doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.04.036
УДК 539.3

**В.С. Зеленский, В.А. Декрет**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: numer@inmech.kiev.ua

# Определение критических параметров в задаче устойчивости элементов конструкций из слоистого композитного материала

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В.М. Назаренко*

*С использованием трехмерных соотношений механики деформируемых тел исследуется пространственная задача устойчивости при неоднородном докритическом состоянии прямоугольной двухкомпонентной слоистой ортотропной пластины как элемента конструкции из композитного материала при различных значениях геометрического параметра, характеризующего размеры пластины. Решение рассматриваемой задачи осуществляется в точной постановке, когда математическими моделями задач определения напряженного состояния и критических параметров являются уравнения линейной теории упругости и трехмерной линеаризированной теории устойчивости. Для построения соответствующих дискретных задач используется сеточный подход с применением концепции базовых схем, а их решение осуществляется численными методами.*

***Ключевые слова:*** *неоднородное состояние, устойчивость, композитный материал, ортотропные слои, базовые схемы, численные методы.*

Создание элементов конструкций из композитных материалов предусматривает разработку практических алгоритмов исследования и расчета на прочность и деформативность с применением подхода, позволяющего учитывать их специфические свойства. Такой подход, использующий общие уравнения трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) и модели кусочно-однородной среды изложен в фундаментальной монографии [1], посвященной исследованию потери устойчивости волокнистых и слоистых композитных материалов. В рамках такого подхода в работах [2, 3] проведено исследование устойчивости композитного материала и элемента конструкции слоистой структуры при одноосном сжатии поверхносной нагрузкой армирующих слоев в случае неоднородного докритического состояния. В этих работах задача устойчивости рассматривалась в двумерной постановке для случая плоской деформации. В работе [4] с использованием указанного подхода исследована пространственная задача устойчивости прямоугольной пластины, представляющей элемент конструкции из слоистого двухкомпонентного композита с ортотропным и изотропным слоями. Отмеченный подход является наиболее строгим и точным и в отличие от приближенных подходов дает возможность получить результаты, соответствующие физике процессов, происходящих в материале с обычной в механике точностью, а также оценить результаты, полученные с применением приближенных теорий и расчетных схем, используемых при исследовании традиционных материалов. В продолжение работы [4] в настоящей статье рассмотрена пространственная задача устойчивости элементов конструкции из композитного материала, представляющие прямоугольные двухкомпонентные пластины с ортотропными слоями. Проведено сравнение полученных результатов с данными работы [4]. Исследованы элементы конструкции из сравнительно жесткого композитного материала и в связи с чем для решения задачи устойчивости применен второй вариант теории малых докритических деформаций [5]. С учетом сложности получения аналитических решений для решения задачи устойчивости использованы численные методы. Построение дискретных моделей соответствующих дифференциальных задач осуществлялось в соответствии с методикой, предложенной в работе [6].

**1. Постановка задачи**. Рассматривается устойчивость прямоугольной двухкомпонентной слоистой пластины, сжатой по жестко защемленным торцам $x_1 = 0, x_1 = l_1$ равномерной нагрузкой постоянной интенсивности **P** (рис.1).

Устойчивость исследуется для различных значений параметра $l_2$. Слои пластины являются трансверсально-изотропными, сохраняя при этом все специфические свойства ортотропного материала с малой сдвиговой жесткостью. Это позволяет уменьшить число параметров от которых зависит критическая нагрузка. В формулируемой постановке задачи устойчивости начальное состояние неоднородное, компоненты которого определяются из уравнений линейной теории упругости. Уравнения линейной теории упругости и граничные условия для каждого слоя расчетной области имеют вид:

$$\sigma^0_{ij,i} = 0,\ x \subset \Omega, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\sigma^0_{11} = P, u_2 = u_3 = 0 \text{ при } x_1 = 0, l_1 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2 \wedge 0 \leqslant x_3 \leqslant l_3, \\ &\sigma^0_{im} = 0 \text{ при } x_2 = 0, l_2 \wedge 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1 \wedge 0 \leqslant x_3 \leqslant l_3, \\ &\sigma^0_{im} = 0 \text{ при } x_3 = 0, l_3 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2 \wedge 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1 \end{aligned} \tag{2}$$

и контактными условиями

$$[u_m] = 0, [\sigma_{im}] = 0 \text{ при } x_2 = l_2^1 \wedge 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1 \wedge 0 \leqslant x_3 \leqslant l_3, \tag{3}$$

где [ ] — скачек функции $f(x)$. В пределах каждого слоя пластины соотношения закона Гука таковы:

$$\sigma^0_{ij} = \delta_{ij} A_{ik} u^0_{k,k} + (1 - \delta_{ij}) G_{ij} (u^0_{i,j} + u^0_{j,i}). \tag{4}$$

С учетом того, что ось изотропии $Ox_1$ и плоскость изотропии $x_2Ox_3$ имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &E_2 = E_3 = E;\ E_1 = E';\ G_{23} = E / 2(1+\nu);\ G_{21} = G_{31} = G;\ \nu_{23} = \nu_{32} = \nu; \\ &\nu_{21} = \nu_{31} = \nu';\ \nu_{13} = \nu_{12} = \nu'', \end{aligned} \tag{5}$$

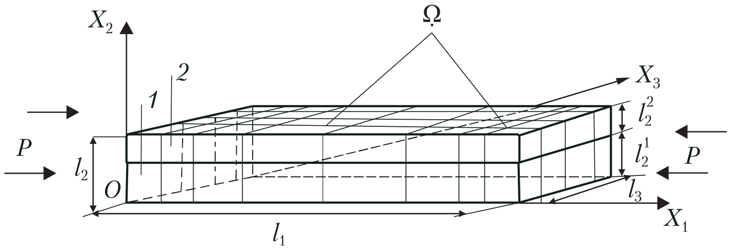


***Рис. 1.*** Геометрия расчетной области и условия нагружения

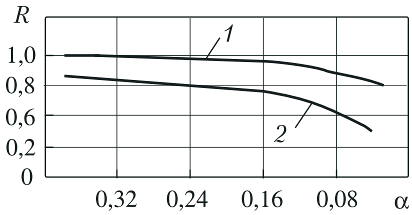


***Рис. 2.*** Зависимость отношения $R$ от параметров α

где $A_{ij}, G_{ij}, E, E'$ — коэффициенты упругости, модули сдвига и модули упругости трансверсально-изотропного тела. Уравнения и граничные условия трехмерной устойчивости для рассматриваемой расчетной схемы запишутся в следующем виде:

$$(\sigma_{im} + \lambda\sigma_{ik}^0 u_{m,k})_{,i} = 0, \quad x \subset \Omega; \tag{6}$$

$$(\sigma_{11} + \lambda\sigma_{1j}^0 u_{1,j}) = 0; \; u_2 = u_3 = 0; \; \text{при } x_1 = 0, l_1 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2 \wedge 0 \leqslant x_3 \leqslant l_3;$$

$$\sigma_{im} = 0 \text{ при } x_2 = 0, l_2 \wedge 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1 \wedge 0 \leqslant x_3 \leqslant l_3; \tag{7}$$

$\sigma_{im} = 0$ при $x_3 = 0, l_3 \wedge 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2 \wedge 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1$ и условиями на контакте слоев:

$$[u_m] = 0, [\sigma_{im}] = 0 \text{ при } x_2 = l_2^1 \wedge 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1 \wedge 0 \leqslant x_3 \leqslant l_3. \tag{8}$$

Выражения (6)—(8) представляют собой обобщенную задачу на собственные значения, в которой критические компоненты определяются нахождением минимального по модулю собственного числа. Критическая нагрузка определяется из выражения: $P_{\text{кр}} = \min|\lambda|\, P_{\text{н}}$, где $\min|\lambda|$ — собственное число задачи (6)—(8); $P_{\text{н}}$ — интенсивность начальной нагрузки, приложенной к торцам слоистой пластины. Для решения задач (1)—(3) и (6)—(8) применен вариационно-разностный подход с использованием концепции базовых схем [6]. Для расчетных схем этих задач вводится по каждому из направлений $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ неравномерная разностная сетка $\overline{\omega} = \omega + \gamma$, состоящая из множества внутренних $\omega$ и множества граничных $\gamma$ узлов. Сетка разбивает расчетную область на $M$ прямоугольных параллелепипедов и содержит $N$ узлов, в каждом из которых строится аппроксимация рассмотренных дифференциальных задач на сеточной области $\overline{\omega}$ (см. рис.1). Дискретные задачи, соответствующие дифференциальным задачам (1)—(3) и (6)—(8), запишутся в виде

$$Ay = F, x \in \overline{\omega}, \tag{9}$$

$$Ay = \mu By, x \in \overline{\omega}. \tag{10}$$

Решение задач (9) и (10) выполнено с применением численных методов (прямых и итерационных) [7].

**2.Числовые результаты**. В качестве результатов приведем решение задач (1)—(3) и (6)—(8) для рассматриваемой слоистой пластины со следующими механическими характеристиками слоев: для слоя 1 — $E_2 = E_3 = 52$ ГПа; $E_1 = 30$ ГПа; $G_{23} = 20$ ГПа; $G_{21} = G_{31} = 10$ ГПа; $\nu = 0{,}3$; $\nu' = 0{,}2$; $\nu'' = 0{,}1$, для слоя 2 — $E_2 = E_3 = 40$ ГПа; $E_1 = 20$ ГПа; $G_{23} = 10$ ГПа;

$G_{21} = G_{31} = 5$ ГПа; $\nu = 0,3$; $\nu' = 0,2$; $\nu'' = 0,1$. Критические нагрузки были получены для различных значений параметра тонкостенности $\alpha = \pi l_2 / 2l_1$, при фиксированных значениях параметров $l_1, l_3$, причем принималось $l_2^1 = l_2^2$ для всех значений $\alpha$. Полученные результаты сравнивались с результатами [4], в которой механические характеристики для трансверсально-изотропного слоя пластины соответствовали механическим характеристикам первого слоя, рассматриваемого в данной работе элемента, причем геометрические параметры пластин в обеих случаях совпадали. Результаты сравнения иллюстрирует рис.2, на котором представлена зависимость отношения критических нагрузок **R** от величины $\alpha$, где кривая *1* соответствует отношению $P_{\text{кр}}^1 / P_{\text{кр}}^2$, а кривая *2* — отношению $P_{\text{кр}}^1 / P_{\text{кр}}^3$. Здесь $P_{\text{кр}}^1$ — критические нагрузки, полученные при решении задачи устойчивости в рассматриваемом случае; $P_{\text{кр}}^2$, $P_{\text{кр}}^3$ — критические нагрузки, полученные при решении задачи устойчивости в [4], когда соответственно рассматривалась пластина с изотропным и трансверсально-изотропным слоями, и когда оба слоя были представлены изотропным материалом.

Как видно из рис. 2, ортотропия существенно влияет на полученные критические нагрузки в исследуемой задаче устойчивости, причем ее влияние в рассматриваемом интервале геометрических характеристик значительно возрастает с уменьшением параметра тонкостенности $\alpha$. Так, например, в диапазоне сравнительно незначительного изменения величины $\alpha = 0,16 \div 0,08$ отношение $P_{\text{кр}}^1 / P_{\text{кр}}^2$ изменяется на 11 %, а отношение $P_{\text{кр}}^1 / P_{\text{кр}}^3$ уменьшается более чем на 23 %.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. О построении теории устойчивости волокнистых и слоистых композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1973. 272 с.
2. Зеленский В.С., Декрет В. А., Быстров В. М. Устойчивость слоистого композитного материала при одноосном нагружении. *Зб. наук. праць Дніпродзерж. держ. техн. ун-ту*. 2012. Вип. 2(19). С. 49—53.
3. Декрет В.А. Зеленский В.С., Быстров В.М. Численное исследование устойчивости слоистого композита при одноосном сжатии слоев наполнителя. *Прикл. механика*. 2014. 50. № 5. С. 80—91.
4. Зеленский В.С., Быстров В. М, Декрет В. А. Пространственная задача устойчивости композитного материала с ортотропными слоями при одноосном сжатии. *Зб. наук. праць Дніпродзерж. держ. техн. ун-ту.* 2014. Вип. 1(24). С. 157—164.
5. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища шк., 1986. 512 с.
6. Статика материалов. т.3. Механика композитов. Киев: Наук. думка., 1993. 453 с.
7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П. Численные методы. Москва: Наука, 1987. 598 с.

Поступило в редакцию 10.11.2017

## REFERENCES

1. Guz, A. N. (1973). About the construction of theory of stability of fibrous and stratified composite materials. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
2. Zelensky, V. S., Dekret, V. A. & Bystrov, V. M. (2012). Stability of a composite laminate at a uniaxial loading. Collection of scientific works Dniprodzerzhynsk Tech. Univ. Iss. 2(19), pp. 49-53 (in Russian).
3. Dekret, V. A., Zelensky, V. S. & Bystrov, V. M. (2014). Numerical study of the stability of a laminated composite under uniaxial compression of layers of a filler. Int. Appl. Mech., 50, No. 5, pp. 549-557.
4. Zelensky, V. S., Bystrov, V. M. & Dekret, V. A (2014). Spatial problem of stability of a composite material with orthotropic layers under uniaxial compression. Collection of scientific works Dniprodzerzhynsk. Tech. Univ. Iss. 1(24), pp. 157-164 (in Russian).
5. Guz, A. N. (1986). Fundamentals of three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Kyiv: Vysha Shkola (in Russian).

6. Statics of Materials. Mechanics of composites (1993). Vol. 3. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
7. Bakhvalov, N. S. & Zhidkov, N. P. (1987). Numerical methods. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 10.11.2017

*В.С. Зеленський, В.А. Декрет*

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: numer@inmech.kiev.ua

ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ
В ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ
ІЗ ШАРУВАТОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ

Із використанням тривимірних співвідношень механіки деформованих тіл досліджується просторова задача стійкості прямокутної двокомпонентної шаруватої ортотропної пластини як елемента конструкції із композитного матеріалу при різних значеннях геометричного параметра, який характеризує розміри пластини. Розв'язок цієї задачі здійснюється в точній постановці, коли математичними моделями задач визначення напруженого стану та критичних параметрів є рівняння лінійної теорії пружності та тривимірної лінеаризованої теорії стійкості. Для побудови відповідних дискретних задач використано сітковий підхід із залученням концепції базових схем, а розв'язок цих задач здійснюється чисельними методами.

***Ключові слова:*** *неоднорідний стан, стійкість, ортотропні шари, композитний матеріал, базові схеми, чисельні методи.*

*V.S. Zelensky, V.A. Dekret*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: numer@inmech.kiev.ua

DETERMINATION OF CRITICAL PARAMETERS
IN THE PROBLEM OF STABILITY OF ELEMENTS
OF CONSTRUCTIONS FROM A COMPOSITE LAMINATE

With the use of three-dimensional relations of the mechanics of deformed bodies, the spatial problem of stability of a rectangular double-base stratified orthotropic plate in a heterogeneous subcritical state as an element of the construction made of a composite at the different values of a geometrical parameter characterizing the sizes of the plate is investigated. The solution of the problem comes true in the exact statement with the use of the equations of linear elasticity theory and the three-dimensional linearized theory of stability. For the construc are solved by numerical methods.

***Keywords:*** *heterogeneous state, stability, orthotropic layers, base charts, composite, numerical methods.*