

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.08.017>

УДК 512.544

**М.М. Семко<sup>1</sup>, Т.В. Величко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Університет державної фіскальної служби України, Ірпінь

<sup>2</sup> Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара

E-mail: dr.mykola.semko@gmail.com

## **Про будову груп, усі підгрупи яких, що мають нескінченний спеціальний ранг, є транзитивно нормальними**

*Представлено академіком НАН України А.М. Самойленком*

*Отримано опис періодичних розв'язних груп, підгрупи яких мають нескінченний спеціальний ранг, що є транзитивно нормальними. Описано структуру періодичної радикальної групи, в якій підгрупи нескінченного спеціального рангу транзитивно нормальні.*

**Ключові слова:** *скінченний спеціальний ранг, розв'язна група, періодична група, локально нільпотентний радикал, локально нільпотентний резидуал, транзитивно нормальні підгрупи.*

Групи з деякими природними обмеженнями на важливі системи підгруп є одним із центральних об'єктів дослідження в теорії груп. Їх вивчення сприяло виникненню багатьох важливих понять, зокрема умов скінченності, локальної нільпотентності, локальної розв'язності, різноманітних рангів і т. ін. Розглядаючи специфічні обмежувальні властивості та конкретні системи підгруп, які мають ці властивості, ми отримуємо різноманітні цікаві класи груп. Існує величезний масив робіт, які присвячені цій тематиці. У даній роботі ми розглянемо вплив на структуру групи двох систем її підгруп. Це система підгруп, що мають скінченний спеціальний ранг, та система транзитивно нормальних підгруп.

Нагадаємо, що група  $G$  має *скінченний спеціальний ранг*  $r$ , якщо кожна скінченно породжена підгрупа  $G$  може бути породжена не більш ніж  $r$  елементами та існує скінченно породжена підгрупа  $H$ , яка має точно  $r$  породжуючих елементів [1]. Теорія груп скінченного спеціального рангу є однією з найбільш розвинених частин теорії нескінченних груп (див., наприклад, [2–4]). У роботі [5] М.Р. Діксон, М. Еванс та Х. Сміт почали розглядати групи, всі підгрупи яких, що мають нескінченний спеціальний ранг, мають і деяку фіксовану властивість  $P$ . Цей підхід отримав розвиток у статтях інших авторів для різноманітних природних властивостей  $P$  (див., наприклад, [4]). У даній роботі розпочато розгляд груп, усі підгрупи нескінченного спеціального рангу яких будуть транзитивно нормальними.

Будемо говорити, що підгрупа  $H$  групи  $G$  є *транзитивно нормальною*, якщо  $H$  є нормальною в кожній підгрупі  $K \geq H$ , в якій  $H$  є субнормальною [6]. У роботі [7] ці підгрупи були введені під іншою назвою. Більш конкретно, будемо говорити, що підгрупа  $H$  групи  $G$

© М.М. Семко, Т.В. Величко, 2017

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2017. № 8

17

задовольняє субнормалізаторну умову, якщо для кожної такої підгрупи  $K$ , що  $H \in$  нормальною в  $K$ , має місце включення  $N_G(K) \leq N_G(H)$ . Існує багато природних типів підгруп, які є транзитивно нормальними, зокрема пронормальні підгрупи та їх узагальнення (див. [8]).

Відомо, що відношення “бути нормальною підгрупою” не є транзитивним. Група  $G$  називається  $T$ -групою, якщо це відношення є транзитивним у групі  $G$ . Група  $G$  називається  $\bar{T}$ -групою, якщо кожна підгрупа  $G \in T$ -групою. Незавжди упевнитись у тому факті, що кожна підгрупа групи  $G$  буде транзитивно нормальною тоді і тільки тоді, коли  $G \in \bar{T}$ -групою. Для подальшого нам буде потрібен вищенаведений опис локально скінченних груп, усі підгрупи яких є транзитивно нормальними.

Нагадаємо, що локально нільпотентний резидуал  $G^{LN}$  групи  $G$  — це перетин усіх таких нормальних підгруп  $H$ , що відповідні фактор-групи  $G/H$  є локально нільпотентні. Слід зазначити, що у випадку, коли група  $G$  є локально скінченною, фактор-група  $G/G^{LN}$  буде локально нільпотентною.

Нагадаємо також, що група  $G$  називається радикальною, якщо вона має зростаючий ряд підгруп, фактори якого локально нільпотентні.

Ще нагадаємо, що група  $G$  називається дедекіндовою, якщо кожна її підгрупа є нормальною. Будова дедекіндових груп була повністю описана в роботі [9].

Метою даної роботи є отримання опису періодичних радикальних груп, усі підгрупи нескінченного спеціального рангу яких є транзитивно нормальними. Головним результатом роботи є такі теореми.

**Теорема А.** Нехай  $G$  — періодична радикальна група, що має нескінченний спеціальний ранг. Якщо кожна її підгрупа, що має нескінченний спеціальний ранг, є транзитивно нормальною, то  $G$  задовольняє такі умови:

(i) локально нільпотентний резидуал  $L$  групи  $G$  є абелевою підгрупою, а сама група  $G$  є метабелевою;

(ii) кожна підгрупа  $L \in G$ -інваріантною;

(iii)  $2 \notin \Pi(L)$ ;

(iv)  $\Pi(L) \cap \Pi(G/L) = \emptyset$ ;

(v)  $G/L$  є дедекіндовою групою, а фактор-група  $G/C_G(L)$  є абелевою.

**Теорема В.** Нехай  $G$  — періодична радикальна група, що має нескінченний спеціальний ранг. Якщо кожна її підгрупа, що має нескінченний спеціальний ранг, є транзитивно нормальною, то і кожна підгрупа групи  $G$  буде транзитивно нормальною.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Мальцев А. И. О группах конечного ранга. *Матем. сб.* 1948. **22**, № 2. С. 351–352.
2. Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. On various rank conditions in infinite groups. *Algebra Discrete Math.* 2007. **4**. P. 23–44.
3. Dixon M.R. Certain rank conditions on groups. *Noti di Matematica.* 2008. **2**. P. 151–175.
4. Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Пупка А.А., Subbotin I.Ya. Groups satisfying certain rank conditions. *Algebra Discrete Math.* 2016. **4**. P. 23–44.
5. Dixon M.R., Evans M.J., Smith H. Locally (soluble-by-finite) groups with all proper insoluble subgroups of finite rank. *Arch. Math.* (Basel). 1997. **68**. P. 100–109.
6. Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya. Transitivity of normality and pronormal subgroups. *Combinatorial group theory, discrete groups, and number theory*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. P. 201–212. (Contemporary Mathematics, vol. 421).

7. Мысовских В.И. Субнормализаторы и свойства вложения подгрупп конечных групп. *Зап. научн. сем. ПОМИ*. 1999. **265**. С. 258–280.
8. Kirichenko V.V., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. Some related to pronormality subgroup families and the properties of a group. *Algebra Discrete Math.* 2011. **1**. P. 75–108.
9. Baer R. Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. *S.-B. Heidelberg Akad.* 1933. **2**. P. 12–17.

Надійшло до редакції 24.04.2017

#### REFERENCES

1. Maltsev, A. I. (1948). On groups of finite rank. *Mat. Sbornik*, 22, pp. 351-352 (in Russian).
2. Dixon, M. R., Kurdachenko, L. A. & Subbotin, I. Ya. (2007). On various rank conditions in infinite groups. *Algebra Discrete Math.*, 4, pp. 23-44.
3. Dixon, M. R. (2008). Certain rank conditions on groups. *Noti di Matematica*, 2, pp. 151-175.
4. Dixon, M. R., Kurdachenko, L. A., Pypka, A. A. & Subbotin, I. Ya. (2016). Groups satisfying certain rank conditions. *Algebra Discrete Math.*, 4, pp. 23-44.
5. Dixon, M. R., Evans, M. J. & Smith, H. (1997). Locally (soluble-by-finite) groups with all proper insoluble subgroups of finite rank. *Arch. Math. (Basel)*, 68, pp. 100-109.
6. Kurdachenko, L. A. & Subbotin, I. Ya. (2006). Transitivity of normality and pronormal subgroups. In *Combinatorial group theory, discrete groups, and number theory. Contemporary Mathematics*, Vol. 421 (pp. 201-212). Providence, RI: Amer. Math. Soc.
7. Мысовских, В. И. (1999). Subnormalizers and properties of embedding of subgroups in finite groups. *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 265, pp. 258-280 (in Russian).
8. Kirichenko, V. V., Kurdachenko, L. A. & Subbotin, I. Ya. (2011). Some related to pronormality subgroup families and the properties of a group. *Algebra Discrete Math.*, 1, pp. 75-108.
9. Baer, R. (1933). Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. *S.-B. Heidelberg Akad.*, 2, pp. 12-17.

Received 24.04.2017

*Н.Н. Семко*<sup>1</sup>, *Т.В. Величко*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Университет государственной фискальной службы Украины, Ирпень

<sup>2</sup> Днепропетровский национальный университет им. Олесея Гончара

E-mail: dr.mykola.semko@gmail.com

#### О СТРОЕНИИ ГРУПП, ВСЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ, ИМЕЮЩИЕ БЕСКОНЕЧНЫЙ СПЕЦИАЛЬНЫЙ РАНГ, ТРАНЗИТИВНО НОРМАЛЬНЫЕ

Получено описание периодических разрешимых групп, подгруппы которых имеют бесконечный специальный ранг, являются транзитивно нормальными. Описана структура периодической радикальной группы, у которой подгруппы бесконечного специального ранга транзитивно нормальны.

**Ключевые слова:** конечный специальный ранг, разрешимая группа, периодическая группа, локально нильпотентный радикал, локально нильпотентный резидуал, транзитивно нормальные подгруппы.

*N.N. Semko*<sup>1</sup>, *T.V. Velichko*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> University of State Fiscal Service of Ukraine, Irpin

<sup>2</sup> Oles Honchar Dnipro National University

E-mail: dr.mykola.semko@gmail.com

#### ON THE GROUPS, WHOSE ALL SUBGROUPS WITH INFINITE SPECIAL RANK ARE TRANSITIVELY NORMAL

The periodic soluble groups, whose subgroups with infinite special rank are transitively normal, and the structure of a periodic radical group, whose subgroups with infinite special rank are transitively normal, are described.

**Keywords:** finite special rank, soluble group, periodic group, locally nilpotent radical, locally nilpotent residual, transitively normal subgroups.