

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.029>

УДК 539.3

**В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Є.Д. Бєлов**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: vfmeish@gmail.com

## **Динаміка конічних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях**

*Представлено членом-кореспондентом НАН України І.С. Чернишенком*

*Розглянуто динамічну поведінку ізотропних конічних оболонок еліптичного поперечного перерізу при розподілених навантаженнях. Наведено рівняння коливань конічної оболонки в неортогональній системі координат. Для розв'язку задачі побудовано чисельний алгоритм, який базується на скінченно-різницевій апроксимації вихідних рівнянь за просторовими та часовій координатами. Представлено чисельні результати для випадку динамічної поведінки зрізаної конічної оболонки еліптичного перерізу при розподіленому імпульсному навантаженні.*

**Ключові слова:** конічна оболонка, еліптичний переріз, теорія оболонок Тимошенка, вимушені коливання, чисельний розв'язок.

Задачам динамічної поведінки оболонкових конструкцій при різних видах навантаження присвячена значна кількість публікацій (статті, оглядові роботи, монографії). Серед них слід відзначити монографії [1, 2, 5]. Виходячи із наведених робіт видно, що практично всі динамічні задачі розв'язувалися для оболонок канонічної форми (циліндричні, сферичні, конічні та інші оболонки) в ортогональній криволінійній системі координат. Для оболонок неканонічного вигляду, в основному, розглянуто статичні задачі. Практично відсутні роботи з дослідження динамічної поведінки оболонок неканонічного вигляду в неортогональній системі координат, зокрема, при імпульсних навантаженнях.

В даній роботі розглядається задача динамічної поведінки зрізаної конічної оболонки еліптичного перерізу при дії на неї імпульсного навантаження. Наводяться рівняння коливань конічної оболонки в неортогональній системі координат.

**Постановка задачі.** Розглядається задача про нестационарне деформування зрізаної конічної оболонки еліптичного перерізу при розподіленому внутрішньому імпульсному навантаженні. Рівняння середньої поверхні оболонки в параметричному вигляді задаються згідно з співвідношеннями:

$$X = k_1 x^1 \cos x^2, \quad Y = x^1 \sin x^2, \quad Z = k_2 x^1, \quad (1)$$

де  $X, Y, Z$  — декартова система координат;  $x^1, x^2$  — координати на серединній поверхні оболонки;  $k_1 = a/b$ ;  $k_2 = c/b$ . Схематично об'єкт представлено на рис. 1.

© В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Є.Д. Бєлов, 2018

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2018. № 1

29

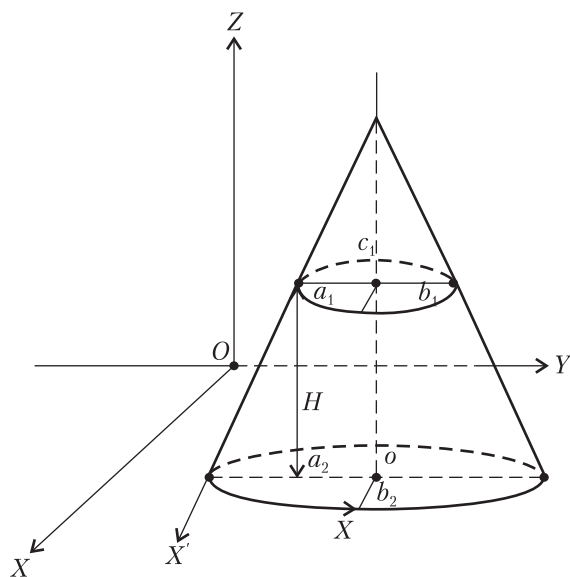


Рис. 1

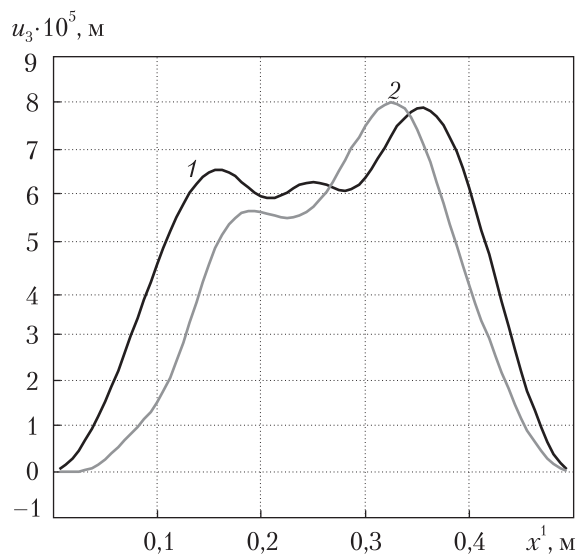


Рис. 2

Рівняння (1) визначають коефіцієнти першої та другої квадратичної форми серединної поверхні оболонки, що розглядається, за формулами

$$a_{ij} = \frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} + \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} + \frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j}, \quad (i, j = 1, 2);$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} - \frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} + \left( \frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} - \frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^i \partial x^j} + \left( \frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} - \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^i \partial x^j} \right]. \quad (2)$$

При цьому, згідно з (1), маємо

$$a_{11} = k_1^2 \cos^2 x^2 + \sin^2 x^2 + k_2^2; \quad a_{22} = (x^1)^2 (k_1^2 \sin^2 x^2 + \cos^2 x^2);$$

$$a_{12} = 0,5x^1(1 - k_1^2) \sin 2x^2; \quad b_{11} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = k_1 k_2 (x^1)^2 / \sqrt{g},$$

де  $g$  – фундаментальний визначник метричного тензора, який визначається так:

$$g = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Для опису динамічної поведінки конічних оболонок приймається лінійний варіант уточненої теорії тонких оболонок типу Тимошенка [1, 3, 5]. Закон розподілення переміщень по товщині оболонки приймається у вигляді

$$u_1^z = u_1(x^1, x^2, t) + z\varphi_1(x^1, x^2, t),$$

$$u_2^z = u_2(x^1, x^2, t) + z\varphi_2(x^1, x^2, t), \quad (3)$$

$$u_3^z = u_3(x^1, x^2, t);$$

$$u^{1z} = u^1(x^1, x^2, t) + z\varphi^1(x^1, x^2, t), u^{2z} = u^2(x^1, x^2, t) + z\varphi^2(x^1, x^2, t). \quad (4)$$

У співвідношеннях (3) та (4) величини з нижніми індексами відповідають коваріантним компонентам узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки  $\bar{U}_1 = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$ , а величини з верхніми індексами – контрваріантним компонентам узагальненого вектора переміщень  $\bar{U}^1 = (u^1, u^2, u^3, \varphi^1, \varphi^2)$  [3].

Для виведення рівнянь коливань конічних оболонок застосовується варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta \Pi + \delta A) dt = 0, \quad (5)$$

де  $\Pi$  – потенціальна;  $K$  – кінетична енергії оболонки відповідно;  $A$  – робота зовнішніх сил.

Після стандартних перетворень у функціоналі (5) отримуємо наступні рівняння коливань вихідної конічної оболонки в загальному вигляді:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} &= \nabla_i T^{ij} - b_i^j T^{i3} + P^i \quad (i, j = 1, 2); \\ \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= \nabla_i T^{i3} + b_{ji} T^{ij} + P_3; \quad \rho I \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2} = \nabla_i M^{ij} - T^{i3} + m^i. \end{aligned} \quad (6)$$

У формулах (3) індексами 1 та 2 позначені змінні по координатах  $x^1, x^2$ :  $u^1, u^2, u_3, \varphi^1, \varphi^2$  – контрваріантні компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки;  $T^{ij}, T^{i3}, M^{ij}$  – контрваріантні компоненти тензорів зусиль та моментів;  $P^i, P_3, m^i$  – компоненти зусиль на поверхні оболонки;  $\nabla_i$  – контрваріантна похідна;  $\rho$  – густина матеріалу оболонки;  $h$  – товщина оболонки;  $I = h^3 / 12$ .

В розгорнутому вигляді, згідно з [4], рівняння коливань (3) в дивергентній формі записуються так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{12}) + \Gamma_{11}^1 T^{11} + 2\Gamma_{21}^1 T^{12} + \\ + \Gamma_{22}^1 T^{22} - b_1^1 T^{1n} - b_2^1 T^{2n} = \rho h \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{22}) + \Gamma_{11}^2 T^{11} + 2\Gamma_{12}^2 T^{12} + \\ + \Gamma_{22}^2 T^{22} - b_1^2 T^{13} - b_2^2 T^{22} + q^2 = \rho h \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{13}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{23}) + b_{11} T^{11} + b_{12} T^{12} + b_{21} T^{12} + b_{22} T^{22} + q^3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{12}) + \Gamma_{11}^1 M^{11} + 2\Gamma_{21}^1 M^{12} + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{22}) + \Gamma_{11}^2 M^{11} + 2\Gamma_{12}^2 M^{12} + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial t^2}.$$

У співвідношеннях (4) величини  $\Gamma_{ij}^k$  представляють собою коефіцієнти символів Крістоффеля другого роду [4].

**Чисельний алгоритм.** Для побудови чисельного алгоритму використовується інтегро-інтерполяційний підхід побудови скінченно-різницевої схем за просторовими координатами  $x^1, x^2$  та явною різницевою апроксимацією по часовій координаті  $t$  [1, 5]. Розглядається побудова різницевої рівнянь на прикладі першого рівняння системи (7). Інтегруємо перше рівняння цієї системи по області

$$\Omega_1 = \{x_{l-1/2}^1 \leq x^1 \leq x_{l+1/2}^1, x_{m-1/2}^2 \leq x^2 \leq x_{m+1/2}^2\} \text{ при } t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2},$$

$$\iiint_{\Omega_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{12}) + \Gamma_{11}^1 T^{11} + \right. \quad (8)$$

$$\left. + 2\Gamma_{21}^1 T^{12} + \Gamma_{22}^1 T^{22} - b_1^1 T^{13} - b_2^1 T^{23} + q^1 \right] d\Omega dt = \iiint_{\Omega_1} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} \right] d\Omega dt.$$

В цьому випадку різницевий аналог (8) має вигляд

$$\left( \frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[ (\sqrt{g} T^{11})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} T^{11})_{l-1/2,m}^n \right] +$$

$$+ \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^2} \left[ (\sqrt{g} T^{12})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} T^{12})_{l-1/2,m}^n \right] +$$

$$+ (\Gamma_{11}^1 T^{11})_{l,m}^n + 2(\Gamma_{21}^1 T^{12})_{l,m}^n + (\Gamma_{22}^1 T^{22})_{l,m}^n - (b_1^1 T^{13})_{l,m}^n - (b_2^1 T^{23})_{l,m}^n + q_{l,m}^1 = \rho h (u_{l,m}^1)_{\bar{t}t}. \quad (9)$$

**Чисельні результати.** Як чисельний приклад, розглядалася задача динамічної поведінки зрізаної конічної оболонки еліптичного перерізу при дії розподіленого імпульсного навантаження (рис.2). При розрахунках покладалося:  $k_1 = a_1 / b_1 = 1,2$ ;  $k_2 = c_1 / b_1 = 1,6$ . Криві 1 та 2 на рис. 2 відповідають залежностям прогину  $u_3$  від просторової координати  $x^1$  в перерізах  $x^2 = 0$  та  $x^2 = \pi/2$  в момент часу  $t = 3,5T$ .

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. Киев: Изд.-полиграф. центр «Киев. ун-т», 2012. 541 с.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек. Т.5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Киев: Наук. думка, 1982. 400 с.
3. Галимов К.З. (Ред.). Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 212 с.
4. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями в механике. Киев: Наук. думка, 1972. 148 с.
5. Навал Н.К., Пацюк В.М., Римский В.К. Нестационарные волны в деформируемых средах. Кишинев: Штиинца, 1986. 236 с.

Надійшло до редакції 27.06.2017

## REFERENCES

1. Golovko, K. G., Lugovoi, P. Z. & Meish, V. F. (2012). Dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loads. Kiev: Publ. Centre "Kyiv University" (in Russian).
2. Guz', A. N. & Kubenko, V. D. (1982). Shells calculation methods. V.5. Theory of non-stationary aerogydroelasticity of shells. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
3. Galimov, K.Z. (Ed.) (1977). The theory of shells with allowance for transverse shear. Kazan: Publ. House of Kazan. Univ. (in Russian).
4. Kilchevsky, N. A. (1972). Fundamentals of tensor calculus with applications in mechanics. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
5. Naval, N. K., Patsyuk, V. M. & Rimsky, V. K. (1986). Nonstationary waves in deformable media. Chisinau: Shtiintsa (in Russian).

Received 27.06.2017

*В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Е.Д. Белов*

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев  
E-mail: vfmeish@gmail.com

## ДИНАМИКА КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

Рассматривается задача динамического поведения усеченной конической оболочки эллиптического сечения при воздействии на нее импульсной нагрузки. Приведены уравнения колебаний конической оболочки в неортогональной системе координат. Для решения поставленной задачи построен численный алгоритм, который основан на конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений по пространственным и временным координатам. Приведены числовые результаты для случая динамического поведения усеченной конической оболочки эллиптического сечения при распределенной импульсной нагрузке.

**Ключевые слова:** коническая оболочка, эллиптическое сечение, теория оболочек Тимошенко, вынужденные колебания, численное решение.

*V.F. Meish, Yu.A. Meish, E.D. Belov*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: vfmeish@gmail.com

## DYNAMICS OF CONICAL SHELLS WITH ELLIPTIC CROSS-SECTION UNDER NONSTATIONARY LOADS

A solution of the problem on forced vibrations of a truncated conical shell with elliptic cross-section is considered in the case of nonstationary loading. The linear version of the equations of a Timoshenko-type shell theory in a non-orthogonal curvilinear coordinate system is obtained. A statement of the problem is given, and a numerical algorithm of its solving is elaborated. An example of the dynamical behavior of a conical shell is studied numerically.

**Keywords:** conical shell, elliptic cross-section, non-orthogonal curvilinear coordinate system, Timoshenko-type theory, forced vibrations, numerical solution.