamma}{2} \bar{C}, \quad (9)$$

$$\frac{\sigma}{2} \left( \Delta_t^{(\alpha)} \hat{C} + \tau_q \Delta_t^{(\alpha+1)} \hat{C} \right) = v^2 d \hat{C}_{\bar{\psi}\bar{\psi}} - \frac{\gamma}{2} \hat{C}. \quad (10)$$

Здесь

$$\hat{C} = C^{j+1}; \quad \bar{C} = C^{j+\frac{1}{2}}; \quad C = C^j; \quad t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{\tau}{2};$$

$\Delta_t^{(\alpha)}, \Delta_t^{(\alpha+1)}$  — разностные аналоги операторов дробного дифференцирования  $D_t^{(\alpha)}, D_t^{(\alpha+1)}$  соответственно (дискретная аппроксимация  $D_t^{(\alpha)}, D_t^{(\alpha+1)}$  определяется аналогично [10]).

Расписывая в соотношениях (9), (10) разностные операторы и приводя подобные члены, получаем на полуцелом и целом временных слоях следующие системы уравнений:

$$\tilde{A}_{ik}C_{i+1,k}^{j+\frac{1}{2}} - \tilde{B}_{ik}C_{ik}^{j+\frac{1}{2}} + \tilde{S}_{ik}C_{i-1,k}^{j+\frac{1}{2}} = \Psi_{ik}^j, \quad i = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, n}; \quad j = \overline{0, N}, \quad (11)$$

$$\tilde{P}_{ik}C_{i,k+1}^{j+1} - \tilde{Q}_{ik}C_{ik}^{j+1} + \tilde{R}_{ik}C_{i,k-1}^{j+1} = M_{ik}^j, \quad i = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, n}; \quad j = \overline{0, N}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{ik}^j = & \frac{\sigma}{\tau\Gamma(2-\alpha)} \left[ \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{j-1} \gamma_s^{(j)} (C_{ik}^{s+1} - C_{ik}^s) - \left(\frac{\tau}{2}\right)^{1-\alpha} C_{ik}^j + \frac{2\tau_q}{\tau^\alpha} (C_{ik}^{j-1/2} - 2C_{ik}^j) + \right. \\ & \left. + \frac{2\tau_q}{\tau} \sum_{s=0}^{j-1} b_s^{(j)} (C_{ik}^{s+1/2} - 2C_{ik}^s + C_{ik}^{s-1/2}) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} M_{ik}^j = & \frac{\sigma}{\tau\Gamma(2-\alpha)} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{j-1} b_s^{(j)} (C_{ik}^{s+1} - C_{ik}^s) + \left(\frac{\tau}{2}\right)^{1-\alpha} \left[ (2^{1-\alpha} - 1)(C_{ik}^{j+1/2} - C_{ik}^j) - C_{ik}^{j+1/2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2\tau_q}{\tau^\alpha} (C_{ik}^j - 2C_{ik}^{j+1/2}) + \frac{2\tau_q}{\tau} \sum_{s=0}^{j-1} b_s^{(j)} (C_{ik}^{s+1} - 2C_{ik}^{s+1/2} + C_{ik}^s) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

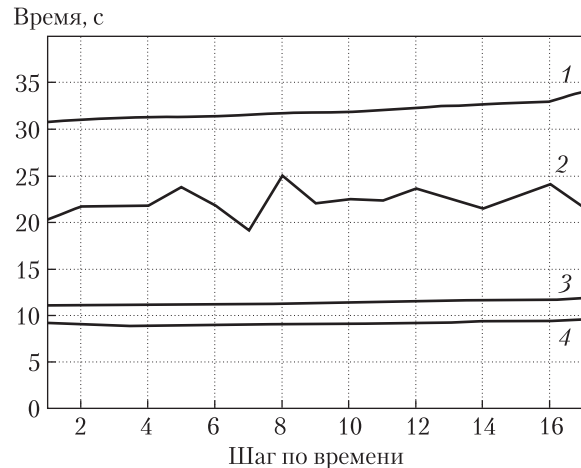
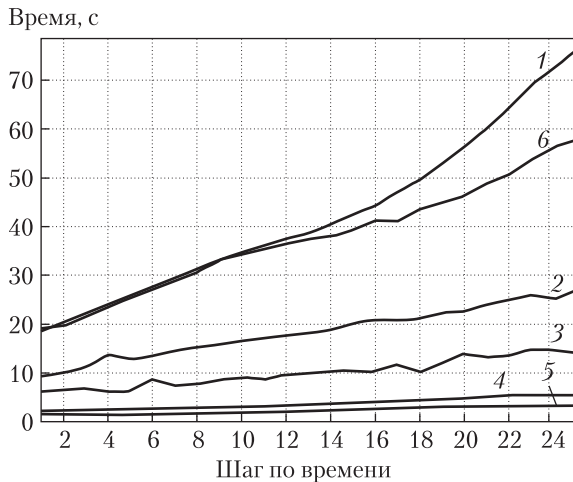
(Остальные обозначения ввиду громоздкости соответствующих формул здесь не приводятся).

Разностные уравнения систем (11), (12) являются трехточечными и эффективно решаются методом прогонки [9]. Последующий переход в физическую область  $G_z$  осуществляется согласно соотношениям (9), (10) из работы [5].

**Параллельные алгоритмы расчета.** Локально одномерную схему расщепления с решением трёхдиагональных систем линейных алгебраических уравнений методом прогонки предлагается распараллеливать для кластерных систем с использованием красно-черного внахлест распределения данных по аналогии со схемой, описанной в [11, 12] (алгоритм 1). При размере  $(n, m)$  исходной сетки каждый из  $N$  процессов вычисляет значения прогоночных коэффициентов и искомой функции для  $N$  блоков ячеек размера  $\left(\frac{n}{N}, \frac{m}{N}\right)$ . Прямые и обратные шаги прогонок выполняются параллельно за  $N$  шагов, после каждого из которых производится синхронизация данных между процессами.

При увеличении номера шага по времени на время работы алгоритма основное влияние оказывает быстродействие подсистемы памяти и эффективность работы кеша. Улучшение последней достигается путем предварительного (до основного цикла определения значений прогоночных коэффициентов) двухуровневого частичного вычисления указанных сумм (алгоритм 1а).

Алгоритмы вычисления прогоночных коэффициентов и обратного хода прогонок для дополнительного ускорения расчетов могут быть распараллелены для исполнения графическими процессорами (GPU). При этом (алгоритм 2) каждый поток параллельной программы проводит независимые вычисления в строке/колонке ячеек сетки. Для дополнительного распараллеливания (алгоритм 2а) при вычислении сумм (13), (14) одна строка/



**Рис. 1.** Время решения задачи на сетке размером  $3000 \times 3000$  с использованием алгоритма 1 (число процессов: 1 – 1, 2 – 2, 3 – 4, 4 – 8, 5 – 12) и алгоритма 1a (кривая 6 – 1 процесс)

**Рис. 2.** Время решения задачи для сетки размером  $3000 \times 3000$  (количество задействованных GPU: кривая 1 – 2, кривая 2 – 4, кривая 3 – 8, кривая 4 – 12)

колонка ячеек может обрабатываться блоком потоков, каждый из которых вычисляет частичную сумму, после чего поток с индексом 0 суммирует полученные результаты и проводит основные вычисления.

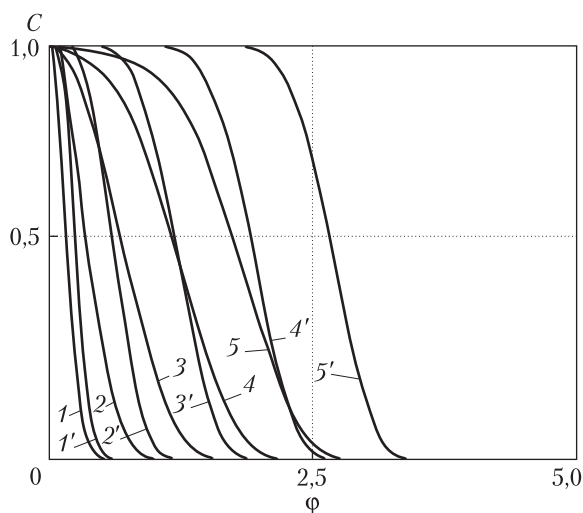
Быстродействие алгоритма 2 так же, как и алгоритма 1, линейно зависит от номера шага по времени и от размера сетки. Коэффициенты этих линейных зависимостей при этом зависят от количества вычислительных ресурсов графического процессора.

Дополнительное ускорение можно получить путем использования для проведения вычислений как графического, так и центрального процессоров (алгоритм 3): при проведении прогонок вычисления в блоке  $(1, \dots, n_x)$  колонок и блоке  $(1, \dots, n_y)$  строк исполняются CPU параллельно с исполнением на GPU вычислений в остальных колонках и строках. После проведения прогонок выполняется синхронизация значений искомой функции между памятью CPU и GPU.

Предполагается, что подходы к выбору размера  $n_x$  основываются либо на фиксированном значении, не требующем модификации алгоритма 3, либо на динамическом изменении по эвристическому критерию. При изменении размера  $n_x$  в процессе вычислений необходимо выполнять дополнительные операции синхронизации.

**Тестирование быстродействия параллельных алгоритмов.** Быстродействие параллельных алгоритмов тестировалось на кластере СКІТ-4 Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. Результаты тестирования CPU-алгоритмом на сетках размером до  $3000 \times 3000$  (рис. 1) подтверждают линейную зависимость времени проведения вычислений на одном шаге от его номера и квадратичную зависимость от размеров сетки, а также демонстрируют снижение быстродействия из-за неэффективного использования кеша алгоритмом 1.

Вычислительные эксперименты для тестирования быстродействия параллельных алгоритмов для графических процессоров также показали линейную зависимость времени про-



**Рис. 3.** Кривые концентрации вдоль линии симметрии течения в рамках дробно-дифференциальной математической модели для значений порядка дробной производной  $\alpha = 0,8$  (кривые 1–5) и  $\alpha = 1$  (кривые 1'–5') в дискретные моменты времени (1, 1' –  $t = 1$ , 2, 2' –  $t = 10$ , 3, 3' –  $t = 10^2$ , 4, 4' –  $t = 10^3$ , 5, 5' –  $t = 10^4$ ,  $\tau_q = 0,01$ )

ведения вычислений от номера шага, однако её коэффициенты значительно ниже, чем для CPU-алгоритмов. Тестирование с задействованием разного количества графических процессоров при решении задачи с размером сетки  $3000 \times 3000$  (рис. 2) также показало су-

щественно большее (до 10-кратного) ускорение GPU-алгоритмов при их меньшей масштабируемости. Тестирование комбинированных алгоритмов при использовании одного GPU и одного CPU на сетке размером  $1500 \times 1500$  (при меньших размерах необходимость синхронизации данных приводит к их неэффективности) показало ухудшение быстродействия алгоритма 3 в процессе решения при лучшем начальном быстродействии и эффективность динамического перераспределения данных между CPU и GPU. Наибольшее полученное тут ускорение по сравнению с GPU-алгоритмом 2 составило 5 % при решении на первых 25 шагах по времени.

**О результатах численных экспериментов по моделированию динамики миграционного процесса.** Численное моделирование динамики процесса миграции растворимых веществ в рамках рассматриваемой неклассической конвективно-диффузионной математической модели выполнено относительно безразмерных переменных, определяемых соотношениями (6) для фильтрационной схемы, приведенной в работе [8] (плосковертикальная установившаяся фильтрация идеальной жидкости со свободной поверхностью из рек или удлиненных каналов). Некоторые из полученных при этом результатов графически изображены на рис.3 и соответствуют динамике полей концентраций вдоль центральной линии тока в области течения в случае дробно-дифференциальной математической модели (порядок дробной производной  $\alpha = 0,8$ ) и математической модели типа Каттанео [10], определяемой уравнением (2) при  $\alpha = 1$ .

Анализ результатов численных экспериментов позволяет сделать ряд выводов об особенностях динамики полей концентраций растворимых веществ в рамках изучаемой математической модели, из которых отметим (ввиду ограниченности объема сообщения) лишь следующий:

на поздних стадиях развития конвективно-диффузионного процесса имеет место устойчивое запаздывание процесса формирования полей концентраций в рамках рассматриваемой дробно-дифференциальной математической модели, как по сравнению с соответствующим процессом, описываемым общепринятой (классической [1, 8]) математической моделью фильтрационно-конвективной диффузии, так и по сравнению с процессом, описываемым моделью типа Каттанео [10] (см. рис. 3).

Изложенное свидетельствует о работоспособности и перспективности представленной методики численного моделирования дробно-дифференциальной динамики процесса фильтрационно-конвективной диффузии в существенно неравновесных условиях.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврик В.И., Никифорович Н.А.* Математическое моделирование в гидроэкологических исследованиях. — Киев: Фитосоциоцентр, 1998. — 288 с.
2. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*/ Eds. A. Carpinteri, F. Mainardi. — Wien: Springer, 1997. — P. 223–276.
3. *Podlubny I.* Fractional differential equations. — New York: Academic Press, 1999. — 341 p.
4. *Bulavatsky V.M.* Numerical modeling of the dynamics of a convection diffusion process locally non-equilibrium in time // *Cybern. Syst. Anal.* — 2012. — **48**, No 6. — P. 861–869.
5. *Bulavatsky V.M.* Mathematical modeling of dynamics of the process of filtration convection diffusion under the condition of time nonlocality // *J. Autom. Inform. Sci.* — 2012. — **44**, No 2. — P. 13–22.
6. *Соболев С.И.* Локально-неравновесные модели процессов переноса // *Успехи физ. наук.* — 1997. — **167**, № 10. — С. 1095–1106.
7. *Compte A., Metzler R.* The generalized Cattaneo equation for the description of anomalous transport processes // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1997. — **30**. — P. 7277–7289.
8. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. — Москва: Наука, 1977. — 664 с.
9. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — Москва: Наука, 1977. — 656 с.
10. *Zhang W., Cai X., Holm S.* Time-fractional heat equations and negative absolute temperatures // *Comput. Math. Appl.* — 2014. — **67**. — P. 164–171.
11. *Бобаенко В.А., Булавацкий В.М., Скопецкий В.В.* Параллельный алгоритм расчета фильтрационно-конвективной диффузии загрязнений из водоносных горизонтов // *Управляющие системы и машины.* — 2008. — № 5. — С. 18–23.
12. *Бобаенко В.А., Булавацкий В.М., Скопецкий В.В.* Математическое моделирование динамики геохимических процессов загрязнения водоносных горизонтов // *Управляющие системы и машины.* — 2009. — № 4. — С. 60–66.

Поступило в редакцию 22.06.2016

#### REFERENCES

1. *Lavryk V.I., Nikiforovich N.A.* Mathematical modelling in hydroecologic studies, Kiev: Fitosotsiotsentr, 1998 (in Russian).
2. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Wien: Springer, 1997: 223-276.
3. *Podlubny I.* Fractional differential equations, New York: Academic Press, 1999.
4. *Bulavatsky V.M.* *Cybern. Syst. Anal.*, 2012, **48**, No 6: 861-869.
5. *Bulavatsky V.M.* *J. Autom. Inform. Sci.*, 2012, **44**, No 2: 13-22.
6. *Sobolev S.L.* *Physics-Uspexhi*, 1997, **40**, No 10: 1043-1054.
7. *Compte A., Metzler R.* *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1997, **30**: 7277-7289.
8. *Polubarinova-Kochina P.Ia.* The theory of groundwater movement, Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
9. *Samarskij A.A.* The theory of difference schemes, Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
10. *Zhang W., Cai X., Holm S.* *Comput. Math. Appl.*, 2014, **67**: 164-171.
11. *Bogaenko V.A., Bulavatsky V.M., Skopetsky V.V.* *Control System and Computers*, 2008, No 5: 18-23 (in Russian).
12. *Bogaenko V.A., Bulavatsky V.M., Skopetsky V.V.* *Control System and Computers*, 2009, No 4: 60-66 (in Russian).

Received 22.06.2016

В.О. Богаєнко, В.М. Булавацький

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ

E-mail: sevab@ukr.net, v\_bulav@ukr.net

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ  
ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРАЦІЙНО-КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ НА ОСНОВІ  
ПАРАЛЕЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ КЛАСТЕРНИХ СИСТЕМ

У рамках дробово-диференційної математичної моделі аномального конвективно-дифузійного процесу за умов масообміну та плоского фільтраційного поля виконано постановку відповідної двовимірної нестационарної крайової задачі та викладено скінченнорізнцеву методику одержання її наближеного розв'язку, яка ґрунтується на застосуванні локально одновимірного методу в області комплексного потенціалу течії. Розроблено паралельні алгоритми розрахунку задачі для кластерних систем, наведено результати тестування їх швидкодії та результати чисельних експериментів по моделюванню динаміки процесу.

**Ключові слова:** аномальний конвективно-дифузійний процес, масообмін, плосковертикальна фільтрація, рівняння дифузії дробового порядку, крайові задачі, чисельне моделювання, паралельні алгоритми.

V.A. Bogaenko, V.M. Bulavatsky

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: sevab@ukr.net, v\_bulav@ukr.net

NUMERICAL MODELING OF THE FRACTIONAL-DIFFERENTIAL DYNAMICS  
OF THE FILTRATION-CONVECTIVE DIFFUSION ON THE BASE OF PARALLEL  
ALGORITHMS FOR CLUSTER SYSTEMS

Within the framework of the fractional-differential mathematical model of an abnormal convective-diffusion process under conditions of a mass-transfer and a plane filtration field, the statement of the conforming two-dimensional non-stationary boundary-value problem is executed, and the finite-difference technique of obtaining its approximated solution, founded on application of a locally one-dimensional method in the field of a complex potential flow is described. The parallel algorithms of solving the problem on cluster systems are designed, the results of their performance testing and the results of numerical experiments on a simulation of the dynamics of the studied process are presented.

**Keywords:** abnormal convective-diffusion process, mass-transfer, plane-vertical filtration, fractional diffusion equation, boundary value problems, numerical modeling, parallel algorithms.