doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.08.011
УДК 517.36

А.А. Мартынюк, академик НАН Украины

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Условия Hyers—Ulam—Rassias-устойчивости семейств уравнений

Для семейства регуляризованных уравнений и семейства уравнений с причинным оператором получены достаточные условия Hyers—Ulam—Rassias-устойчивости.

Ключові слова: *Hyers—Ulam—Rassias-устойчивость, семейство регуляризованных уравнений, семейство причинных уравнений.*

Понятие Hyers—Ulam—Rassias-устойчивости (H.U.R.-устойчивости) основано на работах [1—3]. В отличие от устойчивости в смысле Ляпунова, H.U.R.-устойчивость уравнения и/или отображения не связана с ограничениями на начальные условия решений (движения).

В данной работе приведены условия H.U.R.-устойчивости для семейств регуляризованных уравнений и семейств уравнений с причинным оператором. Все используемые обозначения соответствуют принятым в монографиях [4, 5].

1. Семейство регуляризованных уравнений. Рассматривается семейство регуляризованных уравнений

$$D_H U(t) = F_\beta(t, U(t)), \quad U(t_0) = U_0 \in K_c(R^n), \tag{1}$$

где

$$U \in K_c(R^n),\ F_\beta \in C(R_+ \times K_c(R^n),\ K_c(R^n)) \text{ и } \beta \in [0,1].$$

Для семейства уравнений (1) сформулируем определение H.U.R.-устойчивости в следующем виде.

Определение 1. Семейство уравнений (1) является H.U.R.-устойчивым относительно множества функций $\Phi(t) \in K_c(R^n)$, если существует постоянная $C_\Phi > 0$ такая, что для каждого $Y(t) \in K_c(R^n)$, для которого

$$D_H Y - F_\beta(t, Y) \subseteq \Phi(t) \text{ при всех } t \in R_+ \text{ и } \beta \in [0,1], \tag{2}$$

найдется решение $U(t)\in K_c(R^n)$ семейства уравнений (1) такое, что

$$D[Y(t),U(t)]\leqslant C_\Phi D[\Phi(t),\theta] \text{ при всех } t\in R_+, \tag{3}$$

где $\theta\in K_c(R^n)$ — нулевой элемент множества $K_c(R^n)$.

Замечание 1. Определение 1 может быть реконструировано, если вместо условия (2) рассматривать условие

$$D[G_Y(t),\theta]\leqslant D[\Phi(t),\theta] \text{ при всех } t\in R_+,$$

где $G_Y(t)=D_HY-F_\beta(t,Y)$.

Очевидно, что множество функций $Y(t)\in K_c(R^n)$ является решением включения (2), если семейство функций $G_Y(t)\in K_c(R^n)$ такое, что

$$D[G_Y(t),\theta]\leqslant C_\Phi D[\Phi(t),\theta] \text{ при всех } t\in R_+$$

и

$$D_HY=F_\beta(t,Y)+G_Y(t) \text{ при всех } t\in R_+ \text{ и } \beta\in[0,1].$$

Замечание 2. Если множество функций $Y(t)\in K_c(R^n)$ является решением включения (2), то оно является также и решением неравенства

$$D[Y(t)-Y_0-\int_0^t F_\beta(s,Y(s))ds,\theta]\leqslant C_\Phi\int_0^t D[\Phi(s),\theta]ds \tag{4}$$

при всех $t\in R_+$ и $\beta\in[0,1]$.

Далее установлены условия H.U.R.-устойчивости семейства уравнений (1).

Теорема 1. *Предположим, что*:

1) *при любом* $\beta\in[0,1]$ *отображении* $F_\beta\in C(R_+\times K_c(R^n),K_c(R^n))$;

2) *при заданном множестве функций* $\Phi(t)\in K_c(R^n)$ *для каждого* $Y(t)\in K_c(R^n)$ *выполняется включение*

$D_HY-F_\beta(t,Y)\subseteq\Phi(t)$ при всех $t\in R_+$;

3) *существует функция* $\lambda(t)\in L^1(R_+,R_+)$ *такая, что*

$D[F_\beta(t,U),F_\beta(t,Y)]\leqslant\lambda(t)D[U(t),Y(t)]$ *при всех* $(t,U,Y)\in R_+\times K_c(R^n)\times K_c(R^n)$;

4) *существует постоянная* $\gamma>0$ *такая, что*

$\int_0^t D[\Phi(s),\theta]ds\leqslant\gamma D[\Phi(t),\theta]$ *при всех* $t\in R_+$.

Тогда семейство уравнений (1) *H.U.R.-устойчиво относительно множества функций* $\Phi(t)\in K_c(R^n)$.

Доказательство. Пусть $U(t)=U(t,t_0,U_0)$ — любое решение семейства уравнений (1) с начальными условиями $U_0=Y_0\in K_c(R^n)$. Для семейства уравнений (1) имеем

$$U(t)=Y_0+\int_0^t F_\beta(s,U(s))ds \tag{5}$$

и при условии *2* теоремы 1

$$Y(t)-Y_0-\int_0^t F_\beta(s,Y(s))ds\subseteq\int_0^t\Phi(s)ds, t\in R_+. \tag{6}$$

Из (5) и (6), учитывая условия *3, 4* теоремы 1, имеем

$$D[Y(t),U(t)]\leqslant D\left[Y_0+\int_0^t F_\beta(s,U(s))\,ds,\ Y_0+\int_0^t F_\beta(s,Y(s))\,ds+\int_0^t \Phi(s)\,ds\right]\leqslant$$

$$\leqslant D\left[\int_0^t F_\beta(s,U(s))\,ds,\int_0^t F_\beta(s,Y(s))\,ds+\int_0^t \Phi(s)\,ds\right]\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t D[F_\beta(s,U(s)),F_\beta(s,Y(s))]\,ds+\int_0^t D[\Phi(s),\theta]\,ds\leqslant\int_0^t \lambda(s)D[Y(s),U(s)]\,ds+\gamma D[\Phi(t),\theta] \tag{7}$$

при всех $t\in R_+$. Собирая первое и последнее выражения в оценках (7), получаем

$$D[Y(t),U(t)]\leqslant\gamma D[\Phi(t),\theta]+\int_0^t \lambda(s)D[Y(s),U(s)]\,ds.$$

Отсюда находим

$$D[Y(t),U(t)]\leqslant\gamma D[\Phi(t),\theta]+\int_0^t \gamma D[\Phi(s),\theta]\lambda(s)\exp\left(\int_s^t \lambda(u)\,du\right)ds\leqslant$$

$$\leqslant\gamma D[\Phi(t),\theta]\left\{1-\int_0^t \exp\left(\int_s^t \lambda(u)\,du\right)ds\right\}=\gamma D[\Phi(t),\theta]\left\{1-\left[\exp\left(\int_s^t \lambda(u)du\right)\right]_0^t\right\}=$$

$$=\gamma\exp\left(\int_0^t \lambda(u)du\right)D[\Phi(t),\theta]\leqslant\gamma\exp\left(\int_0^\infty \lambda(u)du\right)D[\Phi(t),\theta]=C_\Phi D[\Phi(t),\theta], \tag{8}$$

где $C_\Phi=\gamma\exp\left(\int_0^\infty \lambda(u)du\right)$.

Следовательно, из (8) находим, что

$D[Y(t),U(t)]\leqslant C_\Phi D[\Phi(t),\theta]$ при всех $t\in R_+$.

Этим теорема 1 доказана.

Замечание 3. Если в условии *2* теоремы 1 множество $Y(t)\in K_c(R^n)$ является приближенным решением семейства уравнений (1), то (3) представляет собой оценку уклонений приближенного решения от неизвестного точного решения $U(t)\in K_c(R^n)$ семейства уравнений (1).

2. Семейство причинных уравнений. Рассматривается семейство причинных уравнений в форме

$$D_HU(t)=F(t,U(t),(QU)(t)),\ U(t_0)=U_0\in K_c(R^n), \tag{9}$$

где $U\in K_c(R^n)$; $F\in C(R_+\times K_c(R^n)\times E,K_c(R^n))$; $E=C(R_+,K_c(R^n))$ с нормой $D_0[U,\theta]=\sup\limits_{t\in R_+}D\times$ $\times\,[U(t),\theta)]$.

Приведем определение H.U.R.-устойчивости семейства уравнений (9).

Определение 2. Семейство причиных уравнений (9) является H.U.R.-устойчивым относительно множества функций $\Phi^*(t) \in K_c(R^n)$, если существует постоянная $C_{\Phi^*} > 0$ такая, что для каждого $Y(t) \in K_c(R^n)$, для которого

$$D_H Y(t) - F(t, Y(t), (QY)(t)) \subseteq \Phi^*(t), \quad t \in R_+,$$

найдется решение $U(t) \in K_c(R^n)$ семейства уравнений (9) такое, что

$D[Y(t), U(t)] \leqslant C_{\Phi^*} D[\Phi^*(t), \theta]$ при всех $t \in R_+$.

Для семейства причинных уравнений (9) имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что*:

1) $F \in C(R_+ \times K_c(R^n) \times E,\ K_c(R^n))$, *где* Q *является причинным оператором, действующим на пространстве* E;

2) *при заданном множестве функций* $\Phi^*(t) \in K_c(R^n)$ *для каждого* $Y(t) \in K_c(R^n)$ *выполняется включение*

$$D_H Y(t) - F(t, Y(t), (QY)(t)) \subseteq \Phi^*(t) \text{ при всех } t \in R_+;$$

3) *существует функция* $\mu(t) \in L^1(R_+, R_+)$ *и постоянная* $\Delta > 0$ *такие, что* F *удовлетворяет обобщенному условию Липшица*

$$D[F(t, U, (QU)(t)), F(t, Y, (QY)(t))] \leqslant \mu(t) D[U(t), Y(t)] + D[(QU)(t), (QY)(t)],$$

где

$$D[(QU)(t), (QY)(t)] \leqslant \Delta D[U(t), Y(t)]$$

при всех $(t, U, Y) \in R_+ \times K_c(R^n) \times K_c(R^n)$;

4) *существует постоянная* $\gamma > 0$ *такая, что*

$$\int_0^t D[\Phi^*(s), \theta]\, ds \leqslant \gamma D[\Phi^*(t), \theta] \text{ при всех } t \in R_+.$$

Тогда семейство причинных уравнений (9) H.U.R.-*устойчиво относительно множества функций* $\Phi^*(t) \in K_c(R^n)$.

Доказательство. Пусть $Y(t) \in K_c(R^n)$ является решением включения из условия *2* теоремы 2. Из семейства уравнений (9) при $U_0 = Y_0 \in K_c(R^n)$ имеем

$$U(t) = Y_0 + \int_0^t F(s, U(s), (QU)(s))\, ds \tag{10}$$

и

$$Y(t) - Y_0 - \int_0^t F(s, Y(s), (QY)(s))\, ds \subseteq \int_0^t \Phi^*(s)\, ds \tag{11}$$

при всех $t \in R_+$.

Из соотношений (10) и (11) следует, что

$$D[U(t), Y(t)] = D\Bigg[Y_0 + \int_0^t F(s, U(s), (QU)(s))\, ds,$$

$$Y_0+\int\limits_0^t F(s,Y(s),(QY)(s))\,ds+\int\limits_0^t \Phi^*(s)\,ds\Bigg]\leqslant$$

$$\leqslant D\left[\int\limits_0^t F(s,U(s),(QU)(s))\,ds,\int\limits_0^t F(s,Y(s),(QU)(s))\,ds\right]+D\left[\int\limits_0^t \Phi^*(s)\,ds,\theta\right]\leqslant$$

$$\leqslant \gamma D[\Phi^*(t),\theta]+\int\limits_0^t(\mu(s)+\Delta)D[U(s),Y(s)]\,ds \ \text{ при всех } t\geqslant 0\,.$$

Из неравенства

$$D[U(t),Y(t)]\leqslant \gamma D[\Phi^*(t),\theta]+\int\limits_0^t(\mu(s)+\Delta)D[U(s),Y(s)]\,ds$$

следует, что

$$D[U(t),Y(t)]\leqslant \gamma D[\Phi^*(t),\theta]+\int\limits_0^t \gamma D[\Phi^*(s),\theta)]\times(\mu(s)+\Delta)\exp\left(\int\limits_s^t(\mu(u)+\Delta)\,du\right)ds\leqslant$$

$$\leqslant \gamma D[\Phi^*(t,\theta)]\left\{1-\int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_s^t(\mu(u)+\Delta)\,du\right)ds\right\}=\gamma D[\Phi^*(t),\theta)]\left\{1-\left[\exp\left(\int\limits_s^t(\mu(u)+\Delta)\,du\right)\right]_0^t\right\}=$$

$$=\gamma D[\Phi^*(t),\theta]\exp\left(\Delta\int\limits_0^t(\mu(u)\,ds)\right)\leqslant \gamma\exp\left(\Delta\int\limits_0^\infty \mu(u)\,du\right)D[\Phi^*(t),\theta]\leqslant C_{\Phi^*}D[\Phi^*(t),\theta]\,,$$

где

$$C_{\Phi^*}=\gamma\exp\left(\Delta\int\limits_0^\infty \mu(u)\,du\right).$$

Таким образом, получаем оценку

$$D[U(t),Y(t)]\leqslant C_{\Phi^*}D[\Phi^*(t),\theta] \ \text{ при всех } t\geqslant 0,$$

которая требуется определением (2). Этим теорема 2 доказана.

Определенный интерес представляет анализ H.U.R.-устойчивости систем уравнений, моделирующих реальные процессы в численном анализе, биологии, экономике и других областях, где не рассматриваются ограничения на начальные условия процесса (см. [6], а также [7] и библиогр. там).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Hyers D.H. On the stability of the linear functional equation. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 1941. **27**. P. 222—224.
2. Rassias Th.M. Functional Equations, Inequalities and Applications. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1978. **72**. P. 297—300.
3. Ulam S.M. A Collection of the Mathematical Problems. New York: Interscience. 1960. xiii + 150 p.

4. Laksmikantham V., Bhaskar T.G., Devi J.V. Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2006. 204 p.
5. Martynyuk A.A., Martynyuk-Chernienko Yu.A. Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2012. 296 p.
6. Rus I.A. Ulam stabilities of ordinary differential equations in a Banach space. *Carpathian J. Math.* 2010. **26**, № 1. P. 103—107.
7. Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M. Functional Differential Equations: Advances and Applications, New York: Wiley, 2016. 359 p.

Поступило в редакцию 23.02.2017

REFERENCES

1. Hyers, D. H. (1941). On the stability of the linear functional equation. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A., 27, pp. 222-224.
2. Rassias, Th. M. (1978). Functional Equations, Inequalities and Applications, Proc. Amer. Math. Soc., 72, pp. 297-300.
3. Ulam, S. M. (1960). A Collection of the Mathematical Problems. New York: Interscience.
4. Laksmikantham, V., Bhaskar, T. G. & Devi, J. V. (2006). Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
5. Martynyuk, A. A. & Martynyuk-Chernienko, Yu. A. (2012). Uncertain Dynamical Systems: Stability and Motion Control. Boca Raton, London, New York: CRC Press.
6. Rus, I. A. (2010). Ulam stabilities of ordinary differential equations in a Banach space. Carpathian J. Math., 26, No. 1, pp. 103-107.
7. Corduneanu, C., Li, Y. & Mahdavi, M. (2016). Functional Differential Equations: Advances and Applications. New York: Wiley.

Received 23.02.2017

А.А. Мартинюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

УМОВИ HYERS—ULAM—RASSIAS-СТІЙКОСТІ
СІМЕЙСТВ РІВНЯНЬ

Для сімейства регуляризованих рівнянь і сімейства рівнянь з причинним оператором отримано достатні умови Hyers—Ulam—Rassias-стійкості.

Ключові слова: *Hyers—Ulam—Rassias-стійкість, сімейство регуляризованих рівнянь, сімейство причинних рівнянь.*

A.A. Martynyuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: center@inmech.kiev.ua

THE CONDITIONS OF HYERS—ULAM—RASSIAS-STABILITY
OF A SET OF EQUATIONS

For a set of regularized equations and a set of equations with causal operators, the sufficient conditions of Hyers—Ulam—Rassias-stability are obtained.

Keywords: *Hyers—Ulam—Rassias-stability, set of regularized equations, set of equations with causal operators.*