ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.033
УДК 539.3

Д.М. Лила

Черкасский национальный университет им. Богдана Хмельницкого
E-mail: dim_l@ukr.net

Второе приближение по малому параметру к решению задачи о потере устойчивости вращающегося диска в уточненной постановке

Представлено академиком НАН Украины А.А. Мартынюком

При исследовании возможной потери устойчивости быстровращающегося сплошного кругового тонкого диска характеристическое уравнение получено во втором приближении по малому параметру на основе условия текучести Сен-Венана. Найдена критическая угловая скорость вращения.

Ключевые слова: *упругопластическая задача, метод возмущения формы границы, вращающийся диск, потеря устойчивости, критическая угловая скорость.*

Необходимость уточненной постановки задачи о потере устойчивости вращающихся дисков в рамках применения приближенного аналитического метода малого параметра [1–4] обсуждалась ранее в статье [5] со ссылкой на работу [6]. Суть этой постановки состоит в развитии метода сходящихся последовательных приближений, исходя из первого приближения в виде простейшей самоуравновешенной формы потери устойчивости [7] и учета исключительно возмущений, порождающих некруговую равновесную форму диска. Цель настоящей работы – получение второго приближения по малому параметру для характеристического уравнения, критического радиуса пластической зоны и критической угловой скорости [8–10].

Постановка задачи. Рассматривается вращающийся однородный и изотропный сплошной круговой тонкий диск постоянной толщины [5]. Предел текучести материала диска σ_s, модуль упругости E, плотность γ, коэффициент Пуассона ν, а также постоянная угловая скорость вращения ω известны. Срединная плоскость диска принята за плоскость $r\theta$ радиальной и угловой координат. Поле невозмущенных напряжений (обобщенное плоское напряженное состояние применительно к тонким пластинам [10]) определяется из обыкновенного дифференциального уравнения квазистатического равновесия, учитывающего объемные радиальные нагрузки, а также уравнений связи в упругой зоне и условия текучести $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$ в пластической зоне.

Возмущенное состояние упругой области диска

$$\sigma_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \sigma_{\lambda i},$$

$$u_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i u_{\lambda i}$$

находится с учетом того, что линеаризованные по малому параметру δ возмущения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия плоской задачи (без учета вращения) и уравнениям связи между напряжениями и перемещениями в частных производных. Предмет исследования составляет критическая угловая скорость вращения диска $\omega = \omega_*$, теряющего устойчивость, когда уравнение внешней его границы принимает вид [1, 2, 5, 6]

$$\rho = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \rho_i(\theta), \tag{1}$$

где $\rho = r/r_0$ — безразмерный текущий радиус, $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = \cos 2\theta$, $\rho_2 = -(1/4)\cos 4\theta$, $\ldots$. Для определения значения ω_* требуется получить во втором приближении по малому параметру характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны $\rho = \beta_{0*}$, установив условие существования решений системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&R_2 - 2T_1\dot\rho_1 + (\Theta_0 - R_0)\dot\rho_1^2 + R_1'\rho_1 + R_0'\rho_2 + \frac{1}{2}R_0''\rho_1^2 = 0, && \rho = 1,\\
&T_2 - (\Theta_1 - R_1)\dot\rho_1 + (\Theta_0 - R_0)(\rho_1\dot\rho_1 - \dot\rho_2) + \{T_1 - (\Theta_0 - R_0)\dot\rho_1\}'\rho_1 = 0, && \rho = 1,\\
&\left[R_2 + R_1'\rho_{1*} + R_0'\rho_{2*} + \frac{1}{2}R_0''\rho_{1*}^2\right] = 0, && \rho = \beta_0,\\
&\left[T_2 + T_1'\rho_{1*} + T_0'\rho_{2*} + \frac{1}{2}T_0''\rho_{1*}^2\right] = 0, && \rho = \beta_0,
\end{aligned} \tag{2}$$

в которой $R := \sigma_{rr}$, $\Theta := \sigma_{\theta\theta}$, $T := \tau_{r\theta}$, штрихом обозначена производная по ρ; точкой — производная по θ; квадратными скобками — скачек функции в точке, а ρ_{1*}, ρ_{2*} — отнесенные к r_0 возмущения радиального смещения соответствующего порядка на упругопластической границе.

Вспомогательные результаты. Учитывая (1), (2), первое приближение линеаризованных по δ граничных условий и условий сопряжения [1, 2, 6], вид невозмущенного состояния вращающегося диска [7], а также общий вид возмущений напряжений упругой области [5–9]

$$\begin{aligned}
&R_1 = (2A_1 + 2B_1\rho^{-4} + 4D_1\rho^{-2})\cos 2\theta,\\
&\Theta_1 = (-2A_1 - 2B_1\rho^{-4} - 4C_1\rho^2)\cos 2\theta,\\
&T_1 = (-2A_1 + 2B_1\rho^{-4} - 2C_1\rho^2 + 2D_1\rho^{-2})\sin 2\theta
\end{aligned} \tag{3}$$

(напряжения отнесены к σ_s), приведем выражения для некоторых необходимых в дальнейшем величин:

$$
\begin{aligned}
&a_1 := R_0'(1) = (2(3\nu+1)\beta_0^4 - 6(\nu+3))z^{-1},\\
&a_2 := \Theta_0(1) - R_0(1) = (2(3\nu+1)\beta_0^4 + 6(1-\nu))z^{-1},\\
&a_3 := \Theta_0'(\beta_0+) = -8(3\nu+1)\beta_0 z^{-1},\\
&a_4 := R_0''(1) = (-6(3\nu+1)\beta_0^4 - 6(\nu+3))z^{-1},\\
&a_5 := \Theta_0'(1) - R_0'(1) = (-4(3\nu+1)\beta_0^4 + 12(1-\nu))z^{-1},\\
&a_6 := R_0''(\beta_0+) - R_0''(\beta_0-) = -8(3\nu+1)z^{-1},\\
&A_1 = \{a_1(2\beta_0^2 - \beta_0^{-4} - 1) - a_2(4\beta_0^2 - 4)\}(2N)^{-1},\\
&B_1 = \{a_1(2\beta_0^2 + \beta_0^4 - 3) - a_2(-4\beta_0^2 + 4\beta_0^4)\}(2N)^{-1},\\
&C_1 = \{a_1(2\beta_0^{-2} + \beta_0^{-4} - 3) - 2a_2(4\beta_0^{-2} - \beta_0^{-4} - 3)\}(2N)^{-1},\\
&D_1 = \{a_1(2\beta_0^{-2} - \beta_0^4 - 1) - 2a_2(-\beta_0^4 + 1)\}(2N)^{-1},\\
&\rho_{1*} = U_1 \cos 2\theta,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&z = 3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2,\\
&N = 6 - 4(\beta_0^2 + \beta_0^{-2}) + (\beta_0^4 + \beta_0^{-4}),\\
&U_1 = -\frac{(1+\beta_0^2)\{3(\nu+3) - (3\nu+1)\beta_0^4\} + 2\beta_0^2\{3(1-\nu) + (3\nu+1)\beta_0^4\}}{(3\nu+1)(1-\beta_0^2)^2\beta_0}.
\end{aligned}
$$

Характеристическое уравнение. С учетом разложения (1), общего вида возмущенного напряженного состояния при самоуравновешенной форме потери устойчивости [7], а также принципа наложения полагаем

$$
\begin{aligned}
&R_2 = G_2 - H_2\rho^{-2} + (4A_2\rho^2 + 4B_2\rho^{-6} + 2C_2\rho^4 + 6D_2\rho^{-4})\cos 4\theta,\\
&\Theta_2 = G_2 + H_2\rho^{-2} + (-4A_2\rho^2 - 4B_2\rho^{-6} - 6C_2\rho^4 - 2D_2\rho^{-4})\cos 4\theta,\\
&T_2 = (-4A_2\rho^2 + 4B_2\rho^{-6} - 4C_2\rho^4 + 4D_2\rho^{-4})\sin 4\theta.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Поскольку $T_0 = 0$, $R_1(\beta_0-) = R_2(\beta_0-) = 0$, $T_1(\beta_0-) = T_2(\beta_0-) = 0$ [5, 6], из соотношений (1), (2), (4), (5) получаем систему уравнений

$$Sx = g, \tag{6}$$

в которой

$$
S = \begin{pmatrix}
4 & 4 & 2 & 6 & -1 & 1\\
8 & 8 & 4 & 12 & 0 & 0\\
-4 & 4 & -4 & 4 & 0 & 0\\
8\beta_0^2 & 8\beta_0^{-6} & 4\beta_0^4 & 12\beta_0^{-4} & 0 & 0\\
4\beta_0^2 & 4\beta_0^{-6} & 2\beta_0^4 & 6\beta_0^{-4} & -1 & \beta_0^{-2}\\
-4\beta_0^2 & 4\beta_0^{-6} & -4\beta_0^4 & 4\beta_0^{-4} & 0 & 0
\end{pmatrix}, \quad
x = \begin{pmatrix} A_2\\ B_2\\ C_2\\ D_2\\ G_2\\ H_2 \end{pmatrix},
$$

$$g=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}a_1-4a_2\\ \frac{1}{2}a_1-4a_2-\frac{1}{2}a_4+8B_1+8D_1\\ 2a_2-a_5+4A_1+8B_1+6C_1+6D_1\\ -\frac{1}{2}a_6U_1^2+(8B_1\beta_0^{-5}+8D_1\beta_0^{-3})U_1\\ 0\\ (4B_1\beta_0^{-5}+2C_1\beta_0+2D_1\beta_0^{-3})U_1\end{pmatrix}.$$

Система (6) эквивалента системе

$$Tx=h, \tag{7}$$

где

$$T=\begin{pmatrix}4 & 4 & 2 & 6 & -1 & 1\\ 4(\beta_0^2-\beta_0^{-2}) & 4(\beta_0^{-6}-\beta_0^{-2}) & 2(\beta_0^4-\beta_0^{-2}) & 6(\beta_0^{-4}-\beta_0^{-2}) & \beta_0^{-2}-1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1,25 & -0,25 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{-0,25\beta_0^{-4}-\beta_0^2+1,25\beta_0^4}{\beta_0^{-6}-0,75\beta_0^{-4}-0,25\beta_0^4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$h=\begin{pmatrix}g_1\\ -\beta_0^{-2}g_1\\ 0,25g_3\\ 0,0625(g_2-3g_3)\\ 0,0625\{(\beta_0^4-\beta_0^{-4})g_2-(3\beta_0^4+\beta_0^{-4})g_3+4g_6\}\{\beta_0^{-6}-0,75\beta_0^{-4}-0,25\beta_0^4\}^{-1}\\ 0,0625\{(-\beta_0^{-10}-3\beta_0^{-2}+4)g_2+(\beta_0^{-10}-1,5\beta_0^{-8}+9\beta_0^{-2}-8,5)g_3+4(\beta_0^{-6}-0,75\beta_0^{-4}-0,25\beta_0^4)\times\\ \times g_4-4(2\beta_0^{-6}-2,25\beta_0^{-4}+0,25\beta_0^4)g_6\}\{-0,25\beta_0^{-10}+4\beta_0^{-4}-7,5\beta_0^{-2}+4-0,25\beta_0^6\}^{-1}\end{pmatrix}.$$

Решение системы (7) имеет вид

$$\begin{aligned}&A_2=h_6,\\ &B_2=h_5-t_{51}A_2,\\ &C_2=h_4-t_{41}A_2-t_{42}B_2,\\ &D_2=h_3-t_{31}A_2-t_{32}B_2-t_{33}C_2,\\ &G_2=(h_2-t_{21}A_2-t_{22}B_2-t_{23}C_2-t_{24}D_2)(\beta_0^{-2}-1)^{-1},\\ &H_2=h_1-t_{11}A_2-t_{12}B_2-t_{13}C_2-t_{14}D_2-t_{15}G_2.\end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку возмущение радиального смещения имеет вид

$$u_2 = u_{21} + u_{22},$$

где

$$u_{21} = \frac{\sigma_s}{E}((1-\nu)G_2\rho + (1+\nu)H_2\rho^{-1}),$$

$$u_{22} = \frac{\sigma_s}{E}\left(\frac{4(\nu+1)}{3}A_2\rho^3 - \frac{4(\nu+1)}{5}B_2\rho^{-5} + \frac{2(3\nu+1)}{5}C_2\rho^5 - \frac{2(\nu+3)}{3}D_2\rho^{-3}\right)\cos 4\theta,$$

в соответствии с ρ_2 (см. (1)) искомое характеристическое уравнение получаем таким:

$$\frac{\sigma_s}{E}\left(\frac{4(\nu+1)}{3}A_2 - \frac{4(\nu+1)}{5}B_2 + \frac{2(3\nu+1)}{5}C_2 - \frac{2(\nu+3)}{3}D_2\right) + \frac{1}{4} = 0. \quad (9)$$

Его корню β_{0*} соответствует критическая относительная угловая скорость [2, 7]

$$\frac{\omega_*}{q} = 2\sqrt{\frac{6}{z(\beta_{0*})}}, \quad q = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\gamma}}.$$

Используя в дополнение к (2) условие сопряжения решений для Θ в виде

$$\left[\Theta_2 + \Theta_1'\rho_{1*} + \Theta_0'\rho_{2*} + \frac{1}{2}\Theta_0''\rho_{1*}^2\right] = 0, \quad \rho = \beta_0,$$

и учитывая, что $\Theta_1(\beta_0 -) = \Theta_2(\beta_0 -) = 0$, на основе (3)–(5) и (8) получаем выражение для радиального смещения второго порядка малости на упругопластической границе:

$$\rho_{2*} = U_{21} + U_{22}\cos 4\theta,$$

где

$$U_{21} = -\{G_2 + H_2\beta_0^{-2} + (4B_1\beta_0^{-5} - 4C_1\beta_0)U_1\}a_3^{-1},$$

$$U_{22} = -\{-4A_2\beta_0^2 - 4B_2\beta_0^{-6} - 6C_2\beta_0^4 - 2D_2\beta_0^{-4} + (4B_1\beta_0^{-5} - 4C_1\beta_0)U_1\}a_3^{-1}.$$

Численные примеры и обсуждение результатов. В таблице приведены результаты решения данной задачи в предложенной постановке для различных значений ν и $\sigma_s/E = 0{,}01$ (ср. с [1, 2, 7, 8]).

ν	0,2	0,3	0,4	0,5
β_{0*}	0,3511	0,3684	0,3834	0,3967
ω_*/q	1,6125	1,5962	1,5810	1,5669

Разрешимость характеристического уравнения второго приближения (9) свидетельствует о появившейся возможности развития метода последовательных приближений к значению критической скорости вращения диска (ср. с [5]), а полученные значения β_{0*} и ω_*/q позволяют предположить сходимость метода с учетом дальнейшего рассмотрения высших приближений.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
2. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред: В 2 т. Т. 2: Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. Москва: Физматлит, 2002. 448 с.
3. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
4. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. Киев: Вища шк., 1989. 352 с.
5. Лила Д.М. Второе приближение по малому параметру к решению задачи об упругопластической неустойчивости вращающегося диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 5. С. 36–43. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.05.036
6. Лила Д.М. К методу возмущений в задаче об упругопластической неустойчивости вращающегося диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 9. С. 48–54. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.048
7. Лила Д.М., Мартынюк А.А. О потере устойчивости вращающегося упруго-пластического кругового диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2011. № 1. С. 44–51.
8. Лила Д.М. Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упруго-пластического диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2011. № 2. С. 49–53.
9. Lila D.M., Martynyuk A.A. Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk. *Int. Appl. Mech.* 2012. **48**, № 2. P. 224–233.
10. Лила Д.М. Упругопластическая неустойчивость вращающегося тонкого диска. *Прикл. проблеми мех. і мат.* 2016. № 14. С. 92–98.

Поступило в редакцию 29.11.2017

REFERENCES

1. Ivlev, D. D. & Ershov, L. V. (1978). Perturbation Method in the Theory of Elastoplastic Bodies. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Ivlev, D. D. (2002). Mechanics of Plastic Media, Vol. 2: General Problems. Rigid-Plastic and Elastoplastic State of Bodies. Hardening. Deformation Theories. Complex Media. Moscow: Fizmatlit (in Russian).
3. Ishlinskii, A. Yu. & Ivlev, D. D. (2001). Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit (in Russian).
4. Guz', A. N. & Nemish, Yu. N. (1989). Method of Perturbation of the Shape of the Boundary in Continuum Mechanics. Kyiv: Vyshcha Shkola (in Russian).
5. Lila, D. M. (2018). The second approximation in the small parameter to the solution of the problem of the elastoplastic instability of a rotating disk. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 5, pp. 36-43(in Russian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.05.036
6. Lila, D. M. (2017). On the method of perturbations in the problem of elastoplastic instability of a rotating disk. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 9, pp. 48-54 (in Russian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.048
7. Lila, D. M. & Martynyuk, A. A. (2011). About the stability loss of a rotating elastoplastic circular disc. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 1, pp. 44-51 (in Russian).
8. Lila, D. M. (2011). Eccentric form of stability loss of a rotating elastoplastic disk. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 2, pp. 49-53 (in Russian).
9. Lila, D. M. & Martynyuk, A. A. (2012). Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk. Int. Appl. Mech., 48, No. 2, pp. 224-233.
10. Lila, D. M. (2016). Elastoplastic instability of thin rotating disk. Appl. Probl. Mech. and Math., No. 14, pp. 92-98 (in Russian).

Received 29.11.2017

Д.М. Лила

Черкаський національний університет ім. Богдана Хмельницького
E-mail: dim_l@ukr.net

ДРУГЕ НАБЛИЖЕННЯ ЗА МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ
ПРО ВТРАТУ СТІЙКОСТІ ДИСКА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ, В УТОЧНЕНІЙ ПОСТАНОВЦІ

При дослідженні можливої втрати стійкості суцільного кругового тонкого диска, що обертається, характеристичне рівняння одержано як друге наближення за малим параметром на основі умови текучості Сен-Венана. Знайдено критичну кутову швидкість обертання.

Ключові слова: *пружно-пластична задача, метод збурення форми межі, диск, що обертається, втрата стійкості, критична кутова швидкість.*

D.M. Lila

Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy
E-mail: dim_l@ukr.net

THE SECOND APPROXIMATION IN A SMALL PARAMETER TO THE SOLUTION
OF THE PROBLEM OF LOSS OF THE STABILITY OF A ROTATING DISK
IN THE REFINED FORMULATION

We have proposed a way of the investigation of the possible loss of stability by a rotating thin circular disk by the method of small parameter. We have obtained a characteristic equation for the critical radius of plastic zone in the second approximation in a small parameter on the basis of Saint-Venant's yield condition. We also have found the critical angular rotational velocity.

Keywords: *elastoplastic problem, boundary shape perturbation method, rotating disc, stability loss, critical angular velocity.*