

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.010>

УДК 539

В.О. Вахненко

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна, НАН України, Київ

E-mail: vakhnenko@ukr.net

Простий полюс та полюс другого порядку в оберненій задачі розсіяння

Представлено академіком НАН України В.І. Старостенком

Для дискретної частини спектральних даних у методі оберненої задачі розсіяння враховані двократні полюси та простий полюс. Обсяг застосування запропонованих спектральних даних демонструється через аналіз рівняння Вахненка—Паркеса, що дозволило отримати нові розв'язки. Цей підхід може бути використаний для інших інтегровних нелінійних рівнянь.

Ключові слова: обернена задача розсіяння, спектральні дані, двократні полюси.

Низка задач, що досліджуються в різноманітних галузях фізики: оптиці, гідродинаміці, фізиці плазми [1–5], приводить до рівняння Вахненка—Паркеса (ВП) [6–8]

$$W_{\text{ХХТ}} + (1 + W_{\text{T}})W_{\text{X}} = 0. \quad (1)$$

Якщо рівняння ВП (1) спочатку викликало інтерес з точки зору математичної фізики як одне з інтегровних рівнянь, то зараз воно використовується також для опису фізичних явищ, зокрема, гранично коротких електромагнітних імпульсів [2], високочастотних збурень у релаксівному середовищі [3, 4, 9], магнітних солітонів [5].

Рівняння (1) пов'язане взаємооберненим перетворенням з рівнянням Вахненка [9], яке інколи цитується як рівняння Островського—Вахненка

$$(u_t + uu_x)_x + u = 0. \quad (2)$$

Принагідно відмітимо, що продиференційоване рівняння (1) також називають рівнянням ВП [10]

$$UU_{\text{ХХТ}} - U_{\text{X}}U_{\text{ХТ}} + U^2U_{\text{T}} = 0, \quad U = W_{\text{X}}. \quad (3)$$

Детальний опис властивостей рівняння ВП (1) можна знайти в огляді [8]. Подальший розвиток у вивченні рівняння ВП пов'язаний із дослідженням двократних полюсів у методі оберненої задачі розсіяння (ОЗР) [11]. Запропонований нами підхід [11] суттєво розширює стандартну процедуру ОЗР, в якій розглянуті тільки прості полюси. Такий підхід може бути з успіхом використаний і для інших інтегровних рівнянь.

© В.О. Вахненко, 2017

Мета роботи полягає у вивченні взаємодії солітона зі збуреннями, що відповідають полюсам другого порядку в спектрі для ОЗР.

1. Спектральна задача. Прості полюси. Згідно з методом, описаним Каудреєм [12], спектральне рівняння для багатьох еволюційних рівнянь може бути записане так:

$$\frac{\partial}{\partial X} \psi = [\mathbf{A}(\zeta) + \mathbf{B}(X, \zeta)] \psi. \quad (4)$$

Для зручності ми досліджуємо спектральне рівняння третього порядку (4). Спектральне рівняння третього порядку асоціюється з рівнянням Буссінеска [12], рівняннями KdV вищих порядків [13], модельним рівнянням для мілкої води [14], а також рівнянням ВП (1) [6, 15].

Використовуючи рівняння ВП (1) як приклад, ми націлюємося на вивчення двократно вироджених полюсів. Для рівняння (1) спектральне рівняння набуває вигляду [6, 8]

$$\psi_{XXX} + W_X \psi_X - \lambda \psi = 0, \quad (5)$$

або ж у матричному вигляді (4) з

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_X \\ \psi_{XX} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W_X & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Матриця \mathbf{A} має власні значення $\lambda_j(\zeta)$ та ліві і праві власні вектори $\tilde{\mathbf{v}}_j(\zeta)$ і $\mathbf{v}_j(\zeta)$, відповідно. Ці величини визначаються із спектрального параметра λ таким чином:

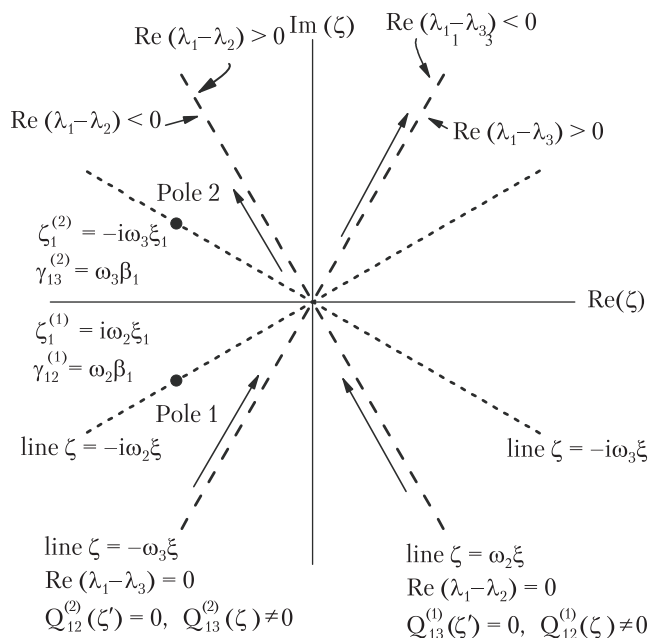
$$\lambda_j(\zeta) = \omega_j \zeta, \quad \lambda_j^3(\zeta) = \lambda, \\ \mathbf{v}_j(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j(\zeta) \\ \lambda_j^2(\zeta) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_j(\zeta) = (\lambda_j^2(\zeta) \quad \lambda_j(\zeta) \quad 1), \quad (7)$$

де $\omega_j = e^{2\pi i(j-1)/3}$ – кубічні корені з одиниці ($j = 1, 2, 3$).

Розв'язок системи лінійних рівнянь (4) одержав Каудрей [12] в термінах функцій Йоста $\phi_j(X, \zeta)$, яким притаманна асимптотична поведінка

$$\Phi_j(X, \zeta) := \exp\{-\lambda_j(\zeta)X\} \phi_j(X, \zeta) \rightarrow \mathbf{v}_j(\zeta), \quad \text{коли } X \rightarrow -\infty. \quad (8)$$

Комплексна площина повинна бути подрібнена на такі області, щоб всередині кожної області знак числа $\text{Re}(\lambda_i(\zeta))$ був фіксованим (див. рисунок). Коли відбувається перехід з однієї області до іншої, знак змінюється щонайменше для однієї пари $i \neq j$ і, як наслідок, на межі двох областей $\text{Re}(\lambda_i(\zeta)) = \text{Re}(\lambda_j(\zeta))$. Функція Йоста ϕ_j аналітична по всій комплексній площині ζ за виключенням полюсів, а також скінченних сингулярностей на межах між областями. В довільній точці всередині будь-якої області комплексної площини ζ розв'язок рівняння (4) знаходиться зі співвідношення (2.12) з [12]. Це є пряма спектральна задача.



Регулярні області для функції Йоста $\varphi_1(X, \zeta)$ на комплексній площині ζ . Штрихові лінії визначають межі між регулярними областями. На цих лініях задані сингулярності $Q_{1j}(\zeta')$. На пунктирних лініях з'являються полюси

Все ж ми будемо розпочинати з попередньо визначених спектральних даних для реконструкції розв'язку W нелінійного рівняння, що аналізується, тобто ми розглядаємо тільки обернену спектральну задачу. Інформація про сингулярність функцій Йоста $\varphi_j(X, \zeta)$ утримується в спектральних даних. Перш за все розглянемо полюси. Розпочинаючи з простих полюсів, ми використаємо добре відомі співвідношення

[12] для того, щоб порівняти з новими результатами для кратних полюсів, які наведено в пункті 2. Як доведено в [12], лишок простого полюса може бути вирахований так:

$$\text{Res } \varphi_i(X, \zeta_i^{(k)}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \gamma_{ij}^{(k)} \varphi_j(X, \zeta_i^{(k)}) \quad (9)$$

Величини $\zeta_i^{(k)}$ і $\gamma_{ij}^{(k)}$ визначають дискретну частину спектральних даних у випадку простих полюсів.

На відміну від робіт [6, 12] не будемо обмежувати себе простими полюсами, а використаємо результати [11] та врахуємо двічі вироджені полюси для дискретної частини спектральних даних.

Сингулярності в $\varphi_1(X, \zeta)$ можуть з'явитися тільки на межах між регулярними областями на площині ζ та характеризуються функціями $Q_{1j}(\zeta')$ для кожного фіксованого $j \neq 1$. Обмежуючись тільки розглядом полюсів, вважаємо $Q_{1j}(\zeta') \equiv 0$ у співвідношеннях (6.20) з [12]. Таким чином, для простих полюсів спектральні дані такі [6, 12]:

$$S = \{\zeta_1^{(k)}, \gamma_{1j}^{(k)}; \quad j = 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, m\}. \quad (10)$$

Заключним кроком у методі ОЗР є реконструкція матриці $\mathbf{B}(X, T; \zeta)$ та розв'язку $W(X, T)$ зі спектральних даних S (10). Каудрей довів, що для простих полюсів спектральні дані визначають $\Phi_1(X, \zeta)$ однозначно у вигляді (див. співвідношення (6.20) у [12])

$$\Phi_1(X, T; \zeta) = 1 - \sum_{j=2}^3 \gamma_{1j}^{(k)}(T) \frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta_1^{(k)})]X\}}{\lambda_1(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta)}. \quad (11)$$

Рівняння (11) утримує спектральні дані, а саме, K простих полюсів з величинами $\gamma_{1j}^{(k)}$ для спектра зв'язаних станів.

З придатним вибором величини ζ ліва сторона в (11) може бути $\Phi_1(X, T; \omega_j \zeta_1^{(k)})$, що веде до системи лінійних рівнянь для невідомих $\Phi_1(X, T; \omega_j \zeta_1^{(k)})$ [12]. Розв'язок системи цих рівнянь дає можливість визначити $\Phi_1(X, T; \zeta)$ з (11). Знаючи $\Phi_1(X, T; \zeta)$ та враховуючи екстраінформацію, а саме, вид розвинутої функції $\Phi_1(X, T; \zeta)$ в асимптотичний ряд за $\lambda_1^{-1}(\zeta)$, знаходимо зв'язок з розв'язком $W(X, T)$ [8]

$$\Phi_1(X, T; \zeta) = 1 - \frac{1}{3\lambda_1(\zeta)} [W(X, T) - W(-\infty)] + O(\lambda_1^{-2}(\zeta)). \quad (12)$$

Отже, розв'язок $W(X, T)$ та матрицю $\mathbf{B}(X, T; \zeta)$ вдається реконструювати зі спектральних даних.

В наступних підрозділах будемо вивчати кратні полюси (на відміну від простих полюсів) для дискретної частини спектральних даних. За винятком співвідношення (11) всі інші формули залишаються вірними для запропонованих нижче спектральних даних і будуть використовуватися в подальшому.

2. Двократні полюси. Для простих полюсів справедлива формула (11). Зараз врахуємо двократні полюси. Для цього розглянемо додаткове рівняння до спектрального рівняння (5)

$$\chi_{XXX} + W_{\zeta X} \psi_X + W_X \chi_X - \zeta^3 \chi - 3\zeta^2 \psi = 0. \quad (13)$$

Для $\chi = \psi_\zeta$ рівняння (13) впливає з (5) після диференціювання його за ζ . Зручно спектральний параметр λ подати так: $\lambda = \zeta^3$ в силу властивості (7).

Детальний аналіз системи рівнянь (5), (13), який викладено в [11], приводить до розв'язку через функції Йоста

$$\begin{aligned} \Phi_1(X; \zeta) = & 1 - \sum_{k=1}^2 \sum_{j=2}^3 \left\{ \gamma_{1j}^{(k)} \frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta_1^{(k)})]X\}}{\lambda_1(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta)} \Phi_1(X; \omega_j \zeta_1^{(k)}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta_1^{(k)}} \left[\gamma_{1j+3}^{(k)} \frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta_1^{(k)})]X\}}{\lambda_1(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta)} \dots \Phi_1(X; \omega_j \zeta_1^{(k)}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

де полюси $\zeta_1^{(k)}$ ($k=1, 2$) – двократно вироджені. Крім того у співвідношенні (14) утримуються спектральні дані $\gamma_{1j}^{(k)}$ з $j=1 \dots 6$. Зручно означити величини h_k через співвідношення

$$\gamma_{1j+3}^{(k)} = \frac{1}{2} h_k \gamma_{1j}^{(k)},$$

щоб узгодити (14) зі співвідношеннями (3.14), (5.1) з [11].

Як було доведено в [6, 15] полюси появляються парами

$$\zeta_1^{(1)} = i\omega_2 \xi_1, \quad \zeta_1^{(2)} = -i\omega_3 \xi_1, \quad (15)$$

де ξ_1 – дійсна стала. Більш того, $\omega_2 \gamma_{12}^{(1)} = \gamma_{13}^{(2)}$. Обмежимося однією парою двократних полюсів. Ясно з (15), що $h_1 = i\omega_2 h$, $h_2 = -i\omega_3 h$, де h – дійсна стала.

Тут необхідно відмітити, що часова еволюція спектральних даних для двократних полюсів більш складна, ніж для простих полюсів і з'являється у вигляді [11]

$$\xi_1 = \text{const}, \quad h = \text{const}, \quad \gamma_{1j}^{(k)}(T) = \gamma_{1j}^{(k)}(0) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T}{\xi_1}\right). \quad (16)$$

Співвідношення (14) спільно з (12) дають

$$W(X, T) - W(-\infty) = 3 \frac{\partial}{\partial X} \ln(\det \mathbf{M}(X, T)), \quad (17)$$

де $\det \mathbf{M}(X, T)$ – детермінант деякої матриці $\mathbf{M}(X)$, явний вигляд якої можна знайти в [11]. Метод підрахунку детермінанта викладено в [11]. Ми наводимо його значення через допоміжну функцію $F_{2p}(X, T) = \sqrt{\det \mathbf{M}(X, T)}$. Індекс $2p$ відносить функцію до двократного полюса

$$F_{2p}(X, T) = 1 + \left[s_2 + r_2 \left(X + \frac{T}{3\xi_1^2} \right) \right] \exp(\theta_2) + p_2 \exp(2\theta_2), \quad (18)$$

$$s_2 = c_2 \left(1 + \frac{h}{2\xi_1} \right), \quad r_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} hc_2, \quad p_2 = -\frac{h^2 c_2^2}{3 \cdot 2^4 \xi_1^2},$$

$$c_2 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{3}\xi_1}, \quad \theta_2 = \sqrt{3}\xi_1 X - \frac{T}{\sqrt{3}\xi_1}.$$

Сталі ξ_1, h – дійсні. Існує одна довільна стала β_1 . Вона повинна бути дійсна для дійсних розв'язків.

Оскільки $p_2 < 0$ для довільної дійсної β_1 , тому маємо

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} F = 1, \text{ а також } \lim_{X \rightarrow +\infty} F = -\infty,$$

значить існує X_r таке, що $F(X_r) = 0$. Отже, дійсний розв'язок (17) з (18) є сингулярним. Якщо визначити величину β_1 як уявну, то розв'язки будуть гладкі, але комплексні. Вибір дійсних розв'язків з комплексних є відкритою задачею.

3. Двократний та простий полюси. Зараз розглянемо взаємодію солітона з хвилею, що асоціюється з двократним полюсом. Вважаємо, що солітону відповідає простий полюс з ξ_3 . Солітон характеризується тоді величинами

$$c_3 = \frac{\beta_3}{2\sqrt{3}\xi_3}, \quad \theta_3 = \sqrt{3}\xi_3 X - \frac{T}{\sqrt{3}\xi_3}.$$

Для зручності перепишемо (18) у вигляді

$$F_{2p}(X, T) = 1 + c_2(1 + gh)\exp(\theta_2) + p_2 \exp(2\theta_2), \quad (19)$$

де

$$g = \frac{1}{2\xi_1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(X + \frac{T}{3\xi_1^2} \right).$$

Доповнюючи це збурення (19) солітоном, можна отримати розв'язок

$$W(X, T) - W(-\infty) = 6 \frac{\partial}{\partial X} \ln(F_{2ps}(X, T)) \quad (20)$$

через допоміжну функцію

$$F_{2ps}(X, T) = 1 + c_2(1 + gh)\exp(\theta_2) + c_3 \exp(\theta_3) + p_2 \exp(2\theta_2) + b_{13}[1 + (g + g_3)h]c_2c_3 \exp(\theta_2)\exp(\theta_3) + p_2 b_{13}^2 c_3 \exp(2\theta_2)\exp(\theta_3), \quad (21)$$

де

$$g_3 = -\frac{1}{2\xi_3} \frac{b_{13p}}{b_{13}}, \quad b_{13} = \frac{(y-1)^3 y^3 + 1}{(y+1)^3 y^3 - 1}, \quad y = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad b_{13p} = \frac{db_{13}}{dy}.$$

Таким чином, ми отримали розв'язок, що асоціюється з простим полюсом (солітон) та двократним полюсом у дискретному спектрі для оберненої задачі розсіяння.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Kraenkel R.A., Leblond H., Manna M.A. An integrable evolution equation for surface waves in deep water. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2014. **47**, No. 2. 025208 (17pp). doi:https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/2/025208
2. Сазонов С.В., Устинов Н.В. Нелинейное распространение векторных предельно коротких импульсов в среде симметричных и несимметричных молекул. *ЖЭТФ*. 2017. **151**, вып. 2. С. 249–269. doi:10.7868/S0044451017020043
3. Vakhnenko V.O. High-frequency soliton-like waves in a relaxing medium. *J. Math. Phys.* 1999. **40**. P. 2011–2020. doi: https://doi.org/10.1063/1.532847
4. Kuetche V.K. Barotropic relaxing media under pressure perturbations: Nonlinear dynamics. *Dynamics Atmosph. Oceans*. 2015. **72**. P. 21–37. doi:https://dx.doi.org/10.1016/j.dynatmoce.2015.10.001
5. Kuetche V.K. Inhomogeneous exchange within ferrites: Magnetic solitons and their interactions. *J. Magnetism Magnetic Materials*. 2016. **398**. P. 70–81. doi:https://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2015.08.120.
6. Vakhnenko V.O., Parkes E.J. The calculation of multi-soliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2002. **13** (9), P. 1819–1826. doi:https://dx.doi.org/10.1016/S0960-0779(01)00200-4
7. Ye Y., Song J., Shen S., Di Y. New coherent structures of the Vakhnenko-Parkes equation. *Results in Physics*. 2012. **2**. P. 170–174. doi:https://dx.doi.org/10.1016/j.rinp.2012.09.011
8. Vakhnenko V.O., Parkes E.J. Approach in theory of nonlinear evolution equations: the Vakhnenko-Parkes equation. *Advances in Mathematical Physics*. 2016. Article ID 2916582, 39 p. doi:https://dx.doi.org/10.1155/2016/2916582
9. Vakhnenko V.A. Solitons in a nonlinear model medium. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1992. **25**. P. 4181–4187. doi:https://doi.org/10.1088/0305-4470/25/15/025
10. Roshid H., Kabir M.R., Bhowmik R.C., Datta B.K. Investigation of solitary wave solutions for Vakhnenko-Parkes equation via exp-function and $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method. *SpringerPlus*. 2014. Vol. 3, 692 (10pp). doi:https://doi.org/10.1186/2193-1801-3-692
11. Vakhnenko V.O., Parkes E.J. The inverse problem for some special spectral data. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2016. **82**. P. 116–124. doi:https://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2015.11.012
12. Caudrey P.J. The inverse problem for a general $N \times N$ spectral equation. *Physica D*. 1982. **D6**. P. 51–66. doi:https://doi.org/10.1016/0167-2789(82)90004-5
13. Satsuma J., Kaup D.J. A Backlund transformation for a higher order Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Society Japan*. 1977. **43**. P. 692–697. doi:https://dx.doi.org/10.1143/JPSJ.43.692
14. Hirota R. Direct methods in soliton theory. *Solitons*, Eds. R.K. Bullough, P.J. Caudrey. New York, Berlin: Springer, 1980. P. 157–176.
15. Vakhnenko V. O., Parkes E. J. The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2012. **45**. P. 846–852. doi:https://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2012.02.019

Надійшло до редакції 02.03.2017

REFERENCES

1. Kraenkel, R. A., Leblond, H. & Manna, M. A. (2014). An integrable evolution equation for surface waves in deep water. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 47, No. 2, 025208 (17pp). doi:<https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/2/025208>
2. Sazonov, S. V. & Ustinov, N. V. (2017). Nonlinear propagation of vector extremely short pulses in a medium symmetric and asymmetric molecules. *J. Exp. Theor. Phys.*, 124, No. 2, P. 213-230. doi:10.1134/S1063776117010150
3. Vakhnenko, V. O. (1999). High-frequency soliton-like waves in a relaxing medium. *J. Math. Phys.*, 40, pp. 2011-2020. doi:<https://doi.org/10.1063/1.532847>
4. Kuetche, V. K. (2015). Barotropic relaxing media under pressure perturbations: Nonlinear dynamics. *Dynamics Atmosph. Oceans.*, 72, pp. 21-37. doi:<https://dx.doi.org/10.1016/j.dynatmoce.2015.10.001>
5. Kuetche, V. K. (2016). Inhomogeneous exchange within ferrites: Magnetic solitons and their interactions. *J. Magnetism Magnetic Materials*, 398, pp. 70-81. doi:<https://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2015.08.120>
6. Vakhnenko, V. O. & Parkes, E. J. (2002). The calculation of multi-soliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method. *Chaos, Solitons and Fractals*, 13(9), pp. 1819-1826. doi:[https://dx.doi.org/10.1016/S0960-0779\(01\)00200-4](https://dx.doi.org/10.1016/S0960-0779(01)00200-4)
7. Ye, Y., Song, J., Shen, S. & Di, Y. (2012). New coherent structures of the Vakhnenko-Parkes equation. *Results in Physics*, 2, pp. 170-174. doi:<https://dx.doi.org/10.1016/j.rinp.2012.09.011>
8. Vakhnenko, V. O. & Parkes, E. J. (2016). Approach in theory of nonlinear evolution equations: the Vakhnenko-Parkes equation. *Advances in Mathematical Physics*, 2016, Article ID 2916582, 39 p. doi:<https://dx.doi.org/10.1155/2016/2916582>
9. Vakhnenko, V. A. (1992). Solitons in a nonlinear model medium. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25, pp. 4181-4187. doi:<https://doi.org/10.1088/0305-4470/25/15/025>
10. Roshid, H., Kabir, M. R., Bhowmik, R. C. & Datta, B. K. (2014). Investigation of solitary wave solutions for Vakhnenko-Parkes equation via \exp -function and $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method. *SpringerPlus*, 3, 692 (10 pp). doi:<https://doi.org/10.1186/2193-1801-3-692>
11. Vakhnenko, V. O. & Parkes, E. J. (2016). The inverse problem for some special spectral data. *Chaos, Solitons and Fractals*, 82, pp. 116-124. doi:<https://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2015.11.012>
12. Caudrey, P. J. (1982). The inverse problem for a general $N \times N$ spectral equation. *Physica D*, D6, pp. 51-66. doi:[https://doi.org/10.1016/0167-2789\(82\)90004-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(82)90004-5)
13. Satsuma, J. & Kaup, D. J. (1977). A Darboux transformation for a higher order Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Society Japan*, 43, pp. 692-697. doi:<https://dx.doi.org/10.1143/JPSJ.43.692>
14. Hirota, R. (1980). Direct methods in soliton theory. *Solitons* (Eds. R. K. Bullough, P. J. Caudrey), New York, Berlin: Springer, pp. 157-176.
15. Vakhnenko, V. O. & Parkes, E. J. (2012). The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method. *Chaos, Solitons and Fractals*, 45, pp. 846-852. doi:<https://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2012.02.019>

Received 02.03.2017

В.А. Вахненко

Институт геофизики им. С.И. Субботина, НАН Украины, Киев
E-mail: vakhnenko@ukr.net

ПРОСТОЙ ПОЛЮС И ПОЛЮС ВТОРОГО ПОРЯДКА
В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЙВАНИЯ

Для дискретной части спектральных данных в методе обратной задачи рассеивания учтены двукратные полюса и простой полюс. Область применения предложенных спектральных данных демонстрируется посредством анализа уравнения Вахненко—Паркеса, что позволило получить новые решения. Этот подход может быть применен к другим интегрируемым нелинейным уравнениям.

Ключевые слова: обратная задача рассеивания, спектральные данные, двукратные полюса.

V.O. Vakhnenko

Subbotin Institute of Geophysics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: vakhnenko@ukr.net

A SINGLE POLE AND A DOUBLE POLE
IN THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM METHOD

For the discrete part of spectral data in the inverse scattering transform method, the double poles and a single pole are taken into account. The scope of application for the suggested spectral data is demonstrated through the analysis of the Vakhnenko—Parkes equation that allows new solutions to be obtained. This approach can be applied to other integrable nonlinear equations.

Keywords: inverse problem, spectral data, double poles.