doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.01.038
УДК 539.421

А.О. Камінський, М.Ф. Селіванов

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: fract@inmech.kiev.ua, mfs@ukr.net

Повільне зростання тріщини з ділянкою контакту

Представлено академіком НАН України В.Д. Кубенком

Запропоновано алгоритм розв'язання задачі про повільне поширення тріщини нормального відриву з частковою зоною контакту берегів. В основу алгоритму покладено модель тріщини з зоною зчеплення, ітеративний метод побудови розв'язку для пружного відриву та принцип пружно-в'язкопружної аналогії, який дозволяє записати залежний від часу відрив у формі Больцмана—Вольтерра. В якості критерію поширення тріщини використовується деформаційний критерій зі сталою величиною критичного відриву та міцності зчеплення протягом квазістатичного зростання тріщини. Алгоритм проілюстровано числовим прикладом з розтягуючим на нескінченності зусиллям та симетричною відносно лінії тріщини системою двох зосереджених сил, що спричиняють контакт берегів. При поширенні тріщини контакт берегів зникає, що супроводжується швидким переходом до динамічного етапу зростання.

Ключові слова: *тріщина зчеплення, повільне зростання тріщини, тріщина з зоною контакту*

Аналізуючи напружений стан тіла з тріщиною в тілі складної геометрії та схеми навантаження наперед невідомо чи повністю відкрита тріщина, чи її береги повністю або частково контактують. В задачах теорії пружності для тріщин загальновизнаною є вимога невід'ємності нормального відриву. З метою виконання цієї вимоги необхідно провести повне дослідження, яке включає визначення переміщень берегів тріщини і, у випадку їх перекриття, вводити у розгляд контактні напруження, які унеможливлюють взаємне проникнення берегів.

Якщо матеріал тіла з тріщиною виявляє спадкові властивості, то при поширенні тріщини конфігурація взаємодії берегів може змінюватись з часом, що може призвести до збільшення швидкості підростання. В роботі розглянута класична задача механіки руйнування для ілюстрації цього ефекту. Основні концепції моделювання поширення тріщин у в'язкопружних матеріалах висвітлені в [1, 2]. Будемо використовувати модель довготривалого руйнування [1] покладаючи, що параметри тріщиностійкості не залежать від часу при докритичному поширенні тріщини.

Об'єктом дослідження роботи є наскрізна тріщина нормального відриву в нескінченній пластині, матеріал якої виявляє спадкові властивості. Будемо досліджувати квазістатичне стійке зростання тріщини, наявної до моменту прикладання навантаження. Поширення тріщини відбувається за ізотермічних умов при сталому докритичному рівні зовнішнього навантаження внаслідок в'язкопружних властивостей матеріалу пластини.

В основу дослідження повільного зростання тріщини покладемо модель тріщини із зоною зчеплення. В момент прикладання навантаження $t=0$ тріщина перебуває в докритичному стані — відрив у вершині λ не перевищує граничного рівня: $\Delta(0,\lambda(0))<\Delta_{\max}$. За рахунок повзучості відрив $\Delta(t,\lambda(0))$ з часом сягає свого максимально можливого значення $\Delta_{\max}$, завершуючи інкубаційний період та ініціюючи початок зростання розміру тріщини $\lambda(t)$.

Нормальний відрив тріщини в лінійно в'язкопружному тілі будемо шукати у вигляді інтеграла Больцмана—Вольтерра

$$\Delta(t,x)=\int_{-\infty}^{t} l(t-\tau)\tilde{\Delta}'_{\tau}(\tau,x)\mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

де величини $\Delta(t,x)$ та $\tilde{\Delta}(t,x)$ мають розмірність довжини, функція повзучості $l(\vartheta)$ — безрозмірна. На відміну від $\Delta(t,x)$, введена величина $\tilde{\Delta}(t,x)$ не має змісту в термінах моделі за винятком випадку $t=0$, коли $\tilde{\Delta}(0,x)=\Delta(0,x)$ — миттєве значення відриву в точці x. Хвилька над Δ вказує, що ця велична не є інтегральною характеристикою, в її виразі містяться лише миттєві пружні сталі; обчислюється ця величина як пружне розкриття тріщини в момент часу t.

Пружний розв'язок задачі. Розв'язок крайової задачі теорії тріщин подамо сингулярним інтегральним рівнянням [3]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{g(t)\mathrm{d}t}{t-x}=p(x), \quad |x|<a, \tag{2}$$

справедливим для прямолінійної тріщини з самоврівноваженим напруженням $p(x)$ на її берегах. В цьому рівнянні величина $g(x)$ є щільністю розподілу відриву; цю величину треба знайти в ході розв'язання задачі. В роботі розглядатимемо випадок парності функції $p(x)$.

Розв'язок (2) має задовольняти умові

$$\int_{-a}^{a} g(t)\mathrm{d}t=0,$$

яка забезпечує однозначність переміщень, і умові плавності змикання берегів: $g(x)=0$, $\beta<|x|<a$. У випадку парності $p(x)$ функція $g(x)$ є непарною і умова однозначності переміщень задовольняється автоматично.

Стрибок переміщень пов'язаний з щільністю їх розподілу наступним чином:

$$\Delta(x)=L\int_{-a}^{x} g(t)\mathrm{d}t, \quad L=\frac{4}{E}, \tag{3}$$

E — модуль пружності.

Будемо шукати $g(x)$ в формі лінійного сплайну

$$\begin{gathered} g(x)=g_k(x), \quad x\in(b_k,b_{k-1}), \quad 0<k\leqslant 2n; \\ g_k(x)=g_k A_k(x)+g_{k-1}[1-A_k(x)], \quad A_k(x)=\frac{b_{k-1}-x}{h}, \end{gathered} \tag{4}$$

де b_k є квадратурними точками, які розбивають на $2n$ ділянок рівної довжини h відрізок $[-a,a]$ ($b_0=a$, $b_n=0$).

Для такої $g(x)$ інтеграл в (2) набуде вигляду

$$-\sum_{k=1}^{2n}\int_{b_{k-1}}^{b_k}\frac{g_k(t)\,\mathrm{d}t}{t-x}=-\sum_{k=1}^{2n}g_kJ_k(x), \tag{5}$$

$$J_0(x)=\xi_1(x),\quad J_n(x)=\zeta_n(x),\quad J_k(x)=\xi_{k+1}(x)+\zeta_k(x)\quad (k=1,\ldots,2n-1);$$

$$\xi_k(x)=C_k(x)-\zeta_k(x),\quad \zeta_k(x)=C_k(x)A_k(x)+1,\quad C_k(x)=\ln\left|\frac{1-A_k(x)}{A_k(x)}\right|.$$

Зафіксуємо вершину тріщини в одній з квадратурних точок та задовольнимо рівняння (2) в точках колокації $\eta_m=b_m+h/2$, $m=1,\ldots,2n$. Враховуючи симетрію ($g_{2n-k}=-g_k$, $k=0,\ldots,n-1$, $g_n=0$) зводимо рівняння (2) і (5) до системи для визначення g_k $(k=0,\ldots,n-1)$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left[J_{mk}+J_{(2n+1-m)k}\right]g_k=p(\eta_m),\quad m=1,\ldots,n, \tag{6}$$

де $J_{mk}=J_k(\eta_m)$.

Відриви в точках колокації, згідно з (3) і (4), набудуть вигляду

$$\Delta(\eta_m)=-Lh\sum_{k=0}^{n-1}W_{mk}g_k,\quad m=1,\ldots,n, \tag{7}$$

$$W_{10}=3/8,\quad W_{m(m-1)}=7/8\ (m>1),\quad W_{mm}=1/8;\quad W_{m0}=1\ (m>1),\quad W_{mk}=0,\ (k>m).$$

Позначимо $\boldsymbol{\Delta}(b_k)$ — вектор, що утворюють величини відриву в точках колокації η_m, знайдені для тріщини з вершиною в точці b_k згідно з (7). Тоді для довільного положення вершини тріщини $\lambda\in(b_k,b_{k-1})$ можна наближено отримати відрив у вузлах колокації наступним чином:

$$\boldsymbol{\Delta}(\lambda)=\boldsymbol{\Delta}(b_{k-1})-\frac{\lambda-b_{k-1}}{h}[\boldsymbol{\Delta}(b_k)-\boldsymbol{\Delta}(b_{k-1})].$$

Повільне поширення тріщини. Співвідношення для відривів (1) можна отримати за допомогою розв'язку відповідної задачі теорії пружності шляхом застосування принципу пружно-в'язкопружної відповідності.

Якщо зовнішнє навантаження прикладено в момент часу $t=0$, відрив в точці x в момент часу t

$$\Delta(t,x)=l(t)\tilde{\Delta}(0,x)+\int_0^t l(t-\tau)\tilde{\Delta}'_\tau(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

Враховуючи те, що під час інкубаційного періоду, який триває до моменту часу $t=t_0$, положення вершини тріщини λ не змінюється, $\tilde{\Delta}(0,x)=\tilde{\Delta}(t_0,x)$, вертикальне переміщення (8) в вершині матиме вигляд

$$\Delta[t,\lambda(t)]=l(t)\tilde{\Delta}[t_0,\lambda(t)]+\int_{t_0}^t l(t-\tau)\tilde{\Delta}'_\tau[\tau,\lambda(t)]\,\mathrm{d}\tau. \tag{9}$$

Час інкубаційного періоду t_0 знайдемо з рівняння

$$l(t_0)D_0=\Delta_{\max}, \tag{10}$$

$$D_0 = \tilde{\Delta}_{0,j-1} - \frac{\lambda_0 - \eta_{j-1}}{h}(\tilde{\Delta}_{0,j} - \tilde{\Delta}_{0,j-1}),$$

$$\eta_{j-1} \leqslant \lambda_0 \leqslant \eta_j, \quad \tilde{\Delta}_{0,\cdot} = \mathbf{\Delta}(\lambda_0).$$

Будемо шукати положення λ в моменти часу $t_k = t_0 + k \cdot \Delta t$, $k = 1, 2, \ldots$. Позначивши $\lambda_k = \lambda(t_k)$, на основі (9) запишемо рівняння для визначення λ_k:

$$l(t_k) D_0 + \sum_{i=1}^{k} \Lambda_{ki} (D_i - D_{i-1}) = \Delta_{\max}, \qquad (11)$$

$$\Lambda_{ki} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} l(t_k - \tau) \mathrm{d}\tau,$$

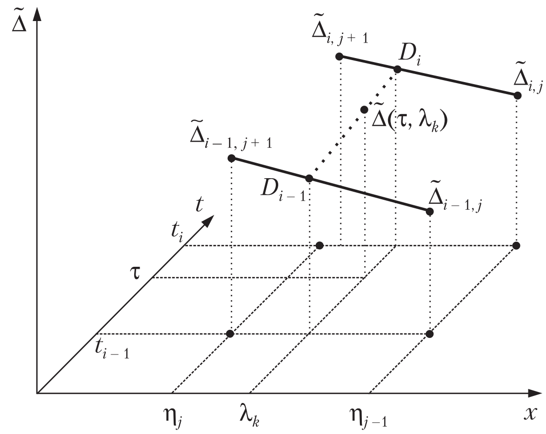

Рис. 1

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\lambda_k, \tilde{\Delta}) = \tilde{\Delta}_{\cdot,j-1} - \frac{\lambda_k - \eta_{j-1}}{h}(\tilde{\Delta}_{\cdot,j} - \tilde{\Delta}_{\cdot,j-1}), \quad \eta_{j-1} \leqslant \lambda_k \leqslant \eta_j, \quad \tilde{\Delta}_{k,\cdot} = \mathbf{\Delta}(\lambda_k).$$

Визначення величин $\mathbf{D}$ і $\tilde{\Delta}$ проілюстровано на рис. 1.

Таким чином, (11) дозволяє послідовно визначати положення вершини тріщини λ_k в моменти часу t_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Якщо характеристика повзучості $l(t)$ знайдена в формі,

$$l(t) = 1 + \sum_r \lambda_r \int_0^t \exp(-\beta_r \tau) \mathrm{d}\tau = l_\infty - \sum_r \xi_r \exp(-\beta_r t), \quad \xi_r = \frac{\lambda_r}{\beta_r}, \quad l_\infty = 1 + \sum_r \xi_r,$$

то

$$\Lambda_{ki} = l_\infty - \sum_r \frac{\xi_r \exp(-\beta_r (k-i)\Delta t)[1 - \exp(-\beta_r \Delta t)]}{\beta_r \Delta t}.$$

У випадку $r = 1$

$$l(t) = l_\infty + (l_\infty - 1)\exp(-\beta t).$$

Для цього найпростішого випадку час інкубаційного періоду визначається з (10) у вигляді

$$t_0 = \beta^{-1} \ln \frac{l_\infty - 1}{l_\infty - \Delta_{\max} / D_0}.$$

Умова наявності періоду докритичного поширення тріщини

$$l_\infty^{-1} < \frac{D_0}{\Delta_{\max}} < 1.$$

Нерівність $D_0 / \Delta_{\max} \leqslant l_\infty^{-1}$ забезпечує неможливість досягнення розкриттям у вершині граничного значення за будь-який час, нерівність $D_0 / \Delta_{\max} \geqslant 1$ відповідає початку динамічного зростання тріщини при прикладанні навантаження.

Числовий приклад. Розглянемо задачу, що відповідає постановці, зображеній на рис. 2.

Виберемо інтервал пошуку функції щільності відриву $(-a, a)$ таким чином, щоб він напевне містив наперед невідомий інтервал розташування тріщини разом із зонами зчеплення $(-\beta, \beta)$. Для того щоб врахувати контактні напруження і задовольнити умову плавності

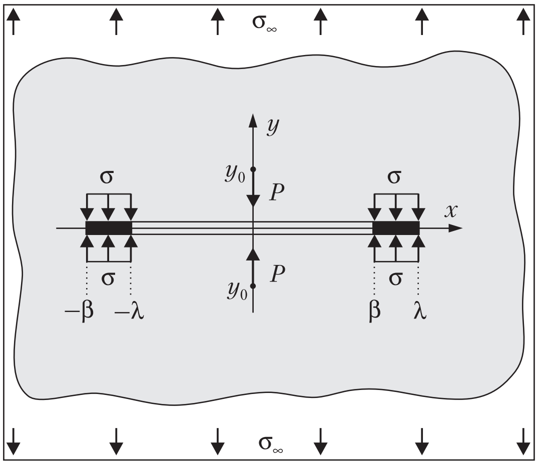

Рис. 2

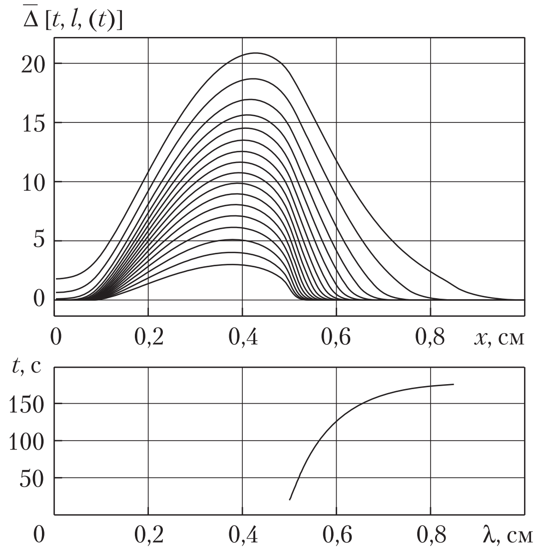

Рис. 3

змикання берегів будемо розв'язувати задачу (2) з контурними умовами

$$p(x) = -\sigma_\infty + \frac{Py_0}{\pi(x^2+y_0^2)}\left[1 - \frac{2(x^2-y_0^2)}{(\varkappa+1)(x^2+y_0^2)}\right] - \sigma_c(x) + \begin{cases} 0, & |x| < \lambda, \\ \sigma, & |x| > \lambda, \end{cases} \tag{12}$$

де у випадку плоского напруженого стану $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$, ν — коефіцієнт Пуассона. Параметр матеріалу $\varkappa$ будемо вважати незмінним з часом при дослідженні поширення тріщини. Напруження $\sigma_c(x)$ в (12) унеможливлює перекриття берегів тріщини і разом з відривом може бути знайденим за допомогою наступної ітеративної процедури:

1) розв'язуємо систему рівнянь $\boldsymbol{\Delta}(\lambda) = 0$ з невідомими значеннями функції щільності відриву g_k в квадратурних точках b_k (ліві частини цієї системи наведені в (7)); знаходимо відповідні корегуючі напруження

$$\sigma_c(\eta_m) = p(\eta_m) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} J_{mk} g_k; \tag{13}$$

2) в системі (6) рівняння з номерами, що задовольняють умові $\sigma_c(\eta_m) > 0$, змінюємо на рівняння $\Delta(\eta_m) = 0$. Розв'язавши отриману систему, знайдемо нові значення g_k і відповідні напруження $\sigma_c(\eta_m)$ згідно з (13).

Повторюємо останній крок доки всі $\sigma_c(\eta_m)$ будуть невід'ємними. Знайдені g_k визначають $\boldsymbol{\Delta}(\lambda)$ згідно з (7).

Застосований алгоритм дозволяє не використовувати умову скінченності напружень в явній формі рівняння для визначення довжини зчеплення. Такий підхід не дає точного значення для β, але цей параметр часто не є характеристикою тріщиностійкості і може бути віднесеним до внутрішніх параметрів задачі.

На рис. 3 наведені контури зростаючої тріщини та відповідна кінетична крива ($\overline{\Delta}$ є відривом, віднесеним до $\Delta_{\max}$), отримані для $E = 1$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\sigma = 35$ МПа, $\sigma_\infty = 17,5$ МПа, $P = \sigma_\infty \cdot 1$ см, $\Delta_{\max} = 1,5 \cdot 10^{-5}$ м, $\lambda_0 = 0,5$ см, $a = 1,2$ см, $h = 0,008$ см, $l_\infty = 30$, $\beta = 0,01$ с$^{-1}$, $\Delta t = 1$ с.

Аналізуючи отриманий результат, треба відмітити зменшення зони контакту при поширенні тріщини. При зникненні цієї зони досить швидко завершується етап докритичного зростання.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Kaminsky A.A.* Mechanics of the delayed fracture of viscoelastic bodies with cracks: theory and experiment (review) // Int. Appl. Mech. — 2014. — **50**, No 5. — P. 485—548.
2. *Knauss W.G.* A review of fracture in viscoelastic materials // Int. J. Fract. — 2015. — **196**. — P. 99—146.
3. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1981. — 324 с.

Надійшло до редакції 26.05.2016

REFERENCES

1. *Kaminsky A.A.* Int. Appl. Mech., 2014, **50,** No 5: 485—548.
2. *Knauss W.G.* Int. J. Fract., 2015, **196**: 99—146.
3. *Savruk M.P.* Two-dimensional Problems of Elasticity for Bodies with Cracks, Kiev: Naukova Dumka, 1981 [in Russian].

Received 26.05.2016

А.А. Каминский, М.Ф. Селиванов

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: fract@inmech.kiev.ua, mfs@ukr.net

МЕДЛЕННЫЙ РОСТ ТРЕЩИНЫ С ЗОНОЙ КОНТАКТА

Предложен алгоритм решения задачи о медленном распространении трещины нормального отрыва с частичной зоной контакта берегов. В основу алгоритма положена модель трещины с зоной сцепления, итеративный метод построения решения для упругого отрыва и принцип упруго-вязкоупругой аналогии, который позволяет записать зависящий от времени отрыв в форме Больцмана—Вольтерра. В качестве критерия распространения трещины используется деформационный критерий с постоянной величиной критического отрыва и прочности сцепления в течение квази-статического роста трещины. Алгоритм проиллюстрирован числовым примером с растягивающим на бесконечности усилием и симметричной относительно линии трещины системой двух сосредоточенных сил, вызывающих контакт берегов. При распространении трещины контакт берегов исчезает, что сопровождается быстрым переходом к динамическому этапу распространения.

Ключевые слова: *модель трещины с зоной сцепления, медленный рост трещины, трещина с зоной контакта.*

A.A. Kaminsky, M.F. Selivanov

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: fract@inmech.kiev.ua, mfs@ukr.net

SLOW GROWTH OF A CRACK WITH CONTACT ZONE

An algorithm for solving the problem of slow propagation of mode I crack with partial closure is proposed. The algorithm is based on the cohesive zone model, iterative method for constructing elastic solutions, and the principle of elastic-viscoelastic correspondence, which allows us to obtain the time-dependent separation in the Boltzmann—Volterra form. As a criterion for crack propagation, the crack-tip-opening displacement fracture criterion is used with constant crack tip opening displacement and cohesive strength during the quasistatic crack growth. The algorithm is illustrated by the numerical example with tensile stress at infinity and the system of two point forces symmetric with respect to the crack line, which cause the contact of crack faces. During the crack propagation, the contact zone disappears, which is accompanied by the rapid transition to the dynamic stage of fraction.

Keywords: *cohesive zone model, slow crack growth, crack with contact zone.*