doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.02.031
УДК 517.58/.5892

В.М. Назаренко, М.В. Довжик

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: medved_mik@ukr.net

Руйнування композитних матеріалів з двома паралельними співвісними тріщинами під час стиску вздовж тріщин

Представлено членом-кореспондентом НАН України В.М. Назаренком

Проведено дослідження некласичної проблеми механіки руйнування матеріалу з двома співвісними паралельними тріщинами під час стиску вздовж тріщин. Розглянуто осесиметричну задачу для кругової тріщини. Як приклад проведено чисельне дослідження для композитного матеріалу.

Ключові слова: *композитний матеріал, дві паралельні тріщини, стиск вздовж тріщин, критичні напруження.*

Останнім часом інтенсивно розвивається дослідження руйнування матеріалів при стиску вздовж тріщин. У випадку коли матеріал навантажується вздовж площини розташування тріщин використовується підхід, запропонований в роботі [1], який знайшов застосування і подальший розвиток в роботах [2—6]. Як міра руйнування в цьому випадку використовується критерій локальної втрати стійкості матеріалу в околі тріщини в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружної стійкості [1]. Згідно з цим підходом, процес руйнування ініціюється моментом локальної втрати стійкості матеріалу поблизу тріщини, а критичні параметри стиску визначаються з розв'язання відповідних задач на власні значення в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості.

В роботах [2, 3] для різних схем розташування взаємодіючих тріщин визначено критичні укорочення і напруження стиску в залежності від відстані між тріщинами або тріщиною та вільною поверхнею для різних матеріалів. В даній роботі для дослідження руйнування композитних матеріалів з двома паралельними співвісними тріщинами під час стиску використано чисельно-аналітичний метод, що дозволил збільшити точність та отримати нові результати для високоеластичних матеріалів [4].

Розглянемо композитний матеріал з двома дископодібними тріщинами радіуса a, розташованими в площинах $x_3 = 0$ та $x_3 = -2h$ з центром на осі Ox_3 (рис.1). Діючі вздовж тріщини початкові напруження відповідають двоосному розтягу—стиску. Напруження на берегах тріщини відсутні. В результаті рівномірного стиску в нескінченному тілі виникає однорідний докритичний стан:

$$S_{33}^0 = 0; \quad S_{11}^0 = S_{22}^0 \neq 0; \quad u_m^0 = \delta_{jm}(\lambda_j - 1)x_j; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3; \quad \lambda_j = \text{const},$$

де λ_j — видовження вздовж осей; x_j — лагранжеві координати, що збігаються в недеформованому стані з декартовими; S_{ij}^0 — компоненти симетричного тензора напружень; u_j^0 — переміщення, які відповідають початковим напруженням S_{ij}^0.

У випадку тіла з макротріщинами, коли розміри тріщин значно більші за розміри мікроструктур композиту, матеріал розглядається у вигляді анізотропного середовища з наведеними макрохарактеристиками [4]. З використанням методу, застосованого в роботі [4], задача зводиться до розв'язання системи інтегральних рівнянь Фредгольма з допоміжною умовою

$$\begin{aligned}
&f(\xi) + \frac{1}{\pi k}\int_0^1 M_1(\xi,\eta) f(\eta)\,d\eta - \frac{2}{\pi k}\int_0^1 N_1(\xi,\eta) g(\eta)\,d\eta = 0;\\
&g(\xi) + \frac{1}{\pi k}\int_0^1 M_2(\xi,\eta) g(\eta)\,d\eta - \frac{2}{\pi k}\int_0^1 N_2(\xi,\eta) f(\eta)\,d\eta + \tilde{C}_1 = 0; \qquad (1)\\
&\int_0^1 g(\xi)\,d\xi = 0 \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1,\ 0 \leqslant \eta \leqslant 1); \quad f(\xi) \equiv \varphi(a\xi); \quad g(\xi) \equiv \psi(a\xi).
\end{aligned}$$

Ядра інтегральних рівнянь (1) визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}
&M_1(\xi,\eta) = R_1(\eta+\xi) - R_1(1+\xi) + R_1(\eta-\xi) - R_1(1-\xi);\\
&N_1(\xi,\eta) = S_1(\eta+\xi) + S_1(\eta-\xi); \quad M_2(\xi,\eta) = S_2(\eta+\xi) + S_2(\eta-\xi); \qquad (2)\\
&N_2(\xi,\eta) = R_2(\eta+\xi) - R_2(1+\xi) + R_2(\eta-\xi) - R_2(1-\xi).
\end{aligned}$$

Функції, які входять в ядра (2), мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&R_1(\zeta) = 2\left\{2\frac{k_2}{k} I_0(\beta_1+\beta_2,\zeta) - \frac{1}{2}\frac{(k_1+k_2)}{k}\left[\frac{k_2}{k_1} I_0(2\beta_2,\zeta) + I_0(2\beta_1,\zeta\right]\right\},\\
&S_1(\zeta) = \frac{(k_1+k_2)}{k}\left\{I_1(\beta_1+\beta_2,\zeta) - \frac{1}{2}[I_1(2\beta_1,\zeta) + I_1(2\beta_2,\zeta)]\right\},\\
&S_2(\zeta) = 2\left\{2\frac{k_1}{k_2} I_0(\beta_1+\beta_2,\zeta) - \frac{1}{2}\frac{(k_1+k_2)}{k}\left[\frac{k_1}{k_2} I_0(2\beta_2,\zeta) + I_0(2\beta_1,\zeta)\right]\right\}, \qquad (3)\\
&R_2(\zeta) = \frac{(k_1+k_2)}{k}\left\{I_{-1}(\beta_1+\beta_2,\zeta) - \frac{1}{2}[I_{-1}(2\beta_1,\zeta) + I_{-1}(2\beta_2,\zeta)]\right\},\\
&I_0(\rho,\zeta) = \rho(\zeta^2+\rho^2)^{-1}, \quad I_{-1}(\rho,\zeta) = -\frac{1}{2\beta}\log(\zeta^2+\rho^2),\\
&I_1(\rho,\zeta) = \beta(\rho^2-\zeta^2)(\zeta^2+\rho^2)^{-2}, \ \beta = ha^{-1}, \quad \beta_i = \beta(n_i^0)^{-1/2}, \quad i = 1,2.
\end{aligned}$$

Методика розв'язання. Функції (3), які входять в ядра (2) системи інтегральних рівнянь Фредгольма (1), дозволяють використати метод запропонований в [4]. Тому для подальших досліджень застосовувався чисельно-аналітичний метод розв'язання інтегральних

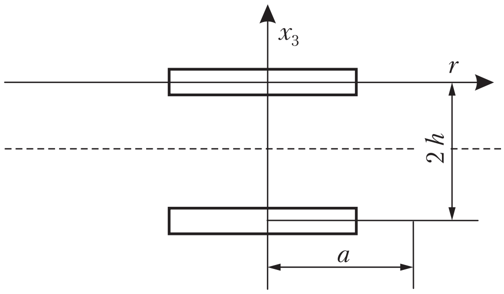

Рис. 1

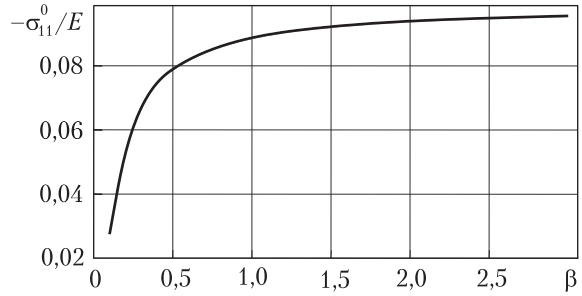

Рис. 2

рівнянь Фредгольма, який дозволив отримати більш якісні результати при дослідженні пружних високоеластичних матеріалів. Для пошуку критичних укорочень і напружень проводилась процедура, побудована методом Бубнова—Гальоркіна. В якості системи координатних функцій використовувались степеневі функції.

На відміну від попередніх робіт [1—3], де після підстановки координатних функцій в систему інтегральних рівнянь (1) при подальшому дослідженні відразу проводилось чисельне інтегрування системи, запропонований чисельно-аналітичний метод, дозволяє, за допомогою сучасного пакету символьних обрахунків аналітично порахувати інтеграли від ядер інтегральних рівнянь (1). Це дозволяє при подальших розрахунках отримати більшу точність. Для прискорення обрахунків інтегралів використовували рекурентні співвідношення, запропоновані в [6].

Після застосування даної методики система інтегральних рівнянь (1) зводиться до розв'язання системи з $2N+3$ рівнянь:

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{N} F_i F_{1ji} + \sum_{i=0}^{N} G_i G_{1ji} = 0,\\ \sum_{i=0}^{N} F_i F_{2ji} + \sum_{i=0}^{N} G_i G_{2ji} + \tilde{C}_1 = 0,\\ \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i+1} G_i = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant N,\end{gathered} \tag{4}$$

з невідомими величинами $F_i, G_i, \tilde{C}_1, i \in [0, N]$, де F_{kji}, G_{kji} — точні вирази, пораховані аналітично, які залежать від констант матеріалів $n_1^0, n_2^0, k_1, k_2, k$ і безрозмірних відстаней між тріщинами β.

Результати. Як приклад проведено дослідження композита з наведеними характеристиками трансверсально-ізотропного середовища $\nu = 0{,}3$; $\nu' = 0{,}2$; $G'/E = 0{,}1$; $E'/E = 0{,}5$. На рис. 2 показана залежність критичних напружень від безрозмірних відстаней між тріщинами для великих відстаней. При цьому отримані результати збігаються з даними роботи [3].

Таким чином, аналіз одержаних результатів показує, що чисельно-аналітичний метод, запропонований в роботі [4], відмінно працює при дослідженні руйнування композитних матеріалів з двома паралельними співвісними тріщинами під час стиску вздовж тріщин. Переваги цього методу розв'язання над попередніми дають більш точний результат та дозволяють розширити досліджуваний інтервал при подальших дослідженнях.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Пространственная задача. *Докл. АН СССР*. 1981. **261**, № 1. С. 42—45.
2. Гузь А.Н., Назаренко В.М. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). Высокоэластичные материалы. *Прикл. механика*. 1989. **25**, № 9. С. 3—32.
3. Гузь А.Н., Назаренко В.М. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). Конструкционные материалы. *Прикл. механика*. 1989. **25**, № 10. С. 3—19.
4. Гузь А.Н., Назаренко В.М., Довжик М.В. Разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной. *Прикл. механика*. 2011. **47**, № 6. С. 28—37.
5. Гузь А.Н. О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). *Прикл. механика*. 2014. **50**, № 1. С. 5—88.
6. Довжик М.В. Разрушение материала при сжатии вдоль двух близко расположенных дискообразных трещин. *Прикл. механика*. 2012. **48**, № 5. С. 92—101.

Надійшло до редакції 01.07.2016

REFERENCES

1. Guz, A. N. (1981). Dokl. AN USSR, 261, No 1, pp. 42-45 (in Russian).
2. Guz, A. N., Nazarenko, V. M. (1989). Int. Appl. Mech., 25, No 9, pp. 851-876.
3. Guz, A. N., Nazarenko, V. M. (1989). Int. Appl. Mech., 25, No 10, pp. 959-972.
4. Guz, A. N., Dovzhik, M. V., Nazarenko, V. M (2011). Int. Appl. Mech., 47, No 6, pp. 627-635.
5. Guz, A. N. (2014). Int. Appl. Mech., 50, No 1, pp. 1-57.
6. Dovzhik, M. V. (2012). Int. Appl. Mech., 48, No 5, pp. 563-672.

Received 01.07.2016

В.М. Назаренко, М.В. Довжик

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: medved_mik@ukr.net

РАЗРУШЕНИЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ
С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СООСНЫМИ ТРЕЩИНАМИ
ПРИ СЖАТИИ ВДОЛЬ ТРЕЩИН

Проведено исследование неклассической проблемы механики разрушения материала с двумя соосными параллельными трещинами при сжатии вдоль трещин. Рассмотрена осесимметричная задача для круглой трещины. В качестве примера проведено численное исследование для композитного материала.

Ключевые слова: *композитный материал, две параллельные трещины, сжатие вдоль трещин, критические напряжения.*

V.M. Nazarenko, M.V. Dovzhik

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: medved_mik@ukr.net

DESTRUCTION OF COMPOSITE MATERIALS WITH TWO PARALLEL
COAXIAL CRACKS AT THE COMPRESSION ALONG CRACKS

A nonclassical problem of fracture mechanics for a material with two parallel coaxial cracks is studied. The axisymmetric problem for a penny-shaped crack is considered. The numerical examination of a case of composite materials is conducted.

Keywords: *critical stress, composite material, two parallel cracks, compression along cracks, critical stresses.*