

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.003>

UDC 517.95, 519.21

**Е.Я. Хруслов<sup>1</sup>, Л.А. Хилькова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Физико-технический институт низких температур  
им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков

<sup>2</sup> Институт химических технологий Восточноевропейского национального университета  
им. Владимира Даля, Рубежное

E-mail: [Khruslov@ilt.harkov.ua](mailto:Khruslov@ilt.harkov.ua), [LarisaHilkova@gmail.com](mailto:LarisaHilkova@gmail.com)

## Нелинейная задача Робена в областях с мелкозернистой случайной границей

Представлено академиком НАН Украины Е.Я. Хрусловым

Рассматривается краевая задача для уравнения стационарной диффузии в области  $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$ , дополнительной большому числу мелких зёрен  $B_i^\varepsilon$  ( $i = 1, \dots, N^\varepsilon$ ), на поверхностях которых задано нелинейное граничное условие типа Робена. Предполагается, что эти зёрна являются мелкими шариками, случайно распределёнными в фиксированной области  $\Omega \in R^3$  и имеющими случайные радиусы. Функция распределения  $f^\varepsilon(x, r)$  центров  $x^{i\varepsilon}$  и радиусов  $r_i^\varepsilon$  шаров зависит от малого параметра  $\varepsilon > 0$  так, что среднее расстояние между ближайшими центрами имеет порядок  $O(\varepsilon)$ , а средний радиус — порядок  $O(\varepsilon^\alpha)$  ( $\alpha > 2$ ). Доказано, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  случайное решение задачи  $u^\varepsilon(x)$  по вероятности сходится в метрике  $L^2(\Omega)$  к неслучайной функции  $u(x)$ , для которой получено усреднённое уравнение.

**Ключевые слова:** усреднение, стационарная диффузия, краевое условие Робена, случайное распределение.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в пространстве  $R^3$  и в ней распределено большое количество мелких включений  $B_i^\varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, N^\varepsilon$ , в форме шаров  $B(x^{i\varepsilon}, r_i^\varepsilon)$  радиусов  $r_i^\varepsilon$  с центрами в точках  $x^{i\varepsilon}$ . Будем предполагать, что система шаров  $\{B_i^\varepsilon, i = 1, \dots, N^\varepsilon\}$  зависит от малого параметра  $\varepsilon > 0$  так, что при  $\forall \varepsilon$  шары не пересекаются друг с другом и с внешней границей  $\partial\Omega$ , а при  $\varepsilon \rightarrow 0$  число шаров возрастает:  $N^\varepsilon \sim \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3}$ , среднее расстояние между ближайшими шарами имеет порядок  $O(\varepsilon)$ , а средний радиус шаров — порядок  $O(\varepsilon^\alpha)$ ,  $\alpha > 2$ .

© Е.Я. Хруслов, Л.А. Хилькова, 2017

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2017. № 9

В области  $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$  рассмотрим краевую задачу для уравнения Пуассона с нелинейным граничным условием типа Робена на границе шаров  $S_i^\varepsilon = \partial B_i^\varepsilon$ :

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon(x) = F(x), & x \in \Omega^\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial n} + \varepsilon^\beta \sigma(x^{i\varepsilon}, u^\varepsilon) = 0, & x \in S_i^\varepsilon, \quad i = 1, \dots, N^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  — оператор Лапласа в  $R^3$ ;  $n$  — единичная нормаль к границе  $S^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} S_i^\varepsilon$ , внешняя по отношению к области  $\Omega^\varepsilon$ ; числовой параметр  $\beta \geq 3 - 2\alpha$ ; функции  $f(x) : \Omega \rightarrow R^1$  и  $\sigma(x, u) : \Omega \times R^1 \rightarrow R^1$  заданы и удовлетворяют условиям:  $f(x) \in L^2(\Omega)$ ,  $\sigma(x, u) \in C(\Omega, C^1(R^1))$  и  $\forall x \in \Omega : \sigma(x, 0) = 0$ ,  $0 < k_1 \leq \frac{\partial}{\partial u} \sigma(x, u) \leq k_2(1 + |u|^\tau)$ , где  $0 \leq \tau < 1$ .

Задача (1) описывает процесс стационарной диффузии частиц в перфорированной области  $\Omega^\varepsilon$ , сопровождаемый поглощением на поверхности зёрен  $B_i^\varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, N^\varepsilon$ . В математической литературе задачу (1) часто называют нелинейной задачей Робена, а области вида  $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$  — областями с мелкозернистой границей [1].

Обозначим через  $H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$  пространство функций из  $H^1(\Omega^\varepsilon)$ , равных нулю на внешней границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega^\varepsilon$ .

Обобщенным решением задачи (1) называется функция  $u^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ , удовлетворяющая следующему интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon) dx + \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \varepsilon^\beta \int_{S_i^\varepsilon} \sigma(x^{i\varepsilon}, u^\varepsilon) v^\varepsilon dS - \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon dx = 0$$

для любой функции  $v^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ . Здесь  $S_i^\varepsilon = \partial B_i^\varepsilon$  — поверхность шара  $B_i^\varepsilon$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для любого  $\varepsilon > 0$  существует единственное обобщённое решение задачи (1). Если функции  $f(x)$ ,  $\sigma(x, u)$  и граница  $\partial\Omega$  достаточно гладкие ( $f(x) \in C^1(\Omega)$ ,  $\sigma(x, u) \in C(\Omega, C^1(\Omega \times R^1))$ ,  $\partial\Omega \in C^1$ ), то это обобщённое решение будет классическим.*

В данной работе изучается асимптотическое поведение  $u^\varepsilon(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , когда расположение шаров  $B_i^\varepsilon$  и их радиусы  $r_i^\varepsilon$  случайные. А именно: мы предполагаем, что положение центров  $x^{i\varepsilon}$  шаров и величины их радиусов  $r_i^\varepsilon$  определяются набором  $n$ -частичных функций распределения [2]

$$f_n^\varepsilon(x^1, x^2, \dots, x^n; r_1, r_2, \dots, r_n) : (\Omega)^n \times [0, \infty)^n \rightarrow [0, \infty), \quad n = 1, 2, \dots, N^\varepsilon, \quad (2)$$

так, что вероятность нахождения центров и радиусов данной группы  $n$  шаров в интервалах  $(x^i, x^i + dx^i)$ ,  $(r_i, r_i + dr_i)$   $i = 1, \dots, n$  равна

$$f_n^\varepsilon(x^1, x^2, \dots, x^n; r_1, r_2, \dots, r_n) dx^1 dx^2 \dots dx^n dr_1 dr_2 \dots dr_n.$$

Эти функции удовлетворяют условиям симметрии, согласования и нормировки, вытекающим из их вероятностного смысла [3]:

$$\begin{aligned} & f_n^\varepsilon(x^1, \dots, x^k, \dots, x^\ell, \dots, x^n; r_1, \dots, r_k, \dots, r_\ell, \dots, r_n) = \\ & = f_n^\varepsilon(x^1, \dots, x^\ell, \dots, x^k, \dots, x^n; r_1, \dots, r_\ell, \dots, r_k, \dots, r_n), \\ & \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_0} f_n^\varepsilon(x^1, \dots, x^n; r_1, \dots, r_n) dx^n dr_n = f_{n-1}^\varepsilon(x^1, \dots, x^{n-1}; r_1, \dots, r_{n-1}), \quad n = 2, \dots, N^\varepsilon, \\ & \int_{\Omega_0} \dots \int_{\Omega_0} f_n^\varepsilon(x^1, \dots, x^n; r_1, \dots, r_n) dx^1 dr_1 \dots dx^n dr_n = 1, \quad n = 1, \dots, N^\varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку шары не должны пересекаться друг с другом и с границей  $\partial\Omega$ , то эти функции должны также удовлетворять условию

$$f_n^\varepsilon(x^1, \dots, x^n; r_1, \dots, r_n) = 0,$$

если для некоторых  $i \neq j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ )  $|x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}| < r_i + r_j$  или для некоторого  $i = 1, \dots, n$ :  $\text{dist}(x^{i\varepsilon}, \partial\Omega) \leq r_i$ .

Одночастичную и двухчастичную функции распределения  $f_1^\varepsilon$  и  $f_2^\varepsilon$  выберем такими, чтобы для них выполнялись следующие условия:

$$b_1) \quad f_1^\varepsilon(x; r) = \varepsilon^{-\alpha} f(x; \varepsilon^{-\alpha} r),$$

где параметр  $\alpha > 2$ ,  $f(x; r) \in L^\infty(\Omega \times [0, \infty))$  — неотрицательная функция с компактным носителем  $\Omega \times [a_0, A_0]$  в  $\Omega \times [0, \infty)$  ( $0 < a_0 < A_0 < \infty$ ), нормированная на 1 в  $L^1(\Omega \times [0, \infty))$ ;

$$b_2) \quad f_2^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2) = f_1^\varepsilon(x^1; r_1) \cdot f_1^\varepsilon(x^2; r_2) + \phi^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2),$$

где функция  $\phi^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2) = -f_1^\varepsilon(x^1; r_1) \cdot f_1^\varepsilon(x^2; r_2)$  при  $|x^{i\varepsilon} - x^{j\varepsilon}| < r_i + r_j$  и при  $\varepsilon \ll 1$  в среднем мала так, что при  $\forall \tau_1, \tau_2 \geq 0$

$$\int_{\Omega_0} \dots \int_{\Omega_0} r_1^{\tau_1} r_2^{\tau_2} |\phi^\varepsilon(x^1, x^2; r_1, r_2)| dx^1 dr_1 dx^2 dr_2 < C \varepsilon^{\alpha(\tau_1 + \tau_2 + 3)}.$$

**Замечание 1.** Из условия  $b_1$  следует, что с вероятностью 1 шары  $B_i^\varepsilon$  имеют радиусы, удовлетворяющие неравенству  $a_0 \varepsilon^\alpha \leq r_i^\varepsilon \leq A_0 \varepsilon^\alpha$  ( $\alpha > 2$ ), и не пересекаются с границей  $\partial\Omega$ . В силу условия  $b_2$  шары  $B_i^\varepsilon$  с вероятностью 1 не пересекаются друг с другом и располагаются на расстояниях, больших чем  $2A_0 \varepsilon^\alpha$ , и они распределены почти независимо. Таким образом условие  $b_2$  является аналогом условия ослабленной корреляции [3].

При  $\forall \varepsilon > 0$  функции распределения (2) порождают вероятностную меру  $P^\varepsilon$  на вероятностном пространстве  $G^\varepsilon = \{G^\varepsilon, \Sigma^\varepsilon, P^\varepsilon\}$ , точки  $\omega^\varepsilon \in G^\varepsilon$  которого взаимно однозначно сопоставляются случайным областям  $\Omega^\varepsilon$ . Здесь  $\Sigma^\varepsilon$  —  $\sigma$ -алгебра  $P^\varepsilon$ -измеримых подмножеств в  $G^\varepsilon$  [2, 4].

Рассмотрим в случайной области  $\Omega^\varepsilon$  краевую задачу (1). Обобщённое решение этой задачи  $u^\varepsilon(x)$  зависит от точки  $\omega^\varepsilon$  вероятностного пространства  $G^\varepsilon$ , т.е. является случайной функцией  $u^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x, \omega^\varepsilon)$ . Её измеримость относительно  $\sigma$ -алгебры  $\Sigma^\varepsilon$  следует из того,

что продолженное нулём на множество  $\Omega \setminus \Omega^\varepsilon$  решение  $u^\varepsilon(x)$  при  $\forall \varepsilon > 0$  в метрике  $L^2(\Omega)$  непрерывно зависит от координат центров и радиусов шаров  $B_i^\varepsilon, i = 1, \dots, N^\varepsilon$ .

При сделанных выше предположениях относительно функций распределения  $f_n^\varepsilon(x^1, \dots, x^n; r_1, \dots, r_n), n = 1, \dots, N^\varepsilon$ , случайное решение  $u^\varepsilon(x, \omega^\varepsilon)$  задачи (1), продолженное нулём на  $\Omega \setminus \Omega^\varepsilon$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сходится в метрике  $L^2(\Omega)$  по вероятности к неслучайной функции  $u(x) \in H^1(\Omega)$ , т. е.  $\forall \delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P^\varepsilon \left\{ \omega^\varepsilon \in G^\varepsilon : \int_{\Omega} |u(x, \omega^\varepsilon) - u(x)|^2 dx < \delta \right\} = 1. \tag{3}$$

При этом предельная функция является обобщенным решением следующей усреднённой задачи:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + C_u(x, u) = F(x), x \in \Omega, \\ u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

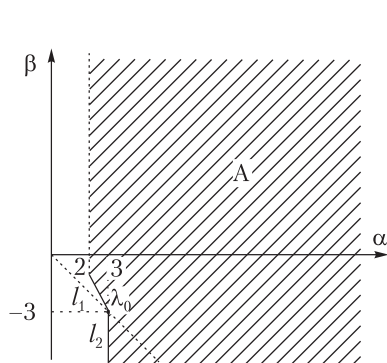
где  $C_u(x, u) = \frac{\partial}{\partial u} C(x, u)$  и функция  $C(x, u)$  характеризует эффективное поглощение мелкозернистой границы  $S^\varepsilon$  области  $\Omega^\varepsilon$ .

Функции  $C(x, u) > 0$  зависят от параметров  $(\alpha, \beta) \in \Lambda = \{2 < \alpha \leq 3, \beta \geq 3 - 2\alpha\} \cup \{\alpha > 3, -\infty < \beta < +\infty\}$  (рис. 1), характеризующих размеры шаров  $B_i^\varepsilon$  и интенсивность поглощения на их поверхности  $S_i^\varepsilon$ .

Обозначим через  $\ell_1, \ell_2, \lambda_0$  участки границы области  $\Lambda$  такие, что  $\ell_1 = \{2 < \alpha < 3, \beta = 3 - 2\alpha\}$ ,  $\ell_2 = \{\alpha = 3, \beta < -\alpha\}$ ,  $\lambda_0 = \{\alpha = 3, \beta = -3\}$  и введём функции зависящие от аргументов  $x \in \Omega, u \in R^1, r \in [a_0, A_0]$ :

$$C_{\alpha\beta}(x, u; r) = \begin{cases} 2\pi r^2 g(x, u), & (\alpha, \beta) \in \ell_1; \\ 2\pi r [u - V]^2 + 2\pi r^2 g(x, V), & (\alpha, \beta) = \lambda_0; \\ 2\pi r u^2, & (\alpha, \beta) \in \ell_2; \\ 0, & (\alpha, \beta) \in \Lambda \setminus (\ell_1 \cup \ell_2 \cup \lambda_0). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь



Область изменения параметров

$$g(x, u) = 2 \int_0^u \sigma(x, s) ds, \tag{6}$$

$V = V(x, u; r)$  — решение уравнения

$$V = u - r \sigma(x, V), \tag{7}$$

и  $\sigma(x, s)$  — плотность поглощения на поверхности шаров  $S^\varepsilon$  (см. задачу (1)). В силу свойств функции  $\sigma(x, s)$  уравнение (7) имеет единственное решение.

Пространственное распределение плотности поглощения в области  $\Omega$  зададим с помощью функции

$$C(x, u) = \int_0^{\infty} C_{\alpha\beta}(x, u; r) f(x; r) dr, \quad (8)$$

где  $f(x; r)$  — функция, введенная в условии  $b_1$ .

Из (5)–(8) и свойств функции  $\sigma(x, s)$  следует, что

$$C(x, u) \in L^\infty(\Omega, C^2(R^1)) \text{ и } \frac{\partial^2 C(x, u)}{\partial u^2} \geq 0,$$

и поэтому функция  $C_u(x, u) = \frac{\partial}{\partial u} C(x, u)$  удовлетворяет неравенству

$$((C_u(x, u_2) - C_u(x, u_1))(u_2 - u_1)) \geq 0,$$

которое гарантирует единственность решения задачи (4).

Таким образом, справедлива следующая теорема, являющаяся основным результатом этой работы.

**Теорема 2.** Пусть функции распределения  $f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon$  удовлетворяют условиям  $b_1, b_2$ . Тогда обобщённое решение  $u^\varepsilon(x)$  задачи (1), продолженное нулём на  $\Omega \setminus \Omega^\varepsilon$ , является случайной функцией  $u(x, \omega^\varepsilon)$ , которая при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в метрике  $L^2(\Omega)$  сходится по вероятности  $P^\varepsilon$  (в смысле (3)) к решению  $u(x)$  краевой задачи (4).

Доказательство этой теоремы проводится методом, развитым в работах [5, 6] с использованием результата работы [7].

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наук. думка, 1974. 278 с.
2. Ширяев А.Н. Вероятность-1. Москва: МЦНМО, 2004. 520 с.
3. Боголюбов Н.Н. Избранные труды. В 3 т. Т. 2. Киев: Наук. думка, 1970. 522 с.
4. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища шк., 1973. 408 с.
5. Verlyand L.V., Khruslov E.Ya. Ginzburg–Landau model of a liquid crystal with random inclusions. *J. Math. Phys.* 2005. **46**. 095107, 15 p.
6. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Усреднённые модели микронеоднородных сред. Киев: Наук. думка, 2005. 551 с.
7. Хилькова Л.А. Усреднение уравнения диффузии в областях с мелкозернистой границей с нелинейным граничным условием типа Робена. *Вісник Харків. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математика, прикладна математика і механіка*. 2016. **84**. С. 93–111.

Поступило в редакцию 27.05.2017

#### REFERENCES

1. Marchenko, V. A. & Khruslov, E. Ya. (1974). Boundary-value problems in domains with a fine-grained boundary. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
2. Shiryaev, A. N. (2004). Probability-1. Moscow: MTsNMO (in Russian).
3. Bogolyubov, N. N. (1970). Selected works. Vol. 2. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
4. Gikhman, I. I., Skorokhod, A. V. & Yadrenko, M. I. (1973). Theory of Probability and Mathematical Statistics. Kiev: Vyshcha shkola (in Russian).

5. Berlyand, L. V. & Khruslov, E. Ya., (2005). Ginzburg–Landau model of a liquid crystal with random inclusions. *J. Math. Phys.*, 46, 095107, 15 p.
6. Marchenko, V. A. & Khruslov, E. Ya. (2005). Homogenized models of micro-inhomogeneous media. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
7. Khilkova, L. O. (2016). Homogenization of the diffusion equation in domains with the fine-grained boundary with the nonlinear boundary Robin condition. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Math., Appl. Math. and Mech.*, 84, pp. 93-111 (in Russian).

Received 27.05.2017

Е.Я. Хруслов<sup>1</sup>, Л.О. Хилькова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Фізико-технічний інститут низьких температур  
ім. Б.І. Веркіна НАН України, Харків

<sup>2</sup> Інститут хімічних технологій Східноукраїнського національного університету  
ім. Володимира Даля, Рубіжне  
E-mail: Khruslov@ilt.harkov.ua, LarisaHilkova@gmail.com

### НЕЛІНІЙНА ЗАДАЧА РОБЕНА В ОБЛАСТЯХ З ДРІБНОЗЕРНИСТОЮ ВИПАДКОВОЮ МЕЖЕЮ

Розглядається крайова задача для рівняння стаціонарної дифузії в області  $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$ , додаткової великому числу дрібних зерен  $B_i^\varepsilon$  ( $i = 1, \dots, N^\varepsilon$ ), на поверхні яких задана нелінійна гранична умова типу Робена. Припускається, що ці зерна є дрібними кульками, які випадково розподілені у фіксованій області  $\Omega \in R^3$  і мають випадкові радіуси. Функція розподілу  $f^\varepsilon(x, r)$  центрів  $x^{ie}$  і радіусів  $r_i^\varepsilon$  куль залежить від малого параметра  $\varepsilon > 0$  так, що середня відстань між найближчими центрами має порядок  $O(\varepsilon)$ , а середній радіус — порядок  $O(\varepsilon^\alpha)$  ( $\alpha > 2$ ). Доведено, що при  $\varepsilon \rightarrow 0$  випадковий розв'язок задачі  $u^\varepsilon(x)$  за ймовірністю збігається в метриці  $L^2(\Omega)$  до не випадкової функції  $u(x)$ , для якої отримано усереднене рівняння.

**Ключові слова:** усереднення, стаціонарна дифузія, крайова умова Робена, випадковий розподіл.

Е.Я. Хруслов<sup>1</sup>, Л.А. Хилькова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> B.I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering  
of the NAS of Ukraine, Kharkiv

<sup>2</sup> Institute of Chemical Technologies  
of the Volodymyr Dahl East Ukrainian National University, Rubizhne  
E-mail: Khruslov@ilt.harkov.ua, LarisaHilkova@gmail.com

### ROBIN'S NONLINEAR PROBLEM IN DOMAINS WITH A FINE-GRAINED RANDOM BOUNDARY

We consider the boundary-value problem for the stationary diffusion equation in the domain  $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$ , which is additional to the large number of fine grains  $B_i^\varepsilon$  ( $i = 1, \dots, N^\varepsilon$ ). The Robin's nonlinear boundary condition is given on the grain surfaces. We assume that these grains are small balls, which are randomly distributed in a fixed domain  $\Omega \in R^3$  and have random radii. The distribution function  $f^\varepsilon(x, r)$  of the centers  $x^{ie}$  and of the radii  $r_i^\varepsilon$  of the balls depends on the small parameter  $\varepsilon > 0$  so that a mean distance between the nearest centers is  $O(\varepsilon)$ , and the mean radius is  $O(\varepsilon^\alpha)$  ( $\alpha > 2$ ). It is proved that, as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , the random solution of the problem  $u^\varepsilon(x)$  converges in probability in the metric of the space  $L^2(\Omega)$  to the nonrandom function  $u(x)$ , for which a homogenized equation is constructed.

**Keywords:** homogenization, stationary diffusion, Robin's boundary condition, random distribution.