ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.021
УДК 531

Н.В. Никитина

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Принцип симметрии в трехмерных системах

Представлено академиком НАН Украины А.А. Мартынюком

Анализируется применение принципа симметрии (ксосимметрии) в трехмерных нелинейных системах. Развитие принципа связано с установлением существования аттрактора и определенной симметрии его проекций на координатные плоскости.

Ключевые слова: *нелинейная трехмерная система, бифуркация, принцип симметрии.*

Пока нет результата построения качественной теории трехмерных систем такой, как для двумерных систем, предметом анализа будут базовые модели, которые отражают характерные особенности той либо иной области исследования. Это система Лоренца, система Чуа, система Рикитаки, уравнения моделей генераторов периодических колебаний. В результате многочисленных исследований, связанных с бифуркациями нелинейных систем, было сформулировано обобщение принципа симметрии для трехмерных систем.

Принципы симметрии (кососимметрии) для двумерных систем [1, 2] могут быть применены для анализа бифуркаций и установления замыкания траекторий в трехмерных системах. Критерии устойчивости орбиты (замыкания) в двумерных системах изложены в монографии [1]. Запишем двухмерную систему в следующем виде:

$$dx_1 / dt = F_1(x), \quad dx_2 / dt = F_2(x), \tag{1}$$

где $F_1 \in C(R^2, R), \quad F_2 \in C(R^2, R)$ и $F_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2)$.

Приведем геометрический принцип симметрии, на основе которого можно установить условия замыкания фазовой траектории.

В системе (1) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_1(x)$ относительно x_1 и нечетности функции $F_2(x)$ относительно x_1, т. е. $x_1, x_2 \in R$

$$F_1(-x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2), \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2). \tag{2}$$

Данное утверждение основано на том, что на плоскости $Ox_1 x_2$ ось Ox_2 это ось симметрии, и всякая интегральная кривая слева от оси x_2 является зеркальным отображением кривой справа.

На основе принципа симметрии можно заключить, что *в системе (1) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции* $F_2(x)$ *относительно* x_2 *и нечетности* $F_1(x)$ *относительно* x_2, т.е.

$$F_1(x_1,-x_2)=-F_1(x_1,x_2),\quad F_2(x_1,-x_2)=F_2(x_1,x_2). \tag{3}$$

Здесь (согласно (3)) ось Ox_1 является осью симметрии.

Принцип кососимметрии для нелинейных систем применен в работе [2]. *В нелинейной системе (1) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (1), связаны следующими условиями:*

$$F_1(x_1,-x_2)=-F_1(-x_1,x_2),\quad F_2(x_1,-x_2)=-F_2(-x_1,x_2). \tag{4}$$

Кососимметрия связана с двумя осями координат. То есть, если ось Ox_1 является осью кососимметрии, то ось Ox_2 также является осью кососимметрии.

В нелинейной системе (1) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (1), связаны следующими условиями:

$$F_1(-x_1,x_2)=-F_1(x_1,-x_2),\quad F_2(-x_1,x_2)=-F_2(x_1,-x_2). \tag{5}$$

Принцип кососимметрии применим лишь для нелинейной двухмерной системы. Например, для осциллятора Ван дер Поля.

Рассмотрим построение критерия замыкания траектории в трехмерных системах.

Трехмерные системы. Введем следующие предположения.

Предположение 1. *Трехмерную нелинейную систему*

$$dx/dt=f_x(x,y,z),\quad dy/dt=f_y(x,y,z),\quad dz/dt=f_z(x,y,z). \tag{6}$$

где $x,y\in R$ и $f_x\in C(R,R)$, $f_y\in C(R,R)$, $f_z\in C(R,R)$, можно представить в виде трех двухмерных подсистем

$$\begin{aligned} &dx/dt=f_1(x,y),\quad dy/dt=f_2(x,y);\\ &dx/dt=f_3(x,z),\quad dz/dt=f_4(x,z);\\ &dy/dt=f_5(y,z),\quad dz/dt=f_6(y,z). \end{aligned} \tag{7}$$

Предположение 2. *Особая точка трехмерной системы (6)* $O(0,0,0)$ *— седлофокус.*

Принцип симметрии 1. *Пусть справедливы предположения 1 и 2. Если на каждой двухмерной координатной плоскости систем (7) правые части удовлетворяют условиям (4) (либо (5)) и на каждой плоскости имеют место устойчивые особые точки, то траектория замыкается и образует кососимметрию на координатных плоскостях.*

Представление системы (6) в виде (7) позволяет разделить трехмерную систему на три двухмерные и предложить исследование каждой на предмет замыкания на двухмерной координатной плоскости в силу кососимметрии.

Пример 1. Динамика цепи Чуа исследовалась во многих работах [3, 4]. Рассмотрим систему трёх дифференциальных нелинейных безразмерных уравнений Чуа

$$\frac{dx}{dt}=\alpha(ax-bx^3+y),\quad \frac{dy}{dt}=x-y+z,\quad \frac{dz}{dt}=-\beta y. \tag{8}$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr. 2017. № 7

Представим систему (8) в виде (7)

$$\frac{dx}{dt}=\alpha(ax-bx^3+y),\quad \frac{dy}{dt}=x-y\,; \tag{9}$$

$$\frac{dx}{dt}=\alpha(ax-bx^3),\quad \frac{dz}{dt}=0\,; \tag{10}$$

$$\frac{dy}{dt}=-y+z,\quad \in\frac{dz}{dt}=-\beta y\,. \tag{11}$$

В системе (9) три особые точки: $O_1(0,0)$, $E(\sqrt{(a+1)/b},\ \sqrt{(a+1)/b})$, $F(-\sqrt{(a+1)/b},$ $-\sqrt{(a+1)/b})$. Характеристические показатели (ХП) особой точки O_1 вычисляются согласно следующему выражению:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-1+\alpha a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-1+\alpha a}{2}\right)^2+\alpha(a+1)}\,.$$

ХП точек E, F имеют вид

$$\lambda_{1,2}=\frac{(-1-2a\alpha-3\alpha)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{(-1-2a\alpha-3\alpha)}{2}\right)^2-2\alpha(a+1)}\,.$$

Введем следующие значения параметров: $(a,b,\alpha,\beta)=(1/6,1/6,6,7)$. Особые точки E,F — устойчивые фокусы; точка O_1 — седло.

Система (9) удовлетворяет условиям (4) (либо (5)).

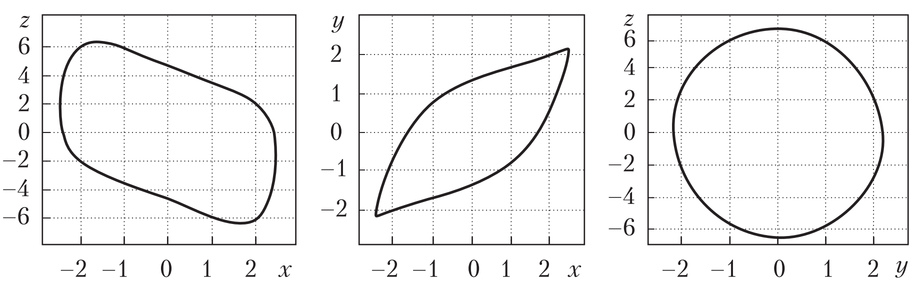
В системе (10) особая точка $O_2(0,0)$ имеет ХП $\lambda_1=\alpha a$, $\lambda_2=0$. Особые точки G,H $(x=\pm\sqrt{a/b},\quad z=0)$ имеют ХП $\lambda_1<0,\quad \lambda_2=0$.

Система (10) удовлетворяет условиям (4) (либо (5)).

В системе (11) линейный диссипативный осциллятор $\ddot z+\dot z+\beta z=0$. Круговая траектория системы (11) стремится к нулю имея тенденцию к кососимметрии. Особая точка $O_3(0,0)$ системы (11) — устойчивый фокус.

Тогда на каждой двухмерной плоскости системы (8) имеем устойчивые особые точки и выполнение условия (4) либо (5). Система (8) имеет замкнутую траекторию с кососимметрией на каждой координатной плоскости.

На рис. 1 приведены кососимметричные координатные портреты системы (8).



а *б* *в*

Рис. 1

Приведем принцип симметрии (кососимметрии) для трехмерной системы, в которой на двух координатных плоскостях замкнутая траектория симметрична, на третьей — кососимметрична.

Предположение 3. *Особая точка трехмерной системы* $O(0,0,0)$ *— седлоузел.*

Принцип симметрии 2. *Пусть справедливо предположение 3. Принцип кососимметрии (симметрии) можно сформулировать так: если на двух двухмерных координатных плоскостях системы (6) правые части удовлетворяют условиям вида (2), на третьей плоскости правые части удовлетворяют условиям (4) (либо (5)) и на двух координатных плоскостях имеют место устойчивые особые точки, то траектория может замыкаться и образует кососимметрию и симметрию на соответствующих координатных плоскостях.*

Пример 2. Рассмотрим систему Лоренца:

$$\frac{dx}{dt} = s(-x+y), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = -bz + xy. \tag{12}$$

Представим систему (12) в виде трех двухмерных уравнений (к виду (7) система (12) не представима):

$$\frac{dx}{dt} = s(-x+y), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y; \tag{13}$$

$$\frac{dx}{dt} = -sx, \quad \frac{dz}{dt} = -bz; \tag{14}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y, \quad \frac{dz}{dt} = -bz \tag{15}$$

Система (13) удовлетворяет условиям (4) (либо (5)). Обозначим правые части в системе (14): $F_x = -sx, \quad F_z = -bz$. В системе (14) выполняются условия четности функции F_x относительно z и нечетности функции F_z относительно z, т. е.

$$F_x(x,-z) = F_x(x,z), \quad F_z(y,-z) = -F_z(x,z).$$

В системе (14) ось Oz на плоскости Oxz является осью симметрии (см. (2)).Обозначим правые части в системе (15): $F_y = -y, \quad F_z = -bz$. В системе (15) выполняются условия четности функции F_y относительно z и нечетности функции F_z относительно z, т. е.

$$F_y(x,-z) = F_y(x,z), \quad F_z(y,-z) = -F_z(x,z).$$

В системе (15) ось Oz на плоскости Oyz является осью симметрии (см. (2)). На плоскостях xy, xz, yz имеют место устойчивые особые точки (согласно систем (13)—(15)). В системах (14)—(15) выполняются условия вида (2) и в этих системах ось Oz является осью симметрии. Особая точка в нуле системы (13) — седло. Здесь параметр r имеет большую величину. Известно, что при $r >> 1$ траектория описывает петли и они образуют замкнутую кривую. Таких аттракторов несколько. При значениях $(b,r,s) = (8/3; \quad 154,5; \quad 10)$ в системе (12) образуется седлофокусная петля. Эта траектория согласно принципу симметрии 2 имеет определенную симметрию на координатных плоскостях. На рис. 2 приведены портреты на координатных плоскостях системы (12).

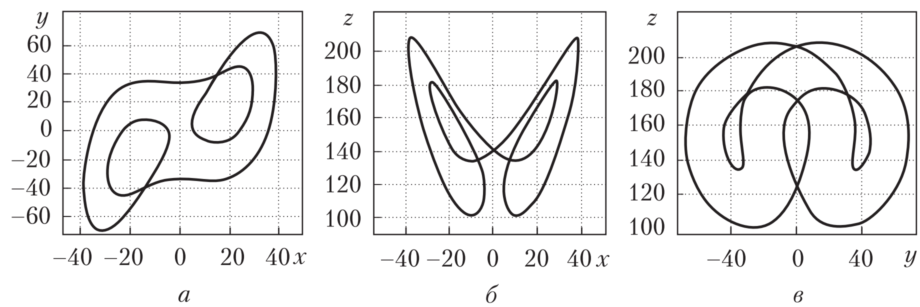


Рис. 2

Принцип симметрии 2 устанавливает существование регулярного аттрактора в случае образования петли. В двухмерные системы (13)—(15) не вошли слагаемые xz, xy, которые влияют на образование петель и ХП особой точки трехмерной системы. Приведем еще один принцип симметрии для трехмерной системы.

Принцип симметрии 3. *Пусть справедливы предположения 1 и 2. Принцип симметрии можно сформулировать так: если на двух двухмерных координатных плоскостях системы (7) правые части удовлетворяют условиям симметрии, и на каждой из них имеют место устойчивые особые точки; на третьей координатной плоскости две оси симметрии и ХП особой точки* $\pm i$ *, то траектория замыкается образуя симметрию на трёх координатных плоскостях.*

Пример 3. Рассмотрим математическую модель генератора электромагнитных колебаний с квадратичной нелинейностью, приведенную, например, в [5]

$$\frac{dx}{dt}=mx-xz+y,\quad \frac{dy}{dt}=-x,\quad \frac{dz}{dt}=-b(z-x^2), \tag{16}$$

где $m=1;\quad b=0,2$. Характеристическое уравнение системы (16)

$$\lambda(\lambda-m+1)(\lambda+b)=0$$

разделяется в точке $O(0,0,0)$ так, что

$$\lambda_{1,2}=\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m}{2})^2-1};\quad \lambda_3=-b.$$

При $m/2<1$ корни $\lambda_{1,2}$ комплексно-сопряженные. Представим систему (16) в виде (7)

$$\frac{dx}{dt}=mx+y,\quad \frac{dy}{dt}=-x; \tag{17}$$

$$\frac{dx}{dt}=mx-xz,\quad \frac{dz}{dt}=-b(z-x^2); \tag{18}$$

$$\frac{dy}{dt}=0,\quad \frac{dz}{dt}=-bz. \tag{19}$$

В системе (17) на плоскости Oxy двухмерная система является линейным осциллятором

$$\frac{d^2x}{dt^2}-m\frac{dx}{dt}+x=0$$

с особой точкой — неустойчивый фокус. Заменим переменную z. Введем $\varsigma = z - m$. Тогда двумерная система на плоскости xy примет вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x. \tag{20}$$

В точке $O_1(0,0)$ двухмерной системы (20) ХП имеет вид

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1}.$$

Обозначим правые части системы (20) в виде функций $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$. В системе (20) функция F_x четная относительно x

$$F_x(-x, y) = F_x(x, y),$$

функция F_y нечетная относительно x

$$F_y(-x, y) = -F_y(x, y).$$

Здесь ось O_1y на плоскости O_1xy является осью симметрии. В системе (20) функция F_y четная по отношению y

$$F_y(x, -y) = F_y(x, y),$$

функция F_y нечетная по отношению x

$$F_y(x, -y) = -F_y(x, y).$$

Тогда ось O_1x на плоскости O_1xy является осью симметрии. Таким образом, на плоскости O_1xy две оси симметрии.

На плоскости xz имеют место особые устойчивые точки: $A(\sqrt{m}, m)$, $B(-\sqrt{m}, m)$. Запишем уравнения в вариациях на плоскости Oxz

$$\frac{d\delta x}{dt} = m\delta x - \overline{z}\delta x - \overline{x}\delta z, \quad \frac{d\delta z}{dt} = -b(\delta z - 2\overline{x}\delta x)$$

и характеристическое уравнение этой системы

$$\lambda^2 + \lambda(b - m + \overline{z}) - b(m - \overline{z}) + 2b(\overline{x})^2 = 0, \tag{21}$$

где $\overline{x}, \overline{z}$ — частные решения. Подставляя в уравнение (21) координаты точек A и B, находим, что особые точки A, B, — устойчивые фокусы, которые имеют ХП

$$\lambda_{1,2} = -b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - 2bm}.$$

Правые части системы (18) примут вид:

$$F_x = -xz, F_z = -bm - bz + bx^2.$$

Функция F_z — четная относительно x

$$F_z(-x, z) = F_z(x, z).$$

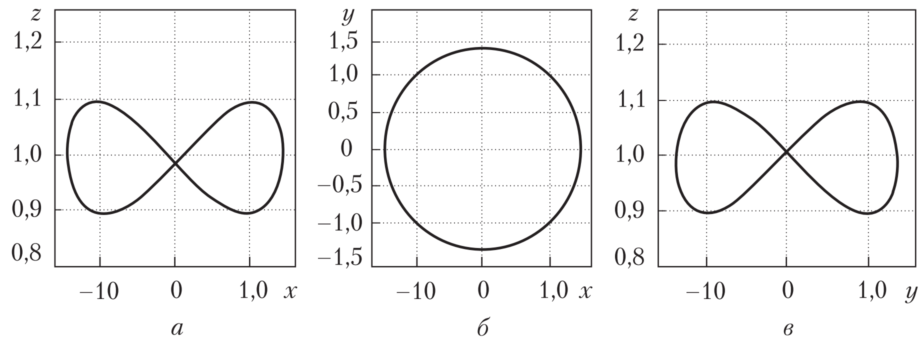


Рис. 3

Функция F_x — нечетная относительно x

$$F_x(-x, z) = -F_x(x, z).$$

Тогда ось Oz является осью симметрии.

Уравнения (19) на плоскости yz удовлетворяют условиям симметрии вида (3) и имеют устойчивые точки на плоскости yz. Таким образом, система (16) удовлетворяет условиям принципа симметрии 3 и порождает замыкание в трехмерном пространстве. На рис. 3 приведены портреты на координатных плоскостях системы (16).

Приведенные выше принципы симметрии (принципы 1 и 3) не требуют доказательства, так как имеют определенный физический смысл: если трехмерная траектория имеет замыкание на каждой координатной плоскости в силу определенной симметрии, то она замыкается в трехмерном пространстве.

Известно, что трехмерные системы порождают странные аттракторы [6, 7]. В работе обсуждалось лишь существование регулярных аттракторов с определенной симметрией. Аттракторы согласно принципам 1 и 3 не перерождаются в странные аттракторы. Механизм образования странных аттракторов не связан с симметрией.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Nemytskii V.V. and Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equation. Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. 550p.
2. Никитина Н.В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. Киев: Феникс, 2012. 235 с.
3. Anishechenro V.S.,Astakhov V.V.,Vadivasova T.E.,Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L. Dynamics of two coupled Chua's curchuits. *Int.J. of Bifurcation and Chaos*. 1995. **5**, N 6, P. 1677—1699.
4. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. Singapore: World Scientific, 2001. 592 p.
5. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. Москва: Наука, 1990. 312 с.
6. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. Bifurcations and Multi-Stabilty of Vibrations of Three-Dimensional System. Int.Appl.Mech. 2015. **51**, N 2. P. 540—541.
7. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. On Periodical Motions in Three-Dimensional Systems. *Int. Appl. Mech.* 2015. **51**, N 4. P. 369—379.

Поступило в редакцию 07.01.2017

REFERENCES

1. Nemytskii, V. V. and Stepanov, V. V. (1960). Qualitative Theory of Differential Equation. Princeton: Princeton Univ. Press.
2. Nikitina, N. V. (2012). Nonlinear systems with complex and chaotic behavior of traectories. Kyiv: Phenix (in Russian).
3. Anishechenro, V. S., Astakhov, V. V., Vadivasova, T. E., Sosnovtseva, O. V., Wu, C. W., Chua, L. (1995). Dynamics of two coupled Chua's curchuits. Int. J. Bifurcation and Chaos, 5, No. 6, pp. 1677-1699.
4. Shilnikov, L. P., Shilnikov, A. L., Turaev, D. V., Chua, L. O. (2001). Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. Singapore: World Scientific.
5. Anishchenko, V. S. (1990). Complex Oschillations in Simple Systems. Nauka: Moscow (in Russian).
6. Martynyuk, A. A., Nikitina, N. V. (2015). Bifurcations and Multi-Stabilty of Vibrations of Three-Dimensional System. Int.Appl.Mech. 51, No. 2, pp. 540-541.
7. Martynyuk, A. A., Nikitina, N. V. (2015). On Periodical Motions in Three-Dimensional Systems. Int. Appl. Mech. 51, No. 4, pp. 369-379.

Received 07.01.2017

Н.В. Нікітіна

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ПРИНЦИП СИМЕТРІЇ У ТРИВИМІРНИХ СИСТЕМАХ

Аналізується застосування принципу симетрії (кососиметрiї) в тривимірних нелінійних системах. Розвиток принципу пов'язано з встановленням існування аттрактора і певної симетрії його проекцій на координатні площини.

Ключові слова: *нелінійна тривимірна система, біфуркація, принцип симетрії.*

N.V. Nikitina

S.P. Timoshenko Institute of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: center@inmech.kiev.ua

THE PRINCIPLE OF SYMMETRY IN THREE-DIMENSIONAL SYSTEMS

The application of the principle of symmetry (skew symmetry) in three-dimensional nonlinear systems is analyzed. The development of the principle is associated with the establishment of the existence of an attractor and a certain symmetry of its projections on the coordinate planes.

Keywords: *three-dimensional nonlinear system, bifurcation, symmetry principles.*