doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.06.014
УДК 512.61

А.Н. Химич, Е.Ф. Галба, Н.А. Варенюк

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев
E-mail: khimich_ic@mail.ru, e.f.galba@ukr.net, nvareniuk@ukr.net

Взвешенные псевдообратные матрицы со знаконеопределенными весами

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А.Н. Химичем

Определяются и исследуются взвешенные псевдообратные матрицы с невырожденными знаконеопределенными весами. Доказана теорема существования и единственности этих матриц. Дано представление взвешенных псевдообратных матриц с индефинитными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, получены разложения указанных матриц в матричные степенные ряды и произведения, предельные представления этих матриц.

Ключевые слова: *взвешенные псевдообратные матрицы с невырожденными индефинитными весами, матричные степенные ряды и произведения, предельные представления взвешенных псевдообратных матриц.*

Определение взвешенной псевдообратной матрицы с положительно определенными весами впервые было дано в работе [1]. В работе [2] введено понятие косой псевдообратной матрицы. В [3] показано, что множество взвешенных псевдообратных матриц, определенных в [1], совпадает с множеством косых псевдообратных матриц, определенных в [2]. В работе [4] дано определение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами (с положительно полуопределенными весовыми матрицами). Там же определены необходимые и достаточные условия существования рассмотренного варианта псевдообратных матриц с вырожденными весами. В работах [5—7] исследованы другие варианты псевдообратных матриц с вырожденными весами. Определены необходимые и достаточные условия существования рассмотренных псевдообратных матриц с вырожденными весами, а также взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами и установлена их связь со взвешенными псевдообратными матрицами. В работе [8] введено понятие ML-взвешенной псевдообратной матрицы. В работах [9, 10] взвешенная псевдоинверсия с вырожденными весами, когда веса есть диагональные матрицы, используется при построении итерационных методов для решения линейных задач. В работах [11, 12] проведен анализ влияния возмущений исходных данных на решения задач вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с положительно определенными весами.

В настоящем сообщении определяются и исследуются взвешенные псевдообратные матрицы с невырожденными знаконеопределенными весами. Введем необходимые для дальнейшего изложения определения, обозначения и вспомогательные утверждения.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел. Пусть H — симметричная положительно-определенная, положительно полуопределенная, или же знаконеопределенная невырожденная матрица. В $\mathbb{R}^n$ введем скалярное произведение по формуле $(u, \nu)_H = (Hu, \nu)_E$, где $(u, \nu)_E = u^T \nu$, E — единичная матрица.

Определим взвешенную норму прямоугольной матрицы с симметричными невырожденными весовыми матрицами. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $H = H^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $V = V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невырожденные матрицы. Для множества матриц A норму введем соотношением

$$\left\|A\right\|_{HV} = \sup_{x\neq 0}\frac{\left\|AVx\right\|_{H^2}}{\left\|x\right\|_{E_n}} = \sup_{x\neq 0}\frac{\left\|HAVx\right\|_{E_m}}{\left\|x\right\|_{E_n}} = \sup_{x\neq 0}\frac{(VA^T H^2 AVx, x)_{E_m}^{1/2}}{\left\|x\right\|_{E_n}}, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а нижний индекс при единичной матрице означает ее размерность.

Взвешенная спектральная норма (1) матрицы A определяется формулой

$$\left\|A\right\|_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^T H^2 AV)]^{1/2}, \tag{2}$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

Лемма 1. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *а* $H = H^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и* $V = V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— невырожденные матрицы. Тогда функция* (1) *является аддитивной (обобщенной) матричной нормой.*

Лемма 2. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, *а* $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *— симметричные невырожденные матрицы, тогда справедливы соотношения*

$$\left\|AB\right\|_{HV} \leqslant \left\|A\right\|_{HM}\left\|B\right\|_{M^{-1}V}, \quad \left\|AB\right\|_{HV} \leqslant \left\|A\right\|_{HM^{-1}}\left\|B\right\|_{MV}. \tag{3}$$

При доказательстве теоремы о существовании и единственности взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенными весами использованы утверждения.

Лемма 3. *Пусть для квадратных матриц* K, L, M *выполняются условия* $KM = MK$, $LM = ML$. *Тогда из равенства* $KM^2 = LM^2$ *следует равенство* $KM = LM$.

Лемма 4. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *а* $B = B^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и* $C = C^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— невырожденные знаконеопределенные матрицы. Тогда ранги матриц* A *и* $A^T BACA^T$ *совпадают.*

При разложении взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения использованы следующие утверждения.

Лемма 5. *Для любых матриц* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *и действительного числа* $-\infty < 0 < \delta < \infty$ *имеет место тождество*

$$\prod_{k=0}^{n-1}\{E + \delta^{2^k}(P + \delta E)^{-(2^k)}\}(P + \delta E)^{-1}W = \sum_{k=1}^{2^n}\delta^{k-1}(P + \delta E)^{-k}W, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Лемма 6. *Для любых матриц* $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *и действительного числа* $-\infty < 0 < \delta < \infty$ *имеет место тождество*

$$M(L + \delta E)^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\{E + \delta^{2^k}(L + \delta E)^{-(2^k)}\} = M\sum_{k=1}^{2^n}\delta^{k-1}(L + \delta E)^{-k}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Определим симметризуемые и взвешенные ортогональные матрицы.

Определение 1. Квадратную вещественную матрицу U будем называть симметризуемой слева или справа, если существует такая симметричная невырожденная матрица H, что выполняются соответственно равенства $HU = U^T H$, $UH = HU^T$.

Определение 2. Квадратную вещественную матрицу Q будем называть H-взвешенной ортогональной (ортогональной с весом H), если выполняется условие $Q^T HQ = E$, где H — симметричная невырожденная матрица.

При разложении взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения использовано взвешенное спектральное разложение матриц, сформулированное в следующей лемме.

Лемма 7. *Симметризуемая слева положительно определенным симметризатором H матрица U может быть приведена к диагональной форме с помощью H-взвешенного ортогонального преобразования, т.е. существует такая H-взвешенная ортогональная матрица Q, что $Q^T HUQ = \Lambda$, и матрица U представима в виде $U = Q\Lambda Q^T H$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, λ_i — собственные значения матрицы U, а столбцы матрицы Q образуют полную систему собственных векторов матрицы U.*

Теперь перейдем к изложению основных результатов исследования, а именно к определению и установлению свойств взвешенных псевдообратных матриц с невырожденными знаконеопределенными весами.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные знаконеопределенные невырожденные матрицы. Взвешенную псевдообратную матрицу к матрице A определим как матрицу, удовлетворяющую системе матричных уравнений

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (BAX)^T = BAX, \quad (CXA)^T = CXA. \tag{6}$$

Следовательно, согласно определению 1 рассматривается вариант взвешенной псевдоинверсии, когда матрицы AX и XA симметризуемые слева соответственно знаконеопределенными невырожденными симметризаторами B и C.

Доказана теорема о существовании единственного решения системы матричных уравнений (6). При доказательстве используются утверждения лемм 3 и 4, скелетное разложение матриц, а также теорема Гамильтона—Кэли, на основании чего получено представление взвешенной псевдообратной матрицы с индефинитными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц.

Теорема 1. *Система матричных уравнений (6) имеет единственное решение $X = A^+_{BC}$, причем матрица A^+_{BC}, удовлетворяющая (6), представима в виде*

$$A^+_{BC} = C^{-1} S A^T B, \tag{7}$$

где $S = f(A^T BAC^{-1})$ — многочлен от матрицы $A^T BAC^{-1}$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1}[(A^T BAC^{-1})^{k-1} + \alpha_1 (A^T BAC^{-1})^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} E],$$

α_p, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты характеристического многочлена

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n = \det[\lambda E - A^T BAC^{-1}],$$

а α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

Теперь получим разложение матриц с невырожденными знаконеопределенными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения. Для этого используется представление взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, полученное в теореме 1, и утверждения лемм 2 и 5—7. Обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц, когда обе весовые матрицы симметричные, причем одна из них положительно определена, а вторая — невырожденная знаконеопределенная. Сначала рассмотрим случай, когда матрица C — положительно определена, а B — знаконеопределенная.

Теорема 2. *Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, симметричной положительно определенной матрицы $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа δ, удовлетворяющего условию $0 < |\delta| < \frac{1}{2}\mu(C^{-1}A^TBA)$, имеют место соотношения*

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1}(C^{-1}A^TBA + \delta E)^{-k} C^{-1}A^TB, \tag{8}$$

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,p}^{+} \right\|_{C^{1/2}V} \leqslant |\delta|^p (\mu(C^{-1}A^TBA) + \delta)^{-p} \left\| A_{BC}^{+} \right\|_{C^{1/2}V}, \tag{9}$$

где $A_{\delta,p}^{+} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1}(C^{-1}A^TBA + \delta E)^{-k} C^{-1}A^TB,\ p = 1, 2, \ldots;$ $\mu(L) = \min\{|\lambda| : \lambda \neq 0 \in \sigma(L)\}$, λ_i — *собственные значения матрицы* $C^{-1}A^TBA$; $V = V^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — *любая симметричная невырожденная матрица.*

При выполнении предположений теоремы 1 в силу (4) и (8) имеем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенной симметричной невырожденной весовой матрицей $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и положительно определенной матрицей $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^{+} = \prod_{k=0}^{\infty} \{E + \delta^{2^k}(C^{-1}A^TBA + \delta E)^{-(2^k)}\}(C^{-1}A^TBA + \delta E)^{-1}C^{-1}A^TB. \tag{10}$$

Обозначим $A_{\delta,n}^{+} = \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k}(C^{-1}A^TBA + \delta E)^{-(2^k)}\}(C^{-1}A^TBA + \delta E)^{-1}C^{-1}A^TB,\ n = 1, 2, \ldots.$

Тогда в силу тождества (4) и соотношения (9) получим

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,n}^{+} \right\|_{C^{1/2}V} \leqslant \delta^{2^n} (\mu(C^{-1}A^TBA) + \delta)^{-(2^n)} \left\| A_{BC}^{+} \right\|_{C^{1/2}V}. \tag{11}$$

Из оценки (9) следует, что для любого $p = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы:

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1}(C^{-1}A^TBA + \delta E)^{-k} C^{-1}A^TB, \tag{12}$$

а из оценки (11) для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta \to 0} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k}(C^{-1}A^TBA + \delta E)^{-(2^k)}\}(C^{-1}A^TBA + \delta E)^{-1}C^{-1}A^TB. \tag{13}$$

Теперь рассмотрим случай, когда матрица B — положительно определена, а C — невырожденная знаконеопределенная.

Теорема 3. *Для произвольной матрицы* $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *симметричной положительно определенной матрицы* $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, *симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и действительного числа* δ, *удовлетворяющего условию* $0 < \left|\delta\right| < \frac{1}{2}\mu(AC^{-1}A^TB)$, *имеют место соотношения*

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{-1} A^T B (AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-k}, \tag{14}$$

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,\, p}^{+} \right\|_{HB^{-1/2}} \leqslant \left|\delta\right|^{p} (\mu(AC^{-1}A^TB) + \delta)^{-p} \left\| A_{BC}^{+} \right\|_{HB^{-1/2}}, \tag{15}$$

где $A_{\delta,\, p}^{+} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} C^{-1} A^T B (AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-k}$, $p = 1, 2, \ldots$; $\mu(L)$ *определено в теореме 2*, λ_i — *собственные значения матрицы* $AC^{-1}A^TB$; $H = H^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — *любая симметричная невырожденная матрица*.

При выполнении предположений теоремы 3 в силу (5) и (14) имеем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы с положительно определенной симметричной весовой матрицей $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и знаконеопределенной симметричной невырожденной весовой матрицей $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^{+} = C^{-1} A^T B (AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + \delta^{2^k} (AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-(2^k)}\}. \tag{16}$$

Обозначим $A_{\delta,\, n}^{+} = C^{-1} A^T B (AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-(2^k)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Тогда в силу тождества (5) и соотношения (15) получим

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,\, n}^{+} \right\|_{HB^{-1/2}} \leqslant \delta^{2^n} (\mu(AC^{-1}A^TB) + \delta)^{-(2^n)} \left\| A_{BC}^{+} \right\|_{HB^{-1/2}}. \tag{17}$$

Из оценки (15) следует, что для любого $p = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы:

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta\to 0} C^{-1} A^T B \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-k}, \tag{18}$$

а из оценки (17) для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta\to 0} (AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-1} C^{-1} A^T B \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (AC^{-1}A^T B + \delta E)^{-(2^k)}\}. \tag{19}$$

Из предельных представлений (9), (11), (18), (19) взвешенных псевдообратных матриц следует, что при достаточно малом параметре δ матрицы A_{BC}^{+} и $A_{\delta,\, p}^{+}$, $A_{\delta,\, n}^{+}$ могут как угодно мало отличаться друг от друга и на основании предложенных предельных представлений можно вычислять приближения к взвешенным псевдообратным матрицам. Оценки близости взвешенных псевдообратных матриц и их приближенных значений даны формулами (9), (11), (15), (17).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Chipman J.S. On least squares with insufficient observation. *J. Amer. Statist. Assoc.* 1964. **59**, № 308. P. 1078—1111.
2. Milne R.D. An oblique matrix pseudoinverse. *SIAM J. Appl. Math.* 1968. **16**, № 5. P. 931—944.
3. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. A note on the oblique matrix pseudoinverse. *SIAM J. Appl. Math.* 1971. **20**, № 2. P. 173—175.
4. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights. *SIAM J. Appl. Math.* 1971. **21**, № 3. P. 480— 482.
5. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами. *Журн. вычисл. матем. и мат. физ.* 2009. **49**, № 8. С. 1347—1363.
6. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Существование и единственность взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Укр. мат. журн.* 2011. **63**, № 1. С. 80—101.
7. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Теоремы существования и единственности в теории взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами. Кибернетика и системный анализ. 2011. № 1. С. 14—33.
8. Mitra S.K., Rao C.R. Projections under seminorms and generalized Moore—Penroze inverses. *Linear Algebra Appl.* 1974. **9**. P. 155— 167.
9. Censor Y., Elfving T. Block-iterative algorithms with diagonally scaled oblique projections for the linear feasibility problem. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2002. **24**, № 1. P. 40—58.
10. Censor Y., Elfving T. Iterative algorithms with seminorm-induced oblique projections. *Abstr. Appl. Anal.* 2003. № 7. P. 387—406.
11. Химич А.Н., Николаевская Е.А. Анализ достоверности компьютерных решений систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными исходными данными. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 6. С. 83—95.
12. Николаевская Е.А., Химич А.Н. Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2009. **49**, № 3. С. 422—430.

Поступило в редакцию 26.01.2017

REFERENCES

1. Chipman, J. S. (1964). On least squares with insufficient observation. J. Amer.Statist. Assoc., **59**, No. 308, pp. 1078-1111.
2. Milne, R. D. (1968). An oblique matrix pseudoinverse. SIAM J. Appl. Math., 16, No. 5, pp. 931-944.
3. Ward, J. F., Boullion, T. L. & Lewis, T. O. (1971). A note on the oblique matrix pseudoinverse. SIAM J. Appl. Math., 20, No. 2, pp. 173-175.
4. Ward, J. F., Boullion, T. L. & Lewis, T.O. (1971). Weighted pseudoinverses with singular weights. SIAM J. Appl. Math., 21, No. 3, pp. 480-482.
5. Galba, E. F., Deineka, V. S. & Sergienko, I. V. (2009). Weighted pseudoinverses and weighted normal pseudosolutions with singular weights. Comput. Math. Math. Phys., 49, No. 8, pp. 1281-1297.
6. Sergienko, I. V., Galba, E. F. & Deineka, V. S. (2011). Existence and uniqueness of weighted pseudoinverse matrices and weighted normal pseudosolutions with singular weights. Ukr. Math. J., 63, Art. 98.
7. Sergienko, I. V., Galba, Y. F. & Deineka, V. S. (2011). Existence and uniqueness theorems in the theory of weighted pseudoinverses with singular weights. Cybern. Syst. Anal., 47, Iss. 1, pp. 11-28.
8. Mitra, S. K. & Rao, C. R. (1974). Projections under seminorms and generalized Moore—Penroze inverses. Linear Algebra Appl., No. 9, pp. 155-167.
9. Censor, Y. & Elfving, T. (2002). Block-iterative algorithms with diagonally scaled oblique projections for the linear feasibility problem. SIAM J. Matrix. Anal. Appl., 24, No. 1, pp. 40-58.
10. Censor, Y. & Elfving, T. (2003). Iterative algorithms with seminorm-induced oblique projections. Abstr. Appl. Anal., No. 7, pp. 387-406.

11. Khimich, A.N. & Nikolaevskaya, E.A. (2008). Reliability analysis of computer solutions of systems of linear algebraic equations with approximate initial data. Cybern. Syst. Anal., 44, Iss. 6, pp. 863-874.
12. Nikolaevskaya, E.A. & Khimich, A.N. (2009). Error estimation for a weighted minimum-norm least squares solution with positive definite weights. Comput. Math. Math. Phys., 49, Iss. 3, pp. 409-417.

Received 26.01.2017

О.М. Хіміч, Є.Ф. Галба, Н.А. Варенюк

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ
E-mail: khimich_ic@mail.ru, e.f.galba@ukr.net, nvareniuk@ukr.net

ЗВАЖЕНІ ПСЕВДООБЕРНЕНІ МАТРИЦІ
ЗІ ЗНАКОНЕВИЗНАЧЕНИМИ ВАГАМИ

Визначаються та досліджуються зважені псевдообернені матриці з невиродженими знаконевизначеними вагами. Доведено теорему існування та єдиності цих матриць. Дано зображення зважених псевдообернених матриць зі знаконевизначеними вагами в термінах коефіцієнтів характеристичних многочленів матриць, що симетризуються, одержано розвинення зазначених матриць у матричні степеневі ряди та добутки, граничні зображення цих матриць.

Ключові слова: *зважені псевдообернені матриці з невиродженими індефінітними вагами, матричні степеневі ряди і добутки, граничні зображення зважених псевдообернених матриць.*

A.N. Khimich, E.F. Galba, N.A. Vareniuk

Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: khimich_ic@mail.ru, e.f.galba@ukr.net, nvareniuk@ukr.net

WEIGHTED PSEUDOINVERSE MATRICES
WITH INDEFINITE WEIGHTS

Weighted pseudoinverse matrices with nonsingular indefinite weights are defined and analyzed. The theorem of existence and uniqueness of these matrices is proved. A representation of weighted pseudoinverse matrices with indefinite weights is given in terms of coefficients of the characteristic polynomials of symmetrizable matrices. Their expansions in matrix power series or products are obtained. The limiting representations of those matrices are obtained.

Keywords: *weighted pseudoinverse matrices with nonsingular indefinite weights, matrix power series and products, limiting representations of weighted pseudoinverse matrices.*