doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.04.007
УДК 517.984

В.Н. Сыровацкий

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
E-mail: vsirovatsky@gmail.com

О функциональных моделях коммутативных систем операторов в пространствах де Бранжа

Представлено академиком НАН Украины Е.Я. Хрусловым

Для коммутативной системы линейных ограниченных операторов T_1, T_2, которые действуют в гильбертовом пространстве H и ни один из которых не является сжатием, получена функциональная модель в пространстве де Бранжа для круга.

Ключевые слова: *функциональная модель, коммутативная система операторов.*

В работе [1] построена функциональная модель пары коммутативных операторов, когда один из них является сжатием. Эти построения основаны на технике преобразований Фурье. Если же ни один из операторов $\{T_1, T_2\}$ не является сжатием, данный метод не применим. В работах [2, 3] построены функциональные модели для коммутативных систем операторов $\{T_1, T_2\}$, причём ни T_1, ни T_2 не являются сжимающими. В этом случае функциональная модель строится в пространстве де Бранжа, отвечающем единичному кругу, которое было получено в работе [4]. В данной работе построены функциональные модели при определённых ограничениях на основные операторы этой модели.

I. Рассмотрим линейный ограниченный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H. Совокупность

$$\Delta = \left(J; \quad H \oplus E; \quad V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}; \quad H \oplus \tilde{E}; \quad \tilde{J} \right) \tag{1}$$

называется унитарным узлом [5—6], если линейный оператор

$$V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} : H \oplus E \mapsto H \oplus \tilde{E} \tag{2}$$

удовлетворяет соотношениям

$$V^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \qquad V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где J и $\tilde{J}$ — инволюции в гильбертовых пространствах E и $\tilde{E}$ соответственно, $J = J^* = J^{-1}$, $\tilde{J} = \tilde{J}^* = \tilde{J}^{-1}$.

Основным инвариантом узла Δ (1), описывающим простые узлы, является введенная М.С. Лившицем [5] характеристическая оператор-функция

$$S_\Delta = K + \Psi(zI - T)^{-1}\Phi. \tag{4}$$

Предположим, что

$$\dim E = \dim \tilde{E} = 2, \ J = \tilde{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Используя представление В.П.Потапова для $S_\Delta(z)$, нетрудно построить [6] треугольную модель оператора T. Обозначим через $L^2_{2,l}(F_x)$ гильбертово пространство вектор-функций [7]:

$$L^2_{2,l}(F_x) = \left\{ f(x) = (f_1(x), f_2(x)); \quad \int_0^l f(x)\, dF_x f^*(x) < \infty \right\}. \tag{6}$$

Зададим в $L^2_{2,l}(F_x)$ (7) линейный оператор T:

$$Tf(x) = f(x)e^{i\varphi_x} - 2\int_x^l f(t)\, dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J e^{i\varphi_x}, \tag{7}$$

где матрица Φ_x является решением интегрального уравнения

$$\Phi_x + \int_0^x \Phi_t\, dF_t J = I, \quad x \in [0, l]. \tag{8}$$

Рассмотрим также матрицу-функцию Ψ_x:

$$\Psi_x + \int_x^l \Psi_t\, dF_t J = J, \quad x \in [0, l]. \tag{9}$$

Определим операторы $\Phi : E \mapsto L^2_{2,l}(F_x)$ и $\Psi : L^2_{2,l}(F_x) \mapsto E \ (E = \mathbb{C}^2)$:

$$\Phi f(x) = \sqrt{2} f \Psi_x e^{i\varphi_x}, \quad \Psi f(x) = \sqrt{2}\int_0^l f(x)\, dF_x \Phi_x^*, \tag{10}$$

где $f \in E$. И пусть $K = S_\Delta(\infty)$ (6). Совокупность

$$\Delta_c = \left(J; \quad L^2_{2,l}(F_x) \oplus E; \quad V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}; \quad L^2_{2,l}(F_x) \oplus E; \quad J \right) \tag{11}$$

является унитарным узлом (1)—(3) и называется треугольной моделью [7] простого узла Δ (1), где $L^2_{2,l}(F_x)$, T, Φ, Ψ имеют вид (6), (7), (10).

Следуя работе [4], введём вектор-функции

$$L_x(z) = (1 - zT)^{-1}\Phi(1,1), \tag{12}$$

$$\tilde{L}_x(z) = (1 - zT^*)^{-1}\Psi^*(1,-1). \tag{13}$$

Определение. Гильбертовым пространством де Бранжа $\mathcal{B}(E, G)$ назовём пространство, которое образуют вектор-функции $F(z) = [F_1(z), F_2(z)]$, где $F_k(z)$ $(k = 1, 2)$ имеют вид

$$F_1(z) = \int_0^l f(t)\, dF_t L_t^*(\bar{z}), \quad F_2(z) = \int_0^l f(t)\, dF_t \tilde{L}_t^*(\bar{z}). \tag{14}$$

И пусть $\mathcal{B}_\varphi$ — отображение де Бранжа:

$$\mathcal{B}_\varphi f = [F_1(z), F_2(z)]. \tag{15}$$

Скалярное произведение в $\mathcal{B}(E,G)$ индуцируется прообразом $\mathcal{B}_\varphi$:

$$< F(z), \hat{F}(z) >_{\mathcal{B}_\varphi(E,G)} = < f(t), \hat{f}(t) >_{L^2_{2,l}(F_t)}, \tag{16}$$

причём $F(z) = \mathcal{B}_\varphi f(t)$, $\hat{F}(z) = \mathcal{B}_\varphi \hat{f}(t)$, где $f(t), \hat{f}(t) \in L^2_{2,l}(F_t)$.

Функции $E_x(z), \tilde{E}_x(z), G_x(z), \tilde{G}_x(z)$ задаются соотношениями [4]

$$L_x(z) = (e^{-i\varphi_x} - z)^{-1}[E_x(z);\quad \tilde{E}_x(z)], \tag{17}$$

$$\tilde{L}_x(z) = (1 - ze^{-i\varphi_x})^{-1}[G_x(z);\quad \tilde{G}_x(z)]. \tag{18}$$

II. Пусть T_1, T_2 — коммутативная система линейных ограниченных операторов, действующая в гильбертовом пространстве H. Совокупность гильбертовых пространств $E, \tilde{E}$ и операторов $\Phi \in [E, H]$; $\Psi \in [H, \tilde{E}]$; $K \in [E, \tilde{E}]$; $\sigma_s, \tau_s, N_s, \Gamma \in [E, E]$; $\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{N}_s, \tilde{\Gamma} \in [\tilde{E}, \tilde{E}]$ $(s = 1, 2)$ назовём коммутативным унитарным метрическим узлом Δ [7]:

$$\Delta = (\Gamma, \sigma_s, \tau_s, N_s, H \oplus E, V_s, \overset{+}{V}_s, H \oplus \tilde{E}, \tilde{N}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{\sigma}_s, \tilde{\Gamma}), \tag{19}$$

если для расширений $V_s = \begin{bmatrix} T_s & \Phi N_s \\ \Psi & K \end{bmatrix}$, $\overset{+}{V}_s = \begin{bmatrix} T_s^* & \Psi \tilde{N}_s^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix}$ справедливы следующие соотношения:

1) $V_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma} \end{bmatrix} V_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tau_s \end{bmatrix}$, $\overset{+}{V}{}_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_s \end{bmatrix} \overset{+}{V}_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\tau}_s \end{bmatrix}$;

2) $T_2 \Phi N_1 - T_1 \Phi N_2 = \Phi \Gamma$, $\quad \tilde{N}_1 \Psi T_2 - \tilde{N}_2 \Psi T_1 = \tilde{\Gamma} \Psi$;

3) $\tilde{N}_2 \Psi \Phi N_1 - \tilde{N}_1 \Psi \Phi N_2 = K\Gamma - \tilde{\Gamma} K$, $\quad K N_s = \tilde{N}_s K$ $(s = 1, 2)$,

где $\sigma_s, \tau_s, (\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s)$ самосопряжены в $E(\tilde{E})$ $(s = 1, 2)$.

Произвольная коммутативная система линейных ограниченных операторов T_1, T_2 всегда может быть включена в узел Δ (19) [5]. В случае обратимости «дефектных» операторов σ_1 и $\tilde{\sigma}_1$ в E и $\tilde{E}$ всегда можно считать, что N_1 и $\tilde{N}_1$ обратимы. Рассмотрим $N, \tilde{N}, \Gamma, \tilde{\Gamma}$

$$N = N_1^{-1} N_2,\ \Gamma = N_1^{-1} \Gamma_1,\ \tilde{N} = \tilde{N}_1^{-1} \tilde{N}_2,\ \tilde{\Gamma} = \tilde{N}_1^{-1} \tilde{\Gamma}_1, \tag{20}$$

и пусть $dF_t = a_t t$, а $N(x)$ и $\Gamma(x)$ являются решениями уравнений

$$N'(x) = -[Ja_x, N(x)],\ \Gamma'(x) = [Ja_x, \Gamma(x)],\ [Ja_x, N(x)e^{i\varphi_x} + \Gamma(x)] = 0.$$

Зададим в $L^2_{r,l}(F_x)$ (6) линейные операторы T_1 и T_2:

$$T_1 f(x) = f(x) e^{i\varphi_x} - 2\int_x^l f(t)\, dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J e^{i\varphi_x}, \tag{21}$$

$$T_2 f(x) = f(x)(N(x)e^{i\varphi_x} + \Gamma(x)) - 2\int_x^l f(t)\, dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J N(x) e^{i\varphi_x}. \tag{22}$$

Полученная система операторов T_1, T_2 (21) (22) и есть треугольная модель для коммутативной системы операторов [1].

Теорема. *Пусть задан коммутативный узел* Δ (19), *отвечающий коммутативной системе операторов* $\{T_1, T_2\}$ (21), (22), *такой, что* $E=\tilde{E}, \dim E=2$, *а* $\sigma_1=\tilde{\sigma}_1=J_N$ (5), *спектр оператора* T_1 *сосредоточен в точке* $\{1\}$, *характеристическая функция* $S(z)$ *такова, что* $(1,1)S(z)(1,1)^T \neq 0$ *и вектор-функции* $L_x(z)$, $\tilde{L}_x(z)$ *и* $E_x(z), \tilde{E}_x(z), G_x(z), \tilde{G}_x(z)$ *имеют вид* (12), (13) *и* (17), (18). *Обозначим функции* $n(z)=\overline{a}+\overline{b}z$ *и* $m(z)=a+bz$, *где коэффициенты* $a=(1,0)N(1,1)^T$ *и* $b=(1,0)\Gamma(1,1)^T$, *тогда основная система коммутативных операторов* $\{T_1, T_2\}$ *узла* Δ (19) *унитарно эквивалентна системе операторов, которая действует в пространстве де Бранжа* $\mathcal{B}(E,G)$ *следующим образом:*

$$T_1F_1(z)=\left(z+\overline{\mu(\overline{z})}\right)F_1(z)+\nu(\overline{z})F_2(z)+\frac{\overline{E_0(\overline{z})}-\overline{\tilde{E}_0(\overline{z})}}{2}F_2(0),\ \ T_1F_2(z)=\frac{F_2(z)-F_2(0)}{z},$$

$$T_2F_1(z)=\frac{F_1(z)}{m(z)}+\frac{\tilde{\mu}(z)}{m(z)}F_1(z)+\frac{\tilde{\nu}(z)}{m(z)}F_2(z),\ \ T_2F_2(z)=\frac{F_2(z)n(z)-F_2(0)n(0)}{z},$$

где $(F_1(z),F_2(z))\in\mathcal{B}(E,G)$. *Коэффициенты* $\mu(z)$ *и* $\nu(z)$ *имеют вид*

$$\nu(z)=\frac{c_2(z)c_3(z)-c_1(z)c_4(z)}{c_2(z)-c_4(z)},\ \ \mu(z)=\frac{c_1(z)-c_3(z)}{c_2(z)-c_4(z)},$$

$$c_1(z)=\frac{(E_0(z)+\tilde{E}_0(z))(1-z^2)}{2\left(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})}-\tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\overline{z})}\right)}\int_0^l \Psi_t^*(1,1)d\,F_tL_t^*(\overline{z}),$$

$$c_2(z)=\frac{(G_{l'}(z)+\tilde{G}_{l'}(z))(1-z^2)}{2\left(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})}-\tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\overline{z})}\right)},\ \ c_3(z)=\frac{E_0(z)+\tilde{E}_0(z)}{E_0'(z)-\tilde{E}_0'(z)}\int_0^l \Psi_t^*(1,1)dF_t\tilde{L}_t^*(\overline{z}),$$

$$c_4(z)=\frac{2\left(G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})}-\tilde{G}_l(z)\overline{\tilde{G}_l(\overline{z})}\right)}{(E_0'(z)-\tilde{E}_0'(z))(1-z^2)},$$

а коэффициенты $\tilde{\mu}(z)$ *и* $\tilde{\nu}(z)$ —

$$\tilde{\mu}(z)=\frac{I_1(z)d_3(z)-I_2(z)d_1(z)}{d_2(z)d_3(z)-d_1(z)d_4(z)},\ \ \tilde{\nu}(z)=\frac{I_1(z)d_4(z)-I_2(z)d_2(z)}{d_1(z)d_4(z)-d_2(z)d_3(z)},$$

$$I_1(z)=\frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\left(\frac{1}{z}\right)\tilde{\sigma}_2\left(\Phi_l\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-J\left(\overline{E_0(\overline{z})},\overline{\tilde{E}_0(\overline{z})}\right)\right),$$

$$I_2(z)=\frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\left(\frac{1}{z}\right)\tilde{\sigma}_2\left(\Phi_lJ\begin{pmatrix}\overline{G_l(\overline{z})}\\ \overline{\tilde{G}_l(\overline{z})}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right),$$

$$d_1(z)=\frac{E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})}-\tilde{E}_0(z)\overline{\tilde{E}_0(\overline{z})}}{1-|z|^2},\ \ d_2(z)=\frac{G_l'(z)+\tilde{G}_l'(z)}{2},$$

$$d_3(z)=\frac{E_0'(z)-\tilde{E}_0'(z)}{2},\ \ d_4(z)=\frac{G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})}-\tilde{G}_l(z)\overline{\tilde{G}_l(\overline{z})}}{1-|z|^2}.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Zolotarev V.A. Functional model of commutative operator systems. *J. Math. Physics, Analysis, Geometry*. 2008. **4**, No 3. P. 420—440.
2. Сыровацкий В.Н. Функциональные модели коммутативных систем операторов близких к унитарным. *Вісн. Харк. нац. ун-ту. Сер. Математика, приклад. математика і механіка*. 2012. № 1018. С. 41—61.
3. Syrovatskyi V.N. Functional Models in de Branges Spaces of One Class Commutative Operators. *J. Math. Physics, Analysis, Geometry*. 2014. **10**, No 4. P. 430—450.
4. Золотарёв В.А., Сыровацкий В.Н. Преобразование де Бранжа относительно круга. *Вісн. Харк. нац. ун-ту. Сер. Математика, приклад. математика і механіка*. 2005. № 711, вып. 55. С. 80—92.
5. *Лившиц М.С., Янцевич А.А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Харьков: Изд-во. Харьк. ун-та, 1971. 160 с.
6. *Золотарёв В.А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряжённых и неунитарных операторов. Харьков: Изд-во. Харьк. ун-та, 2003. 342 с.
7. *Золотарёв В.А.* Модельные представления коммутативных систем линейных операторов. *Функц. анализ и его прил.* 1988. **22**, вып. 1. С. 66—68.

Поступило в редакцию 05.10.2016

REFERENCES

1. Zolotarev, V. A. (2008). Functional model of commutative operator systems. J. Math. Physics, Analysis, Geometry, **4**, No 3, pp. 420-440.
2. Sirovatsky, V. N. (2012). Functional models for commutative systems of operators close to a unitary one. Kharkov University Bulletin, No 1018, pp. 41-61 (in Russian).
3. Syrovatskyi, V. N. (2014). Functional Models in De Branges Spaces of One Class Commutative Operators. J. Math. Physics, Analysis, Geometry, **10**, No 4, pp. 430-450.
4. Zolotarev, V. A., Sirovatsky, V. N. (2005). Transformation de Branges on the terms. Kharkov University Bulletin, No 711, Iss. 55, pp. 80-92 (in Russian).
5. Livshits, M. S., Yantsevich, A. A. (1971). A theory of operator knots in Hilbert spaces. Kharkov: Izd-vo Kharkov. un-ta (in Russian).
6. Zolotarev, V. A. (2003). Analytical methods of spectral presentations of not self-conjugate and nonunitary operators. Kharkov: Izd-vo Kharkov. un-ta (in Russian).
7. Zolotarev, V. A. (1988). Model representations of commutative systems of linear operators. Functional Analysis and Its Applications, **22**, Iss. 1, pp. 55-57.

Received 05.10.2016

В.М. Сировацький

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна
E-mail: vsirovatsky@gmail.com

ПРО ФУНКЦІОНАЛЬНІ МОДЕЛІ КОМУТАТИВНИХ СИСТЕМ
ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРАХ ДЕ БРАНЖА

Для комутативної системи лінійних обмежених операторів T_1, T_2, які діють у гільбертовому просторі H і жоден з операторів не є стисненням, отримано функціональну модель у просторі де Бранжа для круга.

Ключові слова: *функціональна модель, комутативна система операторів.*

V.N. Syrovatskyi

V. N. Karazin Kharkiv National University
E-mail: vsirovatsky@gmail.com

ABOUT FUNCTIONAL MODELS OF COMMUTATIVE SYSTEMS
OF OPERATORS IN THE SPACES OF DE BRANGES

For the commutative system of linear bounded operators T_1, T_2 which act in a Hilbert space H and are such that none of them is a compression, a functional model is built in the space of de Branges for a circle.

Keywords: *functional model, commutative system of operators.*