ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.059
УДК 530.12

А.В. Бабич, В.Ф. Клепиков

Институт электрофизики и радиационных технологий НАН Украины, Харьков
E-mail: babichart@gmail.com

Двумерная теория поля и критические явления

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В.Ф. Клепиковым

Рассмотрена теория поля, применяемая для описания гравитации в двумерном пространстве. Показано, что при определенных условиях такая теория допускает скрытую симметрию, позволяющую сильно упростить и проинтегрировать соответствующие уравнения.

Ключевые слова: *теория поля, гравитация, критические явления.*

Одним из важных направлений современной теоретической физики является разработка двумерной теории поля. Это тесно связано с одной из важнейших нерешенных проблем современной физики — построением квантовой теории гравитации. Несмотря на усилия ведущих мировых физиков, окончательного решения данной проблемы так и не найдено. Однако в процессе решения этой проблемы наука обогатилась большим числом новых теорий (теория суперструн, М-теория и др.) Как известно, в пространстве двух измерений классическая эйнштейновская теория гравитации становится тривиальной. Это является следствием того, что, согласно теореме Гаусса—Боне в двумерном пространстве скалярная кривизна и, следовательно, действие Эйнштейна—Гильберта являются топологическими инвариантами. Существует ряд альтернативных теорий для описания двумерной гравитации. Одна из таких моделей — теория Лиувилля [1]. Важным свойством теории Лиувилля является ее конформная инвариантность. Конформно инвариантные модели играют крайне важную роль в современной теории поля и в последние десятилетия привлекают внимание многих исследователей. Особо важную роль комформно инвариантные модели играют в физике двумерных систем. Связано это с тем, что в двумерном пространстве конформная группа бесконечномерна. Соответствующая бесконечномерная алгебра — это алгебра Вирасоро. Следствием бесконечномерности двумерной конформной группы является точная решаемость многих двумерных моделей, описывающих различные критические явления (наиболее известные примеры: точное решение двумерных моделей Изинга, точно решаемые модели в двумерной квантовой теории поля [2], точные решения в двумерной гидродинамике [3, 4] и т.д.). Действие в теории Лиувилля имеет следующий вид:

$$S=\frac{1}{4\pi}\int d^2x\sqrt{g}\,(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+(b+b^{-1})R\phi+4\pi e^{2b\phi}). \qquad (1)$$

Центральный заряд алгебры Вирасоро, соответствующий этой модели, связан с b следующим выражением:

$$c = 1 + 6(b + 1/b)^2. \tag{2}$$

Уравнения движения для действия (1) выглядят следующим образом:

$$\Delta\phi(x) = \frac{1}{2}(b + b^{-1})R(x) + 4\pi b e^{2b\phi(x)}, \tag{3}$$

где $\Delta = g^{-1/2}\partial_\mu(g^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu)$.

В центрально симметричном случае уравнение (3) можно переписать в виде:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{2}(b + b^{-1})R(x) - 4\pi b e^{2b\phi(x)} = 0. \tag{4}$$

Таким образом вариационное уравнение для (1) в общем случае принимает вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + Ke^{y(x)} + F(x) = 0. \tag{5}$$

В следующих разделах будет рассмотрена групповая и лагранжева структура уравнений типа (5), построены некоторые типы точных решений.

Групповая структура и скрытая симметрия уравнений теории Лиувилля. Уравнения типа (5) возникают в различных областях физики. В частности, в теории сверхизлучения (обсуждение связи теории сверхизлучения с уравнениями (5), а также ссылки на оригинальные работы на эту тему можно найти в [5]). В статье [5] также приведены подробности нахождения групповой структуры уравнения (5). В данной статье для нас важным является следующий факт. В случае выполнения условия

$$F = 2\left(f^2 + \frac{df}{dx}\right) \tag{6}$$

уравнение (5) допускает группу с генератором:

$$\hat{X} = A(x)\frac{\partial}{\partial x} + B(x)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} &A(x) = C_1 e^{\int f(x)dx} + C_2 e^{\int f(x)dx}\int e^{-\int f(x)dx}dx, \\ &B(x) = -2C_1 f(x)e^{\int f(x)dx} - 2C_2(1 + f(x)e^{\int f(x)dx}\int e^{-\int f(x)dx}dx), \end{aligned} \tag{8}$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования.

Интересно отметить, что условие (6) по внешнему виду совпадает с одним из простейших суперсимметричных потенциалов — потенциалом Виттена [6].

Генераторы соответствующих подгрупп могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} &\hat{X}_1 = e^{\int f(x)dx}\frac{\partial}{\partial x} - 2f(x)e^{\int f(x)dx}\frac{\partial}{\partial y}, \\ &\hat{X}_2 = e^{\int f(x)dx}\int e^{-\int f(x)dx}dx\frac{\partial}{\partial x} - 2(1 + f(x)\cdot e^{\int f(x)dx}\int e^{-\int f(x)dx}dx)\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{9}$$

Используем подгруппу с генератором $\hat{X}_1$ для упрощения уравнения (5). Для этого перейдем к новым переменным z и t, где z-инвариант группы, т.е. $\hat{X}_1(z)=0$, а t определяется из условия $\hat{X}_1(t)=1$, также считаем переменную t функцией только от x. В явном виде эти условия выглядят следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&e^{\int f(x)dx}\frac{\partial z}{\partial x}+2f(x)e^{\int f(x)dx}\frac{\partial z}{\partial y}=0,\\
&e^{\int f(x)dx}\frac{\partial t}{\partial x}=1.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Решая (10), находим искомую замену переменных:

$$z(t)=y+2\int f(x)dx, \quad t=\int e^{-\int f(x)dz}dx. \tag{11}$$

Подставляя выражения (11) в уравнение (5) и упрощая полученные выражения, получаем уравнение в переменных t и z:

$$\frac{d^2z}{dt^2}+Ke^{Z}=0. \tag{12}$$

Для этого уравнения легко найти производящий функционал, то есть такой функционал для которого оно является вариационным уравнением Эйлера—Лагранжа:

$$L=\int\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)-Ke^{z}\right)dt \tag{13}$$

Генератор $\hat{X}_2$ в переменных z и t выглядит следующим образом:

$$\hat{X}_2=t\frac{\partial}{\partial t}-2\frac{\partial}{\partial z}. \tag{14}$$

Преобразования, соответствующие $\hat{X}_2$, в явном виде выглядят как:

$$t\to te^{a}, \quad z=z-2a. \tag{15}$$

Таким образом, благодаря скрытой симметрии (7), допускаемой уравнением (5) при выполнении условия (6), оказывается возможным значительно упростить рассматриваемое уравнение. При этом довольно сложные преобразования, которые в исходных переменных соответствуют генератору (11), в новых переменных соответствуют одновременному сдвигу функции и масштабному преобразованию аргумента (18). Преобразования же, соответствующие $\hat{X}_1$, в новых переменных переходят в трансляции по аргументу. Кроме того, как легко увидеть из выражения (13), они являются вариационными. Как известно, наличие в уравнении вариационной симметрии позволяет понизить его порядок сразу на 2. В нашем случае речь идет о полной интегрируемости уравнения (12). Решение уравнения (12) выглядит следующим образом:

$$z(t)=-\ln\left(2KC_1ch^2\left(\frac{t+C_2}{2C_1}\right)\right). \tag{16}$$

С помощью обратной замены переменных можно из выражения (13) найти производящий функционал для уравнения (5):

$$F=\int\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)+2\frac{dy}{dx}f(x)-Ke^{x}\right]e^{\int f(x)dx}. \qquad (17)$$

В принципе, используя замену переменных (14), можно было бы напрямую с помощью решения (16) находить классы точных решений уравнения (5). Однако эти решения слишком громоздки и малоинформативны. Поэтому имеет смысл выбирать конкретные выражения для *f(x)*, соответствующие различным выражениям для метрики пространства—времени и для них строить точные решения.

Таким образом, в пространстве произвольной размерности для описания критических явлений используют модели с лагранжаном типа:

$$F=\frac{1}{V}\int[(\nabla\phi)^2+\ldots+\beta\phi^{N+1}]d^dx\,, \qquad (18)$$

где ϕ — поле параметра порядка; d — размерность пространства. Как известно [7], для моделей типа (18) существуют две критические размерности: верхняя и нижняя. Нижняя размерность определяет саму возможность возникновения упорядоченных состояний. В пространстве же верхней размерности система обладает рядом важных свойств. А именно: модель является перенормируемой, система допускает вариационную масштабную симметрию, а соответствующие уравнения являются конформно инвариантными. Все эти свойства значительно облегчают анализ таких систем. Верхняя критическая размерность связана с параметрами модели таким соотношением:

$$N=\frac{d+2}{d-2}. \qquad (19)$$

Видно, что при $d=2$ N обращается в бесконечность. Аналогом модели (18) для двумерного пространства служит модель с лагранжианом:

$$F=\frac{1}{S}\int[(\nabla\phi)^2+\ldots+\beta e^{\phi}]d^2x\,. \qquad (20)$$

Именно такого типа модель была рассмотрена в данной статье. Группа симметрии (7) может рассматриваться как двумерный аналог соответствующих многомерных симметрий. Как было показано, она также позволяет значительно упростить модель и проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Nakayama, Yu. Liouville Field Theory — A decade after the revolution. *Int. J. Modern Phys.* 2004. A. **19**. Iss. 17—18. P. 2771—2930. doi: https://doi.org/10.1142/S0217751X04019500
2. Замолодчиков А.Б., Замолодчиков Ал.Б. Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах. Москва: МЦНМО. 2009. 168 с.
3. Бабич А.В., Клепиков В.Ф., Щелоковский П.А. Скрытая симметрия уравнений газовой динамики и «мелкой воды». *Вестн. ХНУ. Сер. Ядра, частицы, поля.* 2001. В.4(16), № 541. С. 68—72.
4. Бабич А.В. Скрытая симметрия уравнений магнитной гидродинамики и инвариантные решения. *Допов. Нац. акад. наук України.* 2014. № 2. С. 78—83.
5. Бабич А.В., Березовский С.В., Клепиков В.Ф. Динамический дальний порядок и коллективное спонтанное излучение. *Вопросы атомной науки и техники.* 2005. № 5. С. 63—65.

6. Witten E. Dynamical Breaking of Supersymmetry. *Nucl. Phys. B188*. 1981. P. 513—554. doi: https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90006-7
7. Babich A.V., Kitcenko L.N., Klepikov V.F. Critical dimensions of systems with joint multicritical and Lifshitz-point-like behavior. *Modern Phys. Lett. B*. 2011. **25**. № 22. P. 1839—1845.

Поступило в редакцию 22.02.2018

REFERENCES

1. Nakayama, Yu. (2004). Liouville Field Theory — A decade after the revolution. Int. J. Modern Phys. A. 19, Iss. 17—18, pp. 2771-2930. doi: https://doi.org/10.1142/S0217751X04019500
2. Zamolodchikov, A. B. & Zamolodchikov, Al. B. (2009). Conformal Field Theory and Critical Phenomena in Two Dimensional Systems. Moskow: MCCME (in Russian).
3. Babich, A. V., Klepikov, V. F. & Shelokovsky, P. A. (2001). The hidden symmetry of the equations of gas dynamics and "shallow water". Reportd of KhNU, No. 541, pp. 68-72 (in Russian).
4. Babich, A. V. (2014). The hidden symmetry of the equations of magnetohydrodynamics and invariant solutions. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 2, pp. 78-83 (in Russian).
5. Babich, A. V., Berezovsky, S. V. & Klepikov, V. F. (2005). Dynamic long-range order and collective spontaneous radiation. Problems of Atomic Science and Technology, No. 5, pp. 63-65 (in Russian).
6. Witten, E. (1981). Dynamical Breaking of Supersymmetry. Nucl. Phys. B188, pp. 513-554. doi: https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90006-7
7. Babich, A. V., Kitcenko, L. N. & Klepikov, V. F. (2011). Critical dimensions of systems with joint multicritical and Lifshitz-point-like behavior. Modern Phys. Lett. B, 25, No. 22, pp. 1839-1845.

Received 22.02.2018

А.В. Бабіч, В.Ф. Клепіков

Інститут електрофізики і радіаційних технологій НАН України, Харків
E-mail: babichart@gmail.com

ДВОВИМІРНА ТЕОРІЯ ПОЛЯ І КРИТИЧНІ ЯВИЩА

Розглянуто теорію поля, яку використовують для опису гравітації у двовимірному просторі. Показано, що за деяких умов така теорія допускає приховану симетрію. Наявність такої симетрії дозволяє значно спростити відповідні рівняння та в деяких випадках побудувати точні розв'язки.

Ключові слова: *теорія поля, гравітація, критичні явища.*

A.V. Babich, V.F. Klepikov

Institute of Electrophysics and Radiation Technologies of the NAS of Ukraine, Kharkiv
E-mail: babichart@gmail.com

TWO-DIMENSIONAL FIELD THEORY AND CRITICAL PHENOMENA

A theory that allows one to describe the two-dimensional gravity is considered. Conditions, under which the theory has a hidden group of symmetry, are found. This group of symmetry allow one to simplify the corresponding equations and, under some conditions, to find the exact solutions.

Keywords: *field theory, gravity, critical phenomena.*