ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.11.003
УДК 517.587

І.П. Гаврилюк [1], **В.Л. Макаров** [2]

[1] Дуальна вища школа Гера-Айзенах, Німеччина
[2] Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: iwan.gawriljuk@dhge.de, makarov@imath.kiev.ua

Резонансні рівняння і класичні ортогональні многочлени

Представлено академіком НАН України В.Л. Макаровим

З використанням загальної теореми В.Л. Макарова про зображення частинних розв'язків резонансних рівнянь у банахових просторах (1974) побудовано та обґрунтовано рекурентний алгоритм знаходження частинних розв'язків резонансних рівнянь першого та другого роду із загальним диференціальним оператором для класичних ортогональних многочленів. Наведено приклад загального розв'язку резонансних рівнянь із диференціальним оператором для многочленів Лежандра.

Ключові слова: *резонансне рівняння, гіпергеометричне рівняння, гіпергеометричні функції, конфлюентні гіпергеометричні функції, загальний розв'язок, класичні ортогональні многочлени, функції другого роду.*

В літературі є різні означення математичного резонансу. Наприклад, в [1] гранична задача називається резонансною, якщо оператор, визначений диференціальним рівнянням та граничними умовами, не має оберненого. У даній роботі ми будемо дотримуватися такого означення [2—5]: рівняння $Lf = g$ з правою частиною, що задовольняє рівняння $Lg = 0$ (або, іншими словами, яка належить ядру $N(L)$ оператора L), називається резонансним.

Наприклад, такі рівняння є частиною дуже ефективного FD-методу розв'язування операторних рівнянь і задач на власні значення [6]. Ці рівняння виникають у теорії суперсиметричних операторів Казиміра та ді-спін алгебр [2, 3]. Вони виникають також під час розв'язування операторних рівнянь вигляду $A^2u = 0$ з деяким оператором A. Використовуючи позначення $Au = v$, ми зводимо це рівняння до пари рівнянь $Av = 0$, $Au = v$, друге з яких є резонансним.

Їх важливість для практики можна пояснити, зокрема, на такому прикладі. Нехай деяку систему можна математично описати рівнянням $Au - \lambda u = f$ у певному гільбертовому просторі H, де оператор A повністю визначений його власними значеннями λ_j, $j = 1, 2, \dots$, та відповідними власними векторами u_j, $j = 1, 2, \dots$, що утворюють базис простору. Тут число λ

є параметром, який характеризує систему. Якщо права частина (збудження) має вигляд $f = \alpha u_k$ з деякими фіксованими α, *k*, то розв'язком операторного рівняння є

$$u = \frac{\alpha}{\lambda_k - \lambda} u_k .$$

Ми бачимо, що норма $\| u \|$, яку можна трактувати як "амплітуду" розв'язку, необмежено зростає в таких випадках:

1) якщо $\alpha \to \infty$ (тобто амплітуда збудження необмежено зростає);

2) системний параметр прямує до деякого власного значення λ_k оператора: $\lambda \to \lambda_k$.

У другому випадку описане явище резонансу, а параметр λ_k оператора визначає резонансну частоту системи.

Явище резонансу відіграє дуже важливу роль у природі та в різноманітних технічних застосуваннях, наприклад у медичній діагностиці (magnetic resonance imaging або nuclear spin tomography), динаміці твердих тіл і рідин тощо.

У даній роботі ми пропонуємо та обґрунтовуємо загальний алгоритм знаходження частинних розв'язків резонансних рівнянь із диференціальними операторами гіпергеометричного типу, а також виродженими операторами гіпергеометричного типу, що визначають класичні ортогональні многочлени як один із двох лінійно незалежних розв'язків відповідного однорідного диференціального рівняння. Другим лінійно незалежним розв'язком однорідного рівняння є відповідні так звані функції другого роду. За допомогою цих двох лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння, а також частинного розв'язку неоднорідного рівняння можна записати загальний розв'язок неоднорідного резонансного рівняння.

Вірним є таке твердження [4, 5]:

Теорема 1. *Нехай A — лінійний оператор, що діє з банахового простору X в X і нехай зв'язна множина* $\Sigma(A)$, *яка лежить у комплексній площині, є спектром A. Якщо* $\lambda \in \Sigma(A)$, $f(\lambda) \in N(A - \lambda E)$ *— сильно диференційовна функція, то частинний розв'язок резонансного рівняння*

$$(A - \lambda)u = f(\lambda)$$

можна вибрати у вигляді

$$u(\lambda) = \frac{df(\lambda)}{d\lambda}. \tag{1}$$

Розглянемо такий диференціальний оператор гіпергеометричного або виродженого гіпергеометричного типу:

$$A_n u_n = \sigma(x) \frac{d^2 u_n(x)}{dx^2} + \tau(x) \frac{du_n(x)}{dx} + \lambda(n) u_n(x),$$

де $\sigma(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $\tau(x) = b_1 x + b_0$, $\lambda = \lambda_n = -nb_1 - n(n-1)a_2$, a_2, a_1, a_0, b_1, b_0, $\lambda = \lambda(n) = \lambda_n = -nb_1 - n(n-1)a_2$ — деякі параметри. Цей оператор для різних значень параметрів визначає класичні ортогональні многочлени Якобі, Ерміта, Лягерра. Такий многочлен, який ми для всіх класичних ортогональних многочленів позначатимемо $\widehat{P_n}(x)$, є одним з лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння

$$A_n u = 0 \tag{2}$$

або функцією першого роду. Іншим лінійно незалежним розв'язком однорідного рівняння є відповідна функція другого роду $\widehat{Q_n}(x)$, отже, загальний розв'язок однорідного рівняння можна записати у вигляді

$$u(x)=c_1\widehat{P_n}(x)+c_2\widehat{Q_n}(x),$$

де c_1, c_2 — довільні сталі. З метою скорочення викладу будемо застосовувати позначення $R_n(x)$, коли мова йтиме про функції першого або другого роду.

Функції першого роду (класичні ортогональні многочлени) та функції другого роду (які не є многочленами) задовольняють одне й те ж саме диференціальне рівняння (2), а також одне й те ж саме рекурентне співвідношення

$$R_{n+1}(x)=(\alpha_n x+\beta_n)R_n(x)-\gamma_n R_{n-1}(x), \quad n=1, 2, \ldots,$$

з певними незалежними від x сталими α_n, β_n, γ_n.

Неоднорідне рівняння

$$A_n u_n(x)=\sigma(x)\frac{d^2u_n(x)}{dx^2}+\tau(x)\frac{du_n(x)}{dx}+\lambda(n)u_n(x)=\widehat{P_n}(x) \tag{3}$$

є резонансним, будемо його називати резонансним рівнянням першого роду. Неоднорідне рівняння

$$A_n u_n(x)=\sigma(x)\frac{d^2u_n(x)}{dx^2}+\tau(x)\frac{du_n(x)}{dx}+\lambda(n)u_n(x)=\widehat{Q_n}(x) \tag{4}$$

будемо називати резонансним рівнянням другого роду.

Загальний розв'язок неоднорідних резонансних рівнянь можна зобразити у вигляді

$$u(x)=c_1\widehat{P_n}(x)+c_2\widehat{Q_n}(x)+\hat{u}_n^{(k)}(x), \quad k=1, 2,$$

де $\hat{u}_n^{(k)}(x)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння першого або другого роду, а c_1, c_2 — довільні сталі.

Для знаходження частинних розв'язків резонансних рівнянь із диференціальними операторами класичних ортогональних многочленів ми пропонуємо такий алгоритм.

1. За допомогою формули (1) з теореми 1 знаходимо частинні розв'язки резонансного рівняння (3) або (4) для $n=0, 1$. Позначимо їх

$$\begin{aligned} \chi_0(x)&=-\frac{1}{\lambda'(n)}\frac{dR_\nu(x)}{d\nu}\bigg|_{\nu=0}, \\ \chi_1(x)&=-\frac{1}{\lambda'(n)}\frac{dR_\nu(x)}{d\nu}\bigg|_{\nu=1} \end{aligned} \tag{5}$$

(тут і надалі диференціювання за натуральним параметром n означає: 1) перехід до дійсного параметра ν, тобто використання відповідних зображень $R_\nu(x)$ через гіпергеометричні чи вироджені гіпергеометричні функції; 2) диференціювання за дійсним параметром; 3) заміна у виразі для похідної дійсного ν на ціле невід'ємне n).

2. Будуємо такі початкові частинні розв'язки резонансного рівняння:

$$u_0(x) = \chi_0(x) + c_0\widehat{P_0}(x) + d_0\widehat{Q_0}(x), \; u_1(x) = \chi_1(x) + c_1\widehat{P_1}(x) + d_1\widehat{Q_1}(x), \tag{6}$$

де c_0, c_1, d_0, d_1 — на цьому кроці довільні сталі, які будуть визначені нижче таким чином, щоб отримана за рекурентним співвідношенням функція $u_2(x)$ задовольняла резонансне диференціальне рівняння.

3. Шляхом диференціювання рекурентного співвідношення

$$R_{n+1}(x) = (\alpha_n x + \beta_n) R_n(x) - \gamma_n R_{n-1}(x), \; n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

для класичних ортогональних поліномів чи, відповідно, функцій другого роду за параметром *n* приходимо до рекурентного співвідношення для частинних розв'язків резонансного рівняння першого або другого роду

$$u_{n+1}(x) = -\frac{1}{\lambda'(n+1)}\Bigg[-\lambda'(n)(\alpha_n x + \beta_n) u_n(x) + \lambda'(n-1)\gamma_n u_{n-1}(x) +$$

$$+\left(\frac{d\alpha_n}{dn}x + \frac{d\beta_n}{dn}\right)R_n(x) - \frac{d\gamma_n}{dn}R_{n-1}(x)\Bigg], \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Покладаємо в ньому $n = 1$, підставляємо початкові частинні розв'язки (5) і враховуємо вимогу, щоб одержаний вираз задовольняв резонансне рівняння (3) або, відповідно, (4) для $n = 2$. Звідки й знаходимо сталі c_0, c_1, d_0, d_1.

Вірною є

Теорема 2. *Функції* $u_{n+1}(x)$, *побудовані за рекурентним алгоритмом* (5)–(8), *задовольняють для всіх n резонансне рівняння першого або, відповідно, другого роду.*

Доведення будемо проводити за індукцією. Функції $u_p(x)$, $p = 0, 1, 2$, задовольняють резонансне рівняння за побудовою. Припустимо, що всі функції $u_p(x)$, $p = 0, 1, \ldots, n$, також задовольняють це рівняння, і покажемо, що те ж саме справджується й для функції $u_{n+1}(x)$. Дійсно, застосуємо до обох частин формули (8) оператор

$$A_{n+1} = \sigma(x)\frac{d^2}{dx^2} + \tau(x)\frac{d}{dx} + \lambda(n+1).$$

Тоді будемо мати

$$A_{n+1}u_{n+1}(x) = \frac{1}{\lambda'(n+1)}\frac{d}{d\nu}\Bigg\{-\left[2\sigma(x)\frac{dR_\nu(x)}{dx} + \tau(x)R_\nu(x)\right]\alpha_\nu +$$

$$+\int_{n+1}^{\nu}\frac{d\lambda(\xi)}{d\xi}d\xi\,(\alpha_\nu x + \beta_\nu)R_\nu(x) - \int_{n+1}^{\nu-1}\frac{d\lambda(\xi)}{d\xi}d\xi\,\gamma_\nu R_{\nu-1}(x)\Bigg\}_{\nu=n}. \tag{9}$$

Далі будемо використовувати відомі формули диференціювання функцій першого чи другого роду (див. [7, с. 171, ф-ла (15), с. 189, ф-ла (12), с. 193, ф-ла (14)])

$$\sigma(x)\frac{dR_n(x)}{dx} = [q_1(n)x + q_2(n)]R_n(x) + s(n)R_{n-1}(x) \tag{10}$$

для отримання виразу похідної відповідної функції через її саму і одну сусідню. Продиференціюємо цю рівність за n і скористаємось теоремою 1. Тоді одержимо

$$-\lambda'(n)\sigma(x)\frac{du_n(x)}{dx}=$$
$$=-\lambda'(n)[q_1(n)x+q_2(n)]u_n(x)-\lambda'(n-1)s(n)u_{n-1}(x)+$$
$$+\left[\frac{dq_1(n)}{dn}x+\frac{dq_2(n)}{dn}\right]R_n(x)+\frac{ds(n)}{dn}R_{n-1}(x). \tag{11}$$

Запишемо формулу (9) у розгорнутому вигляді, застосуємо теорему 1, формулу (11) та прирівняємо до нуля коефіцієнти при $u_n(x)$, $u_{n-1}(x)$. З одержаної системи лінійних алгебраїчних рівнянь знаходимо

$$s(n)=-\frac{\gamma_n}{\alpha_n}[b_1+(2n-1)a_2],$$
$$q_1(n)=-\frac{1}{2}[b_1+\lambda(n+1)-\lambda(n)]=na_2, \tag{12}$$
$$q_2(n)=-\frac{b_0}{2}-\frac{\beta_n}{2\alpha_n}[\lambda(n+1)-\lambda(n)]=-\frac{b_0}{2}+\frac{\beta_n}{2\alpha_n}[b_1+2na_2].$$

Неважко перевірити, що коефіцієнти формул диференціювання для всіх класичних ортогональних многочленів задовольняють (12).

Отже, у формулі (10) враховується інформація тільки стосовно коефіцієнтів диференціального рівняння та рекурентного співвідношення для функцій першого і другого роду. Вона є значно зручнішою у застосуванні, ніж формула (3) (див. [8, с. 32]). У подальшому розгорнутий вигляд формули (9) буде містити тільки функції $\frac{dR_n(x)}{dx}$, $R_n(x)$, $R_{n-1}(x)$ та їх коефіцієнти. Похідну $dR_n(x)/dx$ змінюємо на її вираз згідно з (10), і після нескладних, але досить громіздких перетворень, одержуємо $A_{n+1}u_{n+1}(x)=R_{n+1}(x)$, що й потрібно було довести.

Як приклад, розглянемо таке резонансне рівняння Лежандра першого роду:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{du(x)}{dx}\right]+n(n+1)u(x)=P_n(x),$$

де $P_n(x)$ — многочлен Лежандра, та рівняння другого роду, в якому замість многочлена Лежандра в правій частині стоїть функція Лежандра другогу роду

$$Q_n(x)=\frac{2^n(1+x)^{-n-1}(n!)^2}{(2n+1)!}F\left(n+1,n+1;2n+2;\frac{2}{1+x}\right)=$$
$$=Q_0(x)P_n(x)-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{2n-2k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x), \tag{13}$$

а F є гіпергеометричною функцією. Загальний розв'язок резонансних рівнянь Лежандра першого та другого роду зображується у вигляді

$$u_k(x) = c_1^{(k)} P_n(x) + c_2^{(k)} Q_n(x) + u_n^{(k)}(x), \quad k = 1, 2,$$

де $c_1^{(k)}$, $c_2^{(k)}$ — довільні сталі, а $u_n^{(k)}(x)$ є частинним розв'язком відповідного неоднорідного рівняння.

За допомогою нашого алгоритму знаходимо такі частинні розв'язки резонансного рівняння Лежандра першого роду:

$$u_n^{(1)}(x) = -\frac{1}{2(2n+1)} P_n(x) \ln(1-x^2) + v_n(x),$$

де функції $v_n(x)$ задовольняють рекурентне співвідношення

$$v_{n+1}(x) = -\frac{1}{2n+3}\left[-\frac{(2n+1)^2 x}{n+1} v_n(x) + \frac{n(2n-1)}{n+1} v_{n-1}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{(n+1)^2} P_n(x) - \frac{1}{(n+1)^2} P_{n-1}(x)\right], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$v_0(x) = 0, \; v_1(x) = -\frac{x}{3}.$$

Зокрема, отримаємо

$$u_0^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2),$$

$$u_1^{(1)}(x) = -\frac{x}{6}\ln(1-x^2) - \frac{1}{3}x.$$

Для частинних розв'язків резонансного рівняння Лежандра другого роду одержимо

$$\chi_0(x) = -P_0(x) w(x),$$

$$\chi_1(x) = -\frac{1}{3} P_1(x) w(x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-1) - \frac{2}{3},$$

$$w(x) = -\mathrm{polylog}\left(2, \frac{2}{1+x}\right) - \frac{1}{2}\ln^2(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+1)\ln(x-1) =$$

$$= -\mathrm{dilog}\left(\frac{2}{1+x}\right) - \frac{1}{2}\ln^2(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+1)\ln(x-1), \qquad x > 1,$$

де polylog є так званою полілогарифмічною функцією порядку s та аргументу z:

$$\mathrm{polylog}(s, z) = \mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k k^s$$

(dilog, що позначається також $\mathrm{Li}_2(z)$ — це частинний випадок функції polylog для $s = 2$). Згідно з нашим алгоритмом, для частинних розв'язків резонансного рівняння другого роду в результаті будемо мати рекурентне співвідношення

$$u_{n+1}^{(2)}(x) = -\frac{1}{2n+3}\left[-\frac{(2n+1)^2 x}{n+1}u_n^{(2)}(x) + \frac{n(2n-1)}{n+1}u_{n-1}^{(2)}(x) + \frac{x}{(n+1)^2}Q_n(x) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{(n+1)^2}Q_{n-1}(x)\right], \quad n = 1, 2, \dots,$$

із відповідно “виправленими” початковими умовами

$$u_0^{(2)}(x) = -P_0(x)w(x) - \frac{1}{2}Q_0(x),$$

$$u_1^{(2)}(x) = -\frac{1}{3}P_1(x)w(x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-1) - \frac{1}{2}Q_1(x), \quad x > 1,$$

і, наприклад, такий частинний розв'язок:

$$u_2^{(2)}(x) = -\frac{1}{5}P_2(x)w(x) - \frac{3x}{20}\ln(x^2-1) - \frac{1}{30}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{3x}{5} - \frac{1}{3}Q_2(x), \quad x > 1.$$

Зауважимо, що в наведених вище формулах було використане зображення функції Лежандра другого роду (13).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. Об одной схеме исследования на разрешимость резонансных краевых задач. *Изв. вузов. Матем.* 1996. № 11. С. 14—22.
2. Backhouse N.B. Resonant equations and special functions. *J. Comput. Appl. Math.* 2001. **133**, № 1—2. P. 163–169.
3. Backhouse N.B. The resonant Legendre equation. *J. Math. Anal. Appl.* 1986. **117**, № 2. P. 310—317.
4. Макаров В.Л. Разностные схемы с точными и явными спектрами: дис. д-ра физ.-мат. наук / Киевский госуниверситет им. Т.Г. Шевченко. Киев, 1976.
5. Макаров В.Л., Аразмырадов Т. О построении частных решений резонансных дифференциальных уравнений. *Дифференц. уравнения.* 1978. **14**, № 7. С. 1255—1261.
6. Макаров В.Л. FD-метод — експоненційна швидкість збіжності. *Журн. обчисл. та прикл. матем.* 1997. № 82. С. 69—74.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Москва: Наука, 1974. 296 с.
8. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. Москва: Наука, 1978. 320 с.

Надійшло до редакції 24.07.2018

REFERENCES

1. Abdullaev, A. P. & Burmistrova, A. B. (1996). On a scheme for investigating the solvability of resonance boundary-value problems. Izv. VUZ, Mathem., No. 11, pp. 14-22 (in Russian).
2. Backhouse, N. B. (2001). Resonant equations and special functions. J. Comput. Appl. Math., 133, No. 1-2, pp. 163-169.
3. Backhouse, N. B. (1986). The resonant Legendre equation. J. Math. Anal. Appl., 117, No. 2, pp. 310-317.

4. Makarov, V. L. (1976). On the difference schemes with exact and explicit spectrum: (Extended abstract of Doctor thesis). Taras Shevchenko State University, Kiev, Ukraine (in Russian).
5. Makarov, V. & Arazmyradov, T. (1978). The construction of particular solutions of resonance differential equations. Differents. uravneniya, 14, No. 7, pp. 1255-1261 (in Russian).
6. Makarov, V. L. (1997). FD-method: the exponential rate of convergence. Zhurn. obchysl. ta Prykl. Matem., No. 82, pp. 69-74 (in Ukrainian); (2001) J. Math. Sci., 104, No. 6, pp. 1648-1653.
7. Bateman, H. & Erdélyi, A. (1974). Higher trancendental functions. (Vol. 2). Moscow: Nauka (in Russian).
8. Nikiforov, A. F. & Uvarov, V. B. (1978). Special functions of the mathematical physics. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 24.07.2018

И.П. Гаврилюк [1], *В.Л. Макаров* [2]

[1] Дуальная высшая школа Гера-Айзенах, Германия
[2] Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: iwan.gawriljuk@dhge.de, makarov@imath.kiev.ua

РЕЗОНАНСНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

С использованием общей теоремы В.Л. Макарова о представлении частичных решений резонансных уравнений в банаховых пространствах (1974) построен и обоснован рекуррентный алгоритм нахождения частных решений резонансных уравнений первого и второго рода с общим дифференциальным оператором для классических ортогональных многочленов. Приведен пример общего решения резонансных уравнений с дифференциальным оператором для многочленов Лежандра.

Ключевые слова: *резонансное уравнение, гипергеометрическое уравнение, гипергеометрические функции, конфлюэнтные гипергеометрические функции, общее решение, классические ортогональные многочлены, функции второго рода.*

I.P. Gawriljuk [1], *V.L. Makarov* [2]

[1] Duale Hochschule Gera-Eisenach, Germany
[2] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: iwan.gawriljuk@dhge.de, makarov@imath.kiev.ua

RESONANT EQUATIONS AND CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Using the general theorem by V.L. Makarov on the representation of particular solutions of the resonant equation in Banach spaces (1974), the authors propose and justify an recurrent algorithm for particular solutions of the resonant equations of the first and second kinds with the general differential operator defining the classical orthogonal polynomials. An example of the general solution of the resonant equations with the differential Legendre operator is given.

Keywords: *resonant equation, hypergeometric equation, hypergeometric functions, confluent hypergeometric functions, general solution, classical orthogonal polynomials, functions of the second kind.*