ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.08.018
УДК 517.988

В.В. Семёнов

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
E-mail: semenov.volodya@gmail.com

Новый модифицированный экстраградиентный метод с расхождением Брэгмана

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины С.И. Ляшко

Предложен новый метод экстраградиентного типа для решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве. Данный метод является модификацией субградиентного экстраградиентного алгоритма с использованием расхождения Брэгмана вместо евклидового расстояния. Доказана теорема сходимости метода и для случая монотонного оператора получены неасимптотические оценки эффективности метода.

Ключевые слова: *вариационное неравенство, псевдомонотонность, монотонность, условие Липшица, экстраградиентный метод, расхождение Брэгмана, сходимость.*

Множество интересных и актуальных задач исследования операций и математической физики могут быть записаны в форме вариационных неравенств. Особенно популярны сейчас вариационные неравенства в математической экономике, математическом моделировании транспортных потоков и теории игр. Наиболее известным обобщением метода проекции градиента для вариационных неравенств является экстраградиентный метод Г.М. Корпелевич [1]. Исследованию этого алгоритма посвящено большое количество публикаций. В частности, предлагались модификации алгоритма Г.М. Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество [2—7]. Для вариационных неравенств одним из современных вариантов экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод А.С. Немировского [8]. Подобные методы подробно исследовали A. Auslender и M. Teboulle [9].

Настоящее сообщение посвящено изучению нового метода экстраградиентного типа для приближенного решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве. Данный метод является модификацией субградиентного экстраградиентного алгоритма [3, 4] с использованием расхождения Брэгмана [10] вместо евклидового расстояния. К предлагаемой схеме можно прийти и путем замены допустимого множества на специальные опорные для него полупространства во втором этапе проксимального зеркального метода А.С. Немировского [8]. Как и другие схемы использующие расхождение Брэгмана, предложенный метод иногда позволяет эффективно учесть структуру допустимого множества задачи. Например, для симплекса в качестве расстояния можно взять расхождение Кульбака—Лейблера (расхождение Брэгмана, построенное по отрицательной энтропии) и получить явно вычисляемый оператор проектирования на симплекс. Доказана теорема сходимости метода. А для случая монотонного оператора и компактного допустимого множества получены $O\left(\frac{1}{N}\right)$ неасимптотические оценки эффективности метода.

Модифицированный экстраградиентный метод с расхождением Брэгмана. Всюду далее работаем в конечномерном действительном линейном пространстве, обозначаемом буквой E. Это пространство снабдим нормой $\|\cdot\|$ (не обязательно евклидовой). Двойственное пространство обозначим E^*. Для $a\in E^*$ и $b\in E$ будем обозначать через (a,b) значение линейной функции a в точке b. Двойственную норму на E^* обозначим $\|\cdot\|_*$.

Пусть C — непустое подмножество пространства E; A — оператор, действующий из E в E^*. Рассмотрим вариационное неравенство:

$$\text{найти } x\in C: \quad (Ax, y-x)\geqslant 0 \quad \forall y\in C, \tag{1}$$

множество решений которого обозначим S.

Предположим, что выполнены следующие условия:

множество $C\subseteq E$ — выпуклое и замкнутое;

оператор $A: E\to E^*$ — псевдомонотонный и липшицевый с константой $L>0$;

множество S не пусто.

Заметим, что при данных условиях множество S выпуклое и замкнутое.

Введем необходимые для формулировки алгоритма конструкции. Пусть функция $\varphi: E\to\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ удовлетворяет условия:

$\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi\subseteq E$ непустое выпуклое множество;

φ непрерывно дифференцируема на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$;

если $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi\ni x_n\to x\in \operatorname{bd}\operatorname{dom}\varphi$, то $\|\nabla\varphi(x_n)\|_*\to+\infty$;

φ сильно выпукла относительно нормы $\|\cdot\|$ с константой сильной выпуклости $\sigma>0$:

$$\varphi(a)\geqslant\varphi(b)-(\nabla\varphi(b), a-b)+\tfrac{\sigma}{2}\|a-b\|^2 \quad \forall a\in\operatorname{dom}\varphi,\ b\in\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Соответствующие функции φ расхождение Брэгмана задается формулой [10]

$$V(a,b)=\varphi(a)-\varphi(b)-(\nabla\varphi(b), a-b) \quad \forall a\in\operatorname{dom}\varphi,\ b\in\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

***Замечание* 1.** Иногда расхождение Брэгмана называют расстоянием, но это не более чем жаргон: из аксиом метрики для V в общем случае выполняется только $V(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

Имеет место полезное трехточечное тождество

$$V(a,c)=V(a,b)+V(b,c)+(\nabla\varphi(b)-\nabla\varphi(c), a-b).$$

Из сильной выпуклости функции φ следует оценка

$$V(a,b)\geqslant\frac{\sigma}{2}\|a-b\|^2 \quad \forall a\in\operatorname{dom}\varphi,\ b\in\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Пусть $K \subseteq \operatorname{dom} \varphi$ непустое замкнутое выпуклое множество, причем $K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi \neq \varnothing$. Рассмотрим сильно выпуклые задачи минимизации вида

$$P_x^K(a) = \arg\min_{y \in K} \{-(a, y - x) + V(y, x)\}, \quad \forall a \in E^*, \ x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi. \qquad (2)$$

Известно [8], что задача (2) имеет единственное решение $z \in K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$, причем

$$-(a, y - z) + (\nabla\varphi(z) - \nabla\varphi(x), y - z) \geqslant 0 \quad \forall y \in K.$$

Точка $P_x^K(a)$ в евклидовом случае совпадает с евклидовой метрической проекцией

$$P_K(x + a) = \arg\min_{y \in K} \|y - (x + a)\|_2.$$

Для случая полупространства $H_{\leqslant}(b, \beta) = \{y : (b, y) \leqslant \beta\}$, где $b \in E^* \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$, имеем [11]

$$P_x^{H_{\leqslant}(b,\beta)}(a) = (\nabla\varphi)^{-1}(\nabla\varphi(x) + a),$$

если $(\nabla\varphi)^{-1}(\nabla\varphi(x) + a) \in H_{\leqslant}(b, \beta)$, иначе

$$P_x^{H_{\leqslant}(b,\beta)}(a) = (\nabla\varphi)^{-1}(\nabla\varphi(x) + a - \tau \cdot b),$$

где $\tau = \arg\min_{t > 0} \varphi^*(\nabla\varphi(x) + a - t \cdot b) + t\beta$; φ^* — сопряженная к φ функция, то есть

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \operatorname{dom} \varphi}((y, x) - \varphi(x)).$$

Опишем предлагаемый алгоритм для решения вариационного неравенства (1).

Алгоритм 1

Выбираем элемент $x_1 \in E$ *и последовательность положительных чисел* (λ_n). *Полагаем* $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить

$$y_n = P_{x_n}^C(-\lambda_n A x_n).$$

Шаг 2. Если $y_n = x_n$, *то СТОП, иначе вычислить*

$$x_{n+1} = P_{x_n}^{T_n}(-\lambda_n A y_n),$$

где

$$T_n = \{z \in E : (\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n A x_n - \nabla\varphi(y_n), z - y_n) \leqslant 0\}.$$

Положить $n := n + 1$ *и перейти на шаг 1.*

Замечание 2. Имеем $C \subseteq T_n$. Действительно, если предположить существование точки $w \in C \setminus T_n$, то неравенство

$$(\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n A x_n - \nabla\varphi(y_n), w - y_n) > 0$$

противоречит равенству $y_n = P_{x_n}^C(-\lambda_n A x_n)$.

***Замечание* 3.** Если $\varphi(\cdot)=\frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, то алгоритм 1 принимает вид субградиентного экстраградиентного метода [3, 4]:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n) \leqslant 0\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n). \end{cases}$$

Имеет место

Лемма 1. *Если для некоторого* $n \in \mathbb{N}$ *в алгоритме 1 имеем* $y_n = x_n$, *то* $x_n \in S$.

Далее будем предполагать, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ условие $y_n = x_n$ не имеет места и перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 1.

Лемма 2. *Для последовательностей* (x_n), (y_n), *порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство*

$$V(z, x_{n+1}) \leqslant V(z, x_n) - \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) \cdot V(y_n, x_n) - \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) \cdot V(x_{n+1}, y_n),$$

где $z \in S$.

Сходимость и оценки эффективности. Сформулируем один из основных результатов работы.

Теорема 1. *Пусть множество* $C \subseteq E$ *– выпуклое и замкнутое, оператор* $A: E \to E^*$ *– псевдомонотонный и липшицевый с константой* $L > 0$, $S \neq \varnothing$ *и* $\lambda_n \in [a, b]$, *где* a, $b \in \left(0, \frac{\sigma}{L}\right)$. *Тогда последовательности* (x_n) *и* (y_n), *порожденные алгоритмом 1, сходятся к некоторой точке* $\bar{z} \in S$.

Рассмотрим вариационное неравенство (1) с монотонным липшицевым оператором A и выпуклым компактным множеством C. Получим для этого случая неасимптотические оценки эффективности алгоритма 1.

Напомним одно важное понятие. Функцией разрыва называют функцию вида

$$G(x) = \max_{y \in C}(Ay, x - y), \ x \in C.$$

Функция разрыва выпукла, неотрицательна и принимает нулевое значение в точке $x \in C$ тогда и только тогда, когда эта точка принадлежит множеству S. Она применяется для оценки качества приближенного решения вариационых неравенств [8].

Справедлива следуюшая

Теорема 2. *Пусть* $\lambda_n \in \left(0, \frac{\sigma}{L}\right)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$G(z_N) = \max_{y \in C}(Ay, z_N - y) \leqslant \frac{R_C(x_1)}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n}, \ \ R_C(x_1) = \max_{y \in C} V(y, x_1),$$

где $z_N = \frac{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n y_n}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n}$ *— усредненный по Чезаро выход работы алгоритма 1.*

Следствие 1. *Пусть* $\lambda_n = \lambda = \frac{\sigma}{\alpha L}$, *где* $\alpha \geqslant 1$. *Тогда имеет место неравенство*

$$G(z_N) = \max_{y \in C}(Ay, z_N - y) \leqslant \alpha L R_C(x_1)\sigma^{-1}\frac{1}{N},$$

где $z_N = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N}$.

Следствие 2. *Пусть необходимо решить задачу (1) при помощи алгоритма 1 в условиях следствия 1 и* $\varepsilon > 0$. *Тогда после*

$$N = \left\lceil \frac{R_C(x_1)}{\lambda\varepsilon} \right\rceil = \left\lceil \frac{\alpha L R_C(x_1)}{\sigma\varepsilon} \right\rceil$$

итераций имеет место следующая оценка, где

$$G(z_N) = \max_{y \in C}(Ay, z_N - y) \leqslant \varepsilon,$$

где $z_N = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N}$ *— усредненный выход работы алгоритма 1 за N итераций.*

***Замечание* 4.** В ближайшей работе планируется для алгоритма [12, 13] изучить аналог с брэгмановскими проекциями на специально подобранные опорные к допустимому множеству полупространства. А именно, вместо итераций вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_{x_n}^{C}(-\lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_{x_{n+1}}^{C}(-\lambda A y_n), \end{cases}$$

предлагается рассмотреть процесс

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_{x_n}^{H_n}(-\lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_{x_{n+1}}^{C}(-\lambda A y_n), \end{cases}$$

где $H_n = \{z \in E : (\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n A y_{n-1} - \nabla\varphi(y_n), z - y_n) \leqslant 0\}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке МОН Украины (проект “Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології”, 0116U004777).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для открывания седловых точек и других задач. *Экономика и математические методы*. 1976. **12**. № 4. С. 747—756.
2. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM J. on Control and Optimization*. 2000. **38**. P. 431—446. doi: https://doi.org/10.1137/S0363012998338806
3. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *J. Optimization Theory and Applications*. 2011. **148**. P. 318–335. doi: https://doi.org/10.1007/s10957-010-9757-3
4. Lyashko S.I., Semenov V.V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. **47**. P. 631—639. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-011-9343-1
5. Semenov V.V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators. *J. Automation and Information Sciences*. 2014. **46**. № 5. P. 45—56. doi: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40
6. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *J. Automation and Information Sciences*. 2015. **47**. № 7. P. 31—46. doi: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40
7. Denisov S.V., Semenov V.V., Chabak L.M. Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. **51**. P. 757–765. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-015-9768-z
8. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/t) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM J. Optimization*. 2004. **15**. P. 229—251. doi: https://doi.org/10.1137/S1052623403425629
9. Auslender A., Teboulle M. Interior projection-like methods for monotone variational inequalities. *Mathematical Programming*. 2005. 1**04**, Iss. 1. P. 39–68. doi: https://doi.org/10.1007/s10107-004-0568-x
10. Bregman L.M. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1967. **7**. P. 200–217. doi: https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90040-7
11. Lorenz D.A., Schöpfer F., Wenger S. The Linearized Bregman Method via Split Feasibility Problems: Analysis and Generalizations. *SIAM J. Imaging Sciences*. 2014. **7**. P. 1237—1262. doi: https://doi.org/10.1137/130936269
12. Semenov V.V. A Version of the Mirror Descent Method to Solve Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. **53**. P. 234—243. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9
13. Semenov V.V. A variant of mirror descent method for solving variational inequalities. Int. Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov)". St. Petersburg. May 22—27, 2017. P. 281—284. doi: https://doi.org/10.1109/CNSA.2017.7974011

Поступило в редакцию 03.04.2018

REFERENCES

1. Korpelevich, G. M. (1976). The extragradient method for finding saddle points and other problems. Ekonomika i Matematicheskie Metody, 12, No. 4, pp. 747-756 (in Russian).
2. Tseng, P. (2000). A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. SIAM J. Control and Optimization, 38, pp. 431-446. doi: https://doi.org/10.1137/S0363012998338806
3. Censor, Y., Gibali, A., & Reich, S. (2011). The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. J. Optimization Theory and Applications, 148, pp. 318-335. doi: https://doi.org/10.1007/s10957-010-9757-3
4. Lyashko, S. I., Semenov, V. V. & Voitova, T. A. (2011). Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. Cybernetics and Systems Analysis, 47, pp. 631-639. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-011-9343-1
5. Semenov, V. V. (2011). A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators. J. Automation and Information Sciences, 46, No. 5, pp. 45-56. doi: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40

6. Verlan, D. A., Semenov, V. V. & Chabak, L. M. (2015). A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. J. Automation and Information Sciences, 47, No. 7, pp. 31-46. doi: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40
7. Denisov, S. V., Semenov, V. V. & Chabak, L. M. (2015). Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. Cybernetics and Systems Analysis, 51, pp. 757-765. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-015-9768-z
8. Nemirovski, A. (2004). Prox-method with rate of convergence O(1/t) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. SIAM J. Optimization, 15, pp. 229-251. doi: https://doi.org/10.1137/S1052623403425629
9. Auslender, A. & Teboulle, M. (2005). Interior projection-like methods for monotone variational inequalities. Mathematical Programming, 104, Iss. 1, pp. 39-68. doi: https://doi.org/10.1007/s10107-004-0568-x
10. Bregman, L. M. (1967). The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 7, pp. 200-217. doi: https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90040-7
11. Lorenz, D. A., Schöpfer, F. & Wenger, S. (2014). The Linearized Bregman Method via Split Feasibility Problems: Analysis and Generalizations. SIAM J. Imaging Sciences, 7, pp. 1237-1262. doi: https://doi.org/10.1137/130936269
12. Semenov, V. V. (2017). A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities. Cybernetics and Systems Analysis, 53, P. 234-243. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9
13. Semenov, V. V. (2017). A variant of mirror descent method for solving variational inequalities. Int. Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov)". St. Petersburg. May 22—27, pp. 281-284. doi: https://doi.org/10.1109/CNSA.2017.7974011

Received 03.04.2018

В.В. Семенов

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: semenov.volodya@gmail.com

НОВИЙ МОДИФІКОВАНИЙ ЕКСТРАГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД З РОЗБІЖНІСТЮ БРЕГМАНА

Запропоновано новий метод екстраградієнтного типу для наближеного розв'язання варіаційних нерівностей з псевдомонотонними та ліпшицевими операторами, що діють в скінченновимірному лінійному нормованому просторі. Даний метод є модифікацією субградієнтного екстраградієнтного алгоритму з використанням розбіжності Брегмана замість евклідової відстані. Доведено теорему збіжності методу та для випадку монотонного оператора отримані неасимптотичні оцінки ефективності методу.

Ключові слова: *варіаційна нерівність, псевдомонотонність, монотонність, умова Ліпшиця, екстраградієнтний метод, розбіжність Брегмана, збіжність.*

V.V. Semenov

Taras Shevchenko National University of Kiev
E-mail: semenov.volodya@gmail.com

A NEW MODIFIED EXTRAGRADIENT METHOD WITH BREGMAN DIVERGENCE

A new method of the extragradient type for the approximate solution of variational inequalities with pseudomonotone and Lipschitz-continuous operators acting in a finite-dimensional linear normed space is proposed. This method is a modification of the subgradient extragradient algorithm using the Bregman divergence instead of the Euclidean distance. A theorem on the convergence of the method is proved, and, in the case of a monotone operator, non-asymptotic estimates of the effectiveness of the method are obtained.

Keywords: *variational inequality, pseudomonotonicity, monotonicity, Lipschitz condition, extragradient method, Bregman divergence, convergence.*