ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.003
УДК 517.9:519.46

А.Ф. Баранник[1], Т.А. Баранник[2], І.І. Юрик[3]

[1] Інститут математики Поморської академії, Слупськ, Польща
[2] Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г. Короленка
[3] Національний університет харчових технологій, Київ
E-mail: anatolij.barannyk@apsl.edu.pl, barannykt@rambler.ru, i.yu@ukr.net

Побудова точних розв'язків нелінійних рівнянь гіперболічного типу

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Г. Нікітіним

Розглянуто підстановки, які редукують рівняння $u_{tt}=a(t)uu_{xx}+b(t)u_x^2+c(t)u$ до системи звичайних диференціальних рівнянь. Запропоновано ефективний метод інтегрування редукованих систем. Показано, що їх інтегрування зводиться до інтегрування системи лінійних рівнянь $w_1''=\Phi_1(t)w_1$, $w_2''=\Phi_2(t)w_2$, де $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ — довільні наперед задані функції.

Ключові слова: *диференціальні рівняння, нелінійні гіперболічні рівняння, узагальнене відокремлення змінних.*

У даній роботі розглядається задача побудови точних розв'язків нелінійного рівняння гіперболічного типу

$$u_{tt}=a(t)uu_{xx}+b(t)u_x^2+c(t)u, \tag{1}$$

де коефіцієнти $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ є функціями від t.

У роботах [1—4] для рівнянь з поліноміальною нелінійністю використовувався метод побудови точних розв'язків з узагальненим відокремленням змінних

$$u=\sum_{i=1}^{k}\psi_i(t)\varphi_i(x), \tag{2}$$

який ґрунтується на відшуканні скінченновимірних підпросторів, інваріантних відносно відповідного диференціального оператора. При цьому система координатних функцій $\varphi_i(x)$ задавалася апріорно, а для визначення функцій $\psi_i(t)$ застосовувався метод невизначених коефіцієнтів. У такий спосіб були отримані такі системи координатних функцій для рівняння (1) [4]:

$1, x, x^2$, якщо $a(t)$ і $b(t)$ — довільні функції;

$1, x, x^2, x^3$, якщо $a(t)=-\dfrac{3}{2}b(t)$;

$1, x, x^2, x^3, x^4$, якщо $a(t)=-\dfrac{4}{3}b(t)$.

Явне задання системи координатних функцій значно спрощує процедуру побудови точних розв'язків, але не гарантує відшукання всіх розв'язків виду (2).

У роботах [5, 6] для пошуку точних розв'язків рівняння (1) використовувалася підстановка виду

$$u=d(x)w(t)+f(t,x), \tag{3}$$

де невідомі функції $d(x)$ і $f(t,x)$ визначалися з умови, що підстановка (3) редукує рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $w(t)$. За допомогою підстановки (3) знайдені нові системи координатних функцій для точних розв'язків рівняння (1). Так, у випадку

$$a(t)=\frac{\alpha}{1-\alpha}b(t),\ \alpha\in R,\ \alpha\neq 0,1,2,3,$$

систему координатних функцій утворюють функції x^2, x^α, а якщо $a(t)=-2b(t)$, то таку систему утворюють функції $x^2, x^2\ln|x|$.

Таким чином, відшукання систем координатних функцій зводить задачу побудови точних розв'язків рівняння (1) до інтегрування відповідних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. У даній роботі запропоновано ефективний метод інтегрування редукованих систем. Показано, зокрема, що інтегрування таких систем зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь

$$w_1''=\Phi_1(t)w_1,\ w_2''=\Phi_2(t)w_2, \tag{4}$$

де $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ — довільні наперед задані функції. У багатьох випадках система (4) може бути проінтегрована.

1. Редукція рівняння (1) до системи двох звичайних диференціальних рівнянь. Розглянемо три випадки.

I. Випадок $a(t)=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}b(t)$, $\alpha\in R$, $\alpha\neq 0,1,2,3$.

Підстановка

$$u=w_1(t)x^2+w_2(t)x^\alpha \tag{5}$$

редукує рівняння (1) до системи рівнянь

$$w_1''=\left[\frac{4-2\alpha}{\alpha}aw_1+c\right]w_1, \tag{6}$$

$$w_2''=[(a-2)(\alpha-3)aw_1+c]w_2. \tag{7}$$

Рівняння (7) є лінійним відносно w_2 для відомих функцій aw_1 і c. Аналогічно рівняння (6) є лінійним відносно w_1 для відомих aw_1 і c. Нехай

$$\frac{4-2\alpha}{\alpha}aw_1+c=\Phi_1(t), \tag{8}$$

$$(\alpha-2)(\alpha-3)aw_1+c=\Phi_2(t). \tag{9}$$

Тоді система (8), (9) перепишеться так:

$$w_1''=\Phi_1(t)w_1,\ w_2''=\Phi_2(t)w_2, \tag{10}$$

де $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ — деякі функції від t. Отже, інтегрування системи (6), (7) за умови, що aw_1 і c задовольняють (7), зводиться до інтегрування системи (10). Розглядаючи (8), (9) як систему рівнянь з двома невідомими aw_1 і c, відзначимо, що вона є сумісною для довільних функцій $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$. Тому можна вважати, що в системі (10) $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ є довільними наперед заданими функціями. Для побудови точних розв'язків рівняння (1) важливо, щоб обидва рівняння системи (10) були інтегровними. Таким чином, побудову розв'язків системи (6), (7) можна провести за такою схемою.

а) Вибираємо довільно функції $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$, для яких обидва рівняння системи (10) є інтегровними.

б) Розв'язавши систему рівнянь (8), (9), знаходимо aw_1 і c:

$$aw_1 = \frac{\alpha(\Phi_2 - \Phi_1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)^2}, \quad c = \frac{2\Phi_2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} + \frac{\alpha(\alpha-3)\Phi_1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}. \tag{11}$$

в) Проінтегрувавши систему рівнянь (10), визначимо її загальний розв'язок:

$$w_1 = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \quad w_2 = c_3\psi_1 + c_4\psi_2,$$

де $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ і $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — фундаментальні системи розв'язків відповідно першого і другого рівняння системи (10).

г) Якщо $\Phi_1 - \Phi_2 \neq 0$, то з першої рівності (11) отримаємо

$$a(t) = \frac{\alpha(\Phi_2 - \Phi_1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)^2\,[c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2]}, \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0, \tag{12}$$

де c_1 і c_2 розглядаються як параметри.

д) Якщо функції $a(t)$ і $c(t)$ визначаються за формулами (12) і (11), то розв'язком рівняння є функція

$$u = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)x^2 + (c_3\psi_1 + c_4\psi_2)x^{\alpha},$$

де $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, а c_3 і c_4 — довільні сталі.

Розглянемо, наприклад, випадок $\Phi_1(t) = -A$ і $\Phi_2(t) = -B$, де A, B — сталі, $A < 0$, $B < 0$, $A \neq B$. Загальний розв'язок системи (10) має вигляд

$$w_1 = c_1\operatorname{ch}(\sqrt{|A|}t) + c_2\operatorname{sh}(\sqrt{|A|}t), \quad w_2 = c_3\operatorname{ch}(\sqrt{|B|}t) + c_4\operatorname{sh}(\sqrt{|B|}t),$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 — довільні сталі. З формул (12) і (11) отримуємо

$$a(t) = \frac{\alpha(A-B)}{(\alpha-1)(\alpha-2)^2}\left[c_1\operatorname{ch}(\sqrt{|A|}t) + c_2\operatorname{sh}(\sqrt{|A|}t)\right]^{-1}, \tag{13}$$

$$c(t) = \frac{2B}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \frac{\alpha(\alpha-3)A}{(\alpha-1)(\alpha-2)}. \tag{14}$$

Таким чином, рівняння (1), в якому функція $a(t)$ визначається за формулою (13), а функція $c(t)$ — за формулою (14), має такий розв'язок:

$$u = \left[c_1\operatorname{ch}(\sqrt{|A|}t) + c_2\operatorname{sh}(\sqrt{|A|}t)\right]x^2 + \left[c_3\operatorname{ch}(\sqrt{|B|}t) + c_4\operatorname{sh}(\sqrt{|B|}t)\right]x^{\alpha},$$

де $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, а c_3 і c_4 — довільні сталі.

II. Випадок $a(t) = -\frac{3}{2} b(t)$.

Підстановка

$$u = w_1(t)x^2 + w_2(t)x^3$$

редукує рівняння (1) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$w_1'' = (bw_1 + c)w_1, \; w_2'' = cw_2.$$

Ця система аналогічна системі (6), (7) і її інтегрування проводиться так само.

III. Випадок $a(t) = -2b(t)$.

Підстановка

$$u = w_1(t)x^2 \ln|x| + w_2(t)x^2$$

редукує рівняння (1) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$w_1'' = (-2bw_1 + c)w_1, \; w_2'' = (-2bw_1 + c)w_2 + bw_1^2.$$

Інтегрування цієї системи проводиться аналогічно інтегруванню системи (6), (7).

2. Редукція рівняння (1) до системи трьох звичайних диференціальних рівнянь. Підстановка

$$u = w_2(t)x^2 + w_1(t)x + w_0(t)$$

редукує рівняння (1) до системи рівнянь

$$w_2'' = [(2a + 4b)w_2 + c]\,w_2, \tag{15}$$

$$w_1'' = [(2a + 4b)w_2 + c]\,w_1, \tag{16}$$

$$w_0'' = [2aw_2 + c]\,w_0 + bw_1^2. \tag{17}$$

Нехай

$$(2a + 4b)w_2 + c = \Phi_2(t), \tag{18}$$

$$2aw_2 + c = \Phi_1(t), \tag{19}$$

де $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ є деякими функціями від t. Інтегрування системи (15)—(17) за умови, що виконуються співвідношення (18), (19), зводиться до інтегрування системи лінійних рівнянь

$$w_2'' = \Phi_2(t)w_2, \;\; w_1'' = \Phi_2(t)w_1, \;\; w_0'' = \Phi_1(t)w_0 + bw_1^2. \tag{20}$$

Вважатимемо, що в системі (20) $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ — довільні наперед задані функції, для яких рівняння системи (20) є інтегровними. Розв'язавши систему (18), (19), знаходимо

$$aw_2 = \frac{1}{2}(\Phi_1 - c), \; bw_2 = \frac{1}{4}(\Phi_2 - \Phi_1), \tag{21}$$

де $c = c(t)$ — довільна функція.

Розглянемо систему рівнянь

$$w_2'' = \Phi_2(t)w_2, \;\; w_1'' = \Phi_2(t)w_1, \;\; w_0'' = \Phi_1(t)w_0 \tag{22}$$

і визначимо її загальний розв'язок:

$$w_2 = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2\,,\ w_1 = c_3\varphi_1 + c_4\varphi_2\,,\ w_0 = c_5\psi_1 + c_6\psi_2\,,$$

де $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ і $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — фундаментальні системи розв'язків відповідно першого і третього рівняння системи (22). Знаходимо загальний розв'язок третього рівняння системи (20):

$$w_0 = \psi_2 \int \frac{\psi_1 b w_1^2}{W} dt - \psi_1 \int \frac{\psi_2 b w_1^2}{W} dt + c_5\psi_1 + c_6\psi_2\,, \tag{23}$$

де $W(t) = \psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2$, $w_1 = c_3\varphi_1 + c_4\varphi_2$,

$$b = \frac{1}{4}(\Phi_2 - \Phi_1)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)^{-1}\,. \tag{24}$$

З першої рівності (21) отримуємо, що

$$a(t) = \frac{1}{2}(\Phi_1 - c)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)^{-1}. \tag{25}$$

Отже, розв'язок рівняння (1), в якому функції $a(t)$ і $b(t)$ визначаються за формулами (25), (24), а $c(t)$ є довільною функцією, має вигляд

$$u = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)x^2 + (c_3\varphi_1 + c_4\varphi_2)x + w_0\,,$$

де w_0 визначається за формулою (23).

Таким чином, підстановки, розглянуті в даній роботі, зводять задачу побудови точних розв'язків рівняння (1) до інтегрування системи рівнянь

$$w_1'' = \Phi_1(t)w_1\,,\ w_2'' = \Phi_2(t)w_2\,,$$

де w_1 і w_2 — функції від *t*, а $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ — довільні наперед задані функції. Інтегровні рівняння такого типу добре вивчені. До них належать, наприклад, узагальнене рівняння Лежандра, вироджене гіпергеометричне рівняння, а також рівняння Бесселя і рівняння Матьє. Довільний вибір функцій $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ дає можливість будувати розв'язки, що мають наперед задані властивості.

Метод побудови точних розв'язків рівняння (1), викладений у пп. 1 і 2, можна застосувати до побудови точних розв'язків нелінійного рівняння

$$u_{tt} = auu_{xx} + f(t)u_x^2 + bf(t)u^2 + g(t)u + h(t), \tag{26}$$

де коефіцієнти $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ є функціями від *t*, а коефіцієнти *a* і *b* — сталі, відмінні від нуля. Рівняння (26) вивчалося в [7], а випадок $f = a$, $g = \text{const}$, $h = \text{const}$ — у [2]. У [7] визначені всі підстановки виду

$$u = w_1(t) + d(x)w_2(t),$$

які редукують (26) до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з невідомими функціями $w_1(t)$, $w_2(t)$. Редуковані системи мають такий самий вигляд, що і системи, наведені в пп. 1 і 2, а тому їх інтегрування проводиться аналогічно.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Галактионов В.А., Посашков С.А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1994. **34**, № 3. С. 373—383.
2. Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. *Proc. Math. Roy. Soc. Edinb.* 1995. **125**, Iss. 2. P. 225—246.
3. Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С.Р. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями. *Дифференц. уравнения*. 1995. **31**, № 2. С. 253—261.
4. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Boca Raton, London: Chapman & Hall/CRC, 2007. 528 p.
5. Barannyk A.F., Barannyk T.A., Yuryk I.I. Separation of variables for nonlinear equations of hyperbolic and Korteweg–de Vries type. *Rep. Math. Phys.* 2011. **68**, Iss. 1. P. 97—105.
6. Barannyk A.F., Barannyk T.A., Yuryk I.I. Generalized Separation of Variables for Nonlinear Equation $u_{tt}=F(u)u_{xx}+aF'(u)u_x^2$. *Rep. Math. Phys.* 2013. **71,** Iss. 1. P. 1—13.
7. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of nonlinear partial differential equations. Boca Raton, London: Chapman & Hall/CRC, 2004. 840 p.

Надійшло до редакції 17.03.2017

REFERENCES

1. Galaktionov, V. A. & Posashkov, S. A. (1994). Tochnye resheniia i invariantnye prostranstva dlia nelineinykh uravnenii gradientnoi diffuzii. Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiziki, 34, No. 3, pp. 373-383 (in Russian).
2. Galaktionov, V. A. (1995). Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. Proc. Math. Roy. Soc. Edinb. 125, Iss. 2, pp. 225-246.
3. Galaktionov, V. A., Posashkov, S. A. & Svirshchevskii, S. R. (1995). Generalized separation of variables for differential equations with polynomial nonlinearities. Differents. uravneniya, 31, No. 2, pp. 253-261 (in Russian); Differ. Equat., 31, Iss. 2, pp. 233-240.
4. Galaktionov, V. A. & Svirshchevskii, S. R. (2007). Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Boca Raton, London: Chapman & Hall/CRC.
5. Barannyk, A., Barannyk, T. & Yuryk, I. (2011). Separation of variables for nonlinear equations of hyperbolic and Korteweg–de Vries type. Rep. Math. Phys., 68, Iss. 1, pp. 97-105.
6. Barannyk, A.F., Barannyk, T.A., & Yuryk, I.I. (2013). Generalized Separation of Variables for Nonlinear Equation $u_{tt}=F(u)u_{xx}+aF'(u)u_x^2$. Rep. Math. Phys., 71, Iss. 1, pp. 1-13.
7. Polyanin, A. D. & Zaitsev, V. F. (2004). Handbook of nonlinear partial differential equations. Boca Raton, London: Chapman & Hall/CRC.

Received 17.03.2017

А.Ф. Баранник [1], Т.А. Баранник [2], И.И. Юрик [3]

[1] Институт математики Поморской академии, Слупск, Польша
[2] Полтавский национальный педагогический университет им. В.Г. Короленко
[3] Национальный университет пищевых технологий**,** Киев
E-mail: anatolij.barannyk@apsl.edu.pl, barannykt@rambler.ru, i.yu@ukr.net

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрены подстановки, редуцирующие уравнение $u_{tt}=a(t)uu_{xx}+b(t)u_x^2+c(t)u$ к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложен эффективный метод интегрирования редуцированных систем. Показано, что их интегрирование сводится к интегрированию системы линейных уравнений $w_1''=\Phi_1(t)w_1$, $w_2''=\Phi_2(t)w_2$, где $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ — произвольные наперед заданные функции.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, нелинейные гиперболические уравнения, обобщенное разделение переменных.*

A.F. Barannyk [1], *T.A. Barannyk* [2], *I.I. Yuryk* [3]

[1] Institute of Mathematics, Pomeranian University, Slupsk, Poland
[2] V.G. Korolenko Poltava National Pedagogical University
[3] National University of Food Technologies, Kiev
E-mail: anatolij.barannyk@apsl.edu.pl, barannykt@rambler.ru, i.yu@ukr.net

CONSTRUCTION OF EXACT SOLUTIONS
TO NONLINEAR EQUATIONS OF THE HYPERBOLIC TYPE

Substitutions that reduce the equation $u_{tt} = a(t)uu_{xx} + b(t)u_x^2 + c(t)u$ to a system of ordinary differential equations are considered. An efficient method to integrate the corresponding reduced systems is proposed. It is shown that their integration can be reduced to the integration of a system of linear equations $w_1'' = \Phi_1(t)w_1$, $w_2'' = \Phi_2(t)w_2$, where $\Phi_1(t)$ and $\Phi_2(t)$ are arbitrary predefined functions.

Keywords: *differential equations, nonlinear hyperbolic equations, generalized separation of variables.*