ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.10.003
УДК 517.984.5

В.А. Михайлец, В.Н. Молибога

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua, molyboga@imath.kiev.ua

О лакунах в спектре оператора Хилла–Шредингера с сингулярным потенциалом

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А.Н. Кочубеем

Исследуется непрерывный спектр оператора Хилла—Шредингера в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Предполагается, что потенциал оператора принадлежит классу Соболева $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Найдены условия, при которых последовательность длин спектральных лакун: а) ограничена; б) стремится к нулю. Особо изучен случай, когда потенциал является вещественной мерой Радона на $\mathbb{R}$.

Ключевые слова: *оператор Хилла, непрерывный спектр, спектральная лакуна, сильно сингулярный потенциал.*

1. Рассмотрим дифференциальное выражение Хилла–Шредингера

$$S(q)u = -u'' + q(x)u, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с вещественной 1-периодической обобщенной функцией $q(\cdot)$ из негативного пространства Соболева $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Ее ряд Фурье—Шварца имеет вид

$$q(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{q}(k) e^{ik2\pi x}, \tag{2}$$

где коэффициенты ряда удовлетворяют условиям

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+2|k|)^{-2} |\hat{q}(k)|^2 < \infty$$

и

$$\hat{q}(k) = \overline{\hat{q}(-k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Дифференциальное выражение (1) корректно определяется как квазидифференциальное [1—5]. Оно задает в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ оператор Хилла–Шредингера $S(q)$, который определен на плотном в $L^2(\mathbb{R})$ множестве функций

$$\mathrm{Dom}(S(q)) = \{u \in H^1(\mathbb{R}) \,|\, -u'' + q(x)u \in L^2(\mathbb{R})\}$$

и действует по формуле (1). При этом выражения u'' и $q(x)u$ понимаются в смысле распределений.

Оператор $S(q)$ самосопряжен в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и полуограничен снизу (см., например, [4], где также приведены иные эквивалентные определения этого оператора). Спектр оператора $S(q)$ абсолютно непрерывен и имеет зонную структуру: его спектральные зоны перемежаются со спектральными лакунами [2—5]. При этом концы спектральных лакун $\{\lambda_0^+(q), \lambda_n^\pm(q)\}_{n=1}^\infty$, как и в классическом случае суммируемого с квадратом потенциала, удовлетворяют неравенствам [4, теорема С]:

$$-\infty < \lambda_0^+(q) < \lambda_1^-(q) \leqslant \lambda_1^+(q) < \lambda_2^-(q) \leqslant \lambda_2^+(q) < \lambda_3^-(q) \leqslant \lambda_3^+(q) \cdots,$$

где $\{\lambda_0^+(q), \lambda_n^\pm(q)\}_{n=1}^\infty$ при четных/нечетных n являются собственными значениями соответствующих периодической/полупериодической граничных задач на единичном отрезке [6, 7].

2. Обозначим через

$$\gamma_q(n) := \lambda_n^+(q) - \lambda_n^-(q) \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

длины спектральных лакун оператора $S(q)$. Некоторые из лакун могут вырождаться. Если $q(\cdot) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, то, как известно, длины спектральных лакун стремятся к нулю, а скорость сходимости возрастает вместе с гладкостью потенциала [8—10]. В случае сингулярного потенциала ситуация качественно меняется. Примеры показывают, что в этом случае последовательность $\{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ может быть и неограничена. В связи с этим возникает вопрос о нахождении условий, при которых последовательность $\{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ принадлежит классу $\mathbf{l}_\infty$ или $\mathbf{c}_0$. Его исследованию и посвящена данная работа.

Обозначим через $s(q)$ порядок гладкости произвольного распределения $q(\cdot)$ в гильбертовой шкале соболевских пространств на единичной окружности $\mathbb{T}$:

$$s(q) := \sup\{s \in \mathbb{R} \,|\, q \in H^s(\mathbb{T})\} \geqslant -1.$$

Как известно, периодическое распределение $q(\cdot)$ вида (2) принадлежит пространству Соболева $H^s(\mathbb{T})$ тогда и только тогда, когда

$$\| q \,|\, H^s(\mathbb{T}) \|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + 2|k|)^{2s} |\hat{q}(k)|^2 < \infty.$$

Теорема 1. *Пусть у оператора $S(q)$ порядок сингулярности потенциала $s(q) \in [-1, -1/2)$. Тогда последовательность длин спектральных лакун $\{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ неограничена.*

Доказательство теоремы использует известные асимптотические формулы для длин спектральных лакун. Пусть $q \in H^s(\mathbb{T})$, $s \in (-1, 0]$, тогда согласно [12, теорема 1] мы имеем:

$$\gamma_q(n) = 2|\hat{q}(n)| + h^{1+2s-\delta}(n) \quad \forall \delta > 0. \tag{3}$$

Тут весовые пространства последовательностей $h^s(\mathbb{N}) \equiv h^s(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ определяются следующим образом:

$$h^s(\mathbb{N}) := \left\{ \{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{N}} (1 + |k|)^{2s} |a(k)|^2 < \infty \right\},$$

а через $h^s(n)$ обозначено n-й элемент последовательности, принадлежащей $h^s(\mathbb{N})$. Очевидно, что

$$\{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} \in h^s(\mathbb{N}) \Rightarrow a(k) = o(k^{-s}), \quad k \to \infty .$$

Нам также будет необходимо соотношение между гладкостью потенциала и скоростью изменения длин спектральных лакун [11, теорема 29] (см. также [12, 13]):

$$q \in H^s(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in h^s(\mathbb{N}), \quad s \in [-1, \infty). \tag{4}$$

Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует такой потенциал $q \in H^{-1}(\mathbb{T})$ с $s(q) \in (-1, -1/2)$, для которого соответствующая последовательность длин спектральных лакун $\{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ является ограниченной, т. е., $\{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{l}_\infty(\mathbb{N})$. Тогда очевидно, что $\{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in h^{-1/2-\delta}(\mathbb{N})$ $\forall\delta > 0$.

Тогда в силу (4) мы имеем $q \in H^{-1/2-\delta}(\mathbb{T})$ $\forall\delta > 0$, т. е., $s(q) \geqslant -1/2$. Полученное противоречие доказывает ошибочность сделанного предположения.

Теорему 1 дополняет

Теорема 2. *Пусть у оператора $S(q)$ порядок сингулярности потенциала $s(q) \in (-1/2, 0]$. Тогда последовательность*

$$\gamma_q(n) - 2\,|\hat{q}(n)| \in \mathbf{c}_0.$$

В частности,

а) $\gamma_q(n) \in \mathbf{l}_\infty$ тогда и только тогда, когда потенциал $q(\cdot)$ является псевдомерой, т. е. $\{\hat{q}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{l}_\infty$;

б) условие $\gamma_q(n) \in \mathbf{c}_0$ равносильно тому, что $q(\cdot)$ является псевдофункцией, т. е. $\{\hat{q}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{c}_0$.

Доказательство. Пусть $s(q) \in (-1, 2, 0]$. Тогда $q \in H^{s(q)-\varepsilon}(\mathbb{T})$ $\forall\varepsilon > 0$, и в силу формулы (3) мы имеем:

$$\gamma_q(n) = 2\,|\hat{q}(n)| + h^{1+2s(q)-2\varepsilon-\delta}(n) \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \forall\delta > 0. \tag{5}$$

Поскольку $s(q) > -1/2$, то мы можем выбрать $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$1 + 2s(q) - 2\varepsilon - \delta \geqslant 0.$$

Тогда асимптотические оценки принимают вид

$$\gamma_q(n) = 2\,|\hat{q}(n)| + h^0(n). \tag{6}$$

Но $h^0(n) = o(1)$, $n \to \infty$. Поэтому из (6) следуют утверждения теоремы.

Следствие. *Пусть $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность натуральных чисел, а $c \in [0, +\infty]$. Тогда если $s(q) \in (-1/2, 0]$, то*

$$\gamma_q(n_k) \to 2c \Leftrightarrow |\hat{q}(n_k)| \to c,$$

когда $k \to \infty$.

Теорема 2 позволяет строить примеры потенциалов, для которых последовательность длин спектральных лакун имеет заданные свойства. В частности, таких, что $s(q)=0$, но последовательность $\{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \notin \mathbf{l}_\infty$.

Пример. *Пусть*

$$v(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{v}(k)e^{ik2\pi x},$$

где коэффициенты ряда Фурье—Шварца определены следующим образом:

$$\hat{v}(k):=\begin{cases} n, & \text{если} \quad |k|=2^n, n\in\mathbb{N}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2 = 2\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 = +\infty, \quad \text{т. е.,} \quad v\notin L^2(\mathbb{T}).$$

Однако для каждого $\delta>0$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+2|k|)^{-2\delta}|\hat{v}(k)|^2 = 2\sum_{n\in\mathbb{N}} (1+2^{n+1})^{-2\delta} n^2 < \infty, \quad \text{т. е.,} \quad v\in H^{-\delta}(\mathbb{T}).$$

В силу теоремы 2 последовательность длин спектральных лакун неограничена, а в силу следствия из нее

$$\lim_{M\ni n\to\infty} \gamma_q(n)=+\infty;$$

$$\lim_{M\not\ni n\to\infty} \gamma_q(n)=0,$$

где $M:=\{n\in\mathbb{N} \,|\, n=2^k, \quad k\in\mathbb{N}\}$.

3. Вопрос о том, верна ли теорема 2 при $s(q)=-\frac{1}{2}$, остается пока открытым. Этот случай особо важен для физических приложений, так как вместе со случаем $s(q)>-\frac{1}{2}$ он охватывает все вещественные меры Радона на $\mathbb{R}$, которые являются обобщенными производными функций из класса $BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\subset L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Он требует отдельного исследования. Вместе с тем для мер нами установлена

Теорема 3. *Последовательность длин спектральных лакун* $\{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *оператора Хилла—Шредингера* $S(q)$ *с потенциалом* $q(\cdot)$*, который является вещественной 1-периодической мерой Радона, ограничена*

Доказательство теоремы 3 использует результат [14, теорема 12.8.1] и [15, теорема 1]. Оно будет приведено в другой публикации.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма Лиувилля с потенциалами–распределениями. Тр. Моск. мат. об-ва. 2003. **64**. С. 159—212.

2. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. 1-D Schrödinger operators with periodic singular potentials. *Methods Funct. Anal. Topology.* 2001. **7**, № 4. P. 31—42.
3. Korotyaev E. Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions. *Int. Math. Res. Not.* 2003. **37**. P. 2019—2031. doi: https://doi.org/10.1155/S1073792803209107
4. Mikhailets V., Molyboga V. One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. *Methods Funct. Anal. Topology.* 2008. **14**, № 2. P. 184—200.
5. Djakov P., Mityagin B. Fourier method for one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. *Topics in Operator Theory. Operator Theory: Advances and Applications*, Vol. 203. Basel: Birkhäuser, 2010. P. 195—236. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0161-0_9
6. Mikhailets V., Molyboga V. Singularly perturbed periodic and semiperiodic differential operators. *Ukr. Math. J.* 2007. **59**, № 6. P. 858—873. doi: https://doi.org/10.1007/s11253-007-0055-7
7. Mikhailets V., Molyboga V. On the spectrum of singular perturbations of operators on the circle. *Math. Notes.* 2012. **91**, № 3—4. P. 588—591. doi: https://doi.org/10.1134/S0001434612030352
8. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла. *Матем. сб.* 1975. 97, № 4. С. 540—606.
9. Djakov P., Mityagin B. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators. *Russ. Math. Surv.* 2006. 61, № 4. P. 663—766. doi: https://doi.org/10.1070/RM2006v061n04ABEH004343
10. Mikhailets V., Molyboga V. Smoothness of Hill's potential and lengths of spectral gaps. *Spectral Theory, Mathematical System Theory, Evolution Equations, Differential and Difference Equations. Operator Theory: Advances and Applications*, Vol. 221. Basel: Birkhäuser, 2012. P. 469—479. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0297-0_27
11. Djakov P., Mityagin B. Spectral gaps of Schrödinger operators with periodic singular potentials. *Dynam. Part. Differ. Eq.* 2009. **6**, № 2. P. 95—165. doi: https://doi.org/10.4310/DPDE.2009.v6.n2.a1
12. Mikhailets V., Molyboga V. Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. *Methods Funct. Anal. Topology*. 2009. **15**, № 1. P. 31—40.
13. Mikhailets V., Molyboga V. Hill's potentials in Hörmander spaces and their spectral gaps. *Methods Funct. Anal. Topology*. 2011. **17**, № 3. P. 235—243.
14. Atkinson F.V. Discrete and continuous boundary problems. Mathematics in Science and Engineering. Vol. 8. New York, London: Academic Press, 1964. xiv+570 pp.
15. Молибога В.Н. Характеризация спектральных лакун в спектре оператора Хилла с потенциалом–распределением. Зб. праць Інституту математики НАН України. 2013. 10, № 2. С. 248—259.

Поступило в редакцию 12.07.2018

REFERENCES

1. Savchuk, A. M. & Shkalikov, A. A. (2003). Sturm–Liouville operators with distribution potentials. Tr. Mosk. mat. ob-va., 64, pp. 159-212 (in Russian).
2. Hryniv, R. O. & Mykytyuk, Ya. V. (2001). 1-D Schrödinger operators with periodic singular potentials. Methods Funct. Anal. Topology, 7, No. 4, pp. 31-42.
3. Korotyaev, E. L. (2003). Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions. Int. Math. Res. Not., 37, pp. 2019-20131. doi: https://doi.org/10.1155/S1073792803209107
4. Mikhailets, V. & Molyboga, V. (2008). One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. Methods Funct. Anal. Topology, 14, No. 2, pp. 184-200.
5. Djakov, P. & Mityagin, B. (2010). Fourier method for one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. In Topics in Operator Theory. Operator Theory: Advances and Applications (Vol. 203) (pp. 195-236). Basel: Birkhäuser. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0161-0_9
6. Mikhailets, V. A. & Molyboga, V. M. (2007). Singularly perturbed periodic and semiperiodic differential operators. Ukr. Math. J., 59, No. 6, pp. 858-873. doi: https://doi.org/10.1007/s11253-007-0055-7
7. Mikhailets, V. A. & Molyboga, V. (2012). On the spectrum of singular perturbations of operators on the circle. Math. Notes, 91, No. 3-4, pp. 588-591. doi: https://doi.org/10.1134/S0001434612030352
8. Marčenko, V. A & Ostrovs'kiĭ, I. V. (1975). A characterization of the spectrum of the Hill operator. Mat. USSR-Sb., 26, No. 4, pp. 493-554.

9. Djakov, P. & Mityagin, B. (2006). Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators. Russ. Math. Surv., 64, No. 4, pp. 663-766. doi: https://doi.org/10.1070/RM2006v061n04ABEH004343
10. Mikhailets, V. & Molyboga, V. (2012). Smoothness of Hill's potential and lengths of spectral gaps. Spectral Theory, Mathematical System Theory, Evolution Equations, Differential and Difference Equations. Operator Theory: Advances and Applications (Vol. 221) (pp. 469-479). Basel: Birkhäuser. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0297-0_27
11. Djakov, P. & Mityagin, B. (2009). Spectral gaps of Schrödinger operators with periodic singular potentials. Dynam. Part. Differ. Eq., 6, No. 2, pp. 95-165. doi: https://doi.org/10.4310/DPDE.2009.v6.n2.a1
12. Mikhailets, V. & Molyboga, V. (2009). Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials. Methods Funct. Anal. Topology, 15, No. 1, pp. 31-40.
13. Mikhailets, V. & Molyboga, V. (2011). Hill's potentials in Hörmander spaces and their spectral gaps. Methods Funct. Anal. Topology, 17, No. 3, pp. 235-243.
14. Atkinson, F. V. (1964). Discrete and continuous boundary problems. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 8. New York, London: Academic Press.
15. Molyboga, V. (2013). Characterization of spectral gapsin the spectrum of Hill's operator with distributional potential. Zb. Prats Instytutu matematyky NAN Ukrajiny, 10, No. 2, pp. 248-259 (in Russian).

Received 12.07.2018

В.А. Михайлець, В.М. Молибога

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua, molyboga@imath.kiev.ua

ПРО ЛАКУНИ В СПЕКТРІ ОПЕРАТОРА
ХІЛЛА–ШРЕДІНГЕРА З СИНГУЛЯРНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Досліджується неперервний спектр оператора Хілла—Шредінгера в гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{R})$. Вважається, що потенціал оператора належить до класу Соболєва $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Знайдено умови, за яких послідовність довжин спектральних лакун: а) обмежена; б) прямує до нуля. Окремо досліджено випадок, коли потенціал є дійсною мірою Радона на $\mathbb{R}$.

Ключові слова: *оператор Хілла, неперервний спектр, спектральна лакуна, сильно сингулярний потенціал.*

V.A. Mikhailets, V.M. Molyboga

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua, molyboga@imath.kiev.ua

ON SPECTRAL GAPS OF THE HILL—SCHRÖDINGER
OPERATOR WITH SINGULAR POTENTIAL

We study the continuous spectrum of the Hill—Schrödinger operator in a Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$. The operator potential belongs to a Sobolev space $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. The conditions are found for the sequence of lengths of spectral gaps to: a) be bounded; b) converge to zero. The case where the potential is a real Radon measure on $\mathbb{R}$ is studied separately.

Keywords: *Hill's operator, continuous spectrum, spectral gap, strongly singular potential.*