https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.11.008
УДК 519.63:532.5

І.П. Гаврилюк[1], **В.Л. Макаров**[2]

[1] Університет дуальної освіти Гера-Айзенах, Німеччина
[2] Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: iwan.gawriljuk@dhge.de, makarovimath@gmail.com

Метод фіктивних областей та гомотопія як нова альтернатива для багатовимірних задач із частинними похідними в областях довільної форми

Представлено академіком НАН України В.Л. Макаровим

Поєднано ідеї методу фіктивних областей та гомотопії з метою зведення розв'язування багатовимірних рівнянь із частинними похідними в області довільної форми до експоненційно збіжної послідовності задач у паралелепіпеді (у прямокутнику для випадку 2D). Це дає можливість зменшити об'єм обчислювальної роботи за рахунок відсутності необхідності триангуляції області.

Ключові слова: *крайова задача для диференціального рівняння з частинними похідними, область довільної форми, паралелепіпед, метод фіктивних областей, гомотопія, експоненційна швидкість збіжності.*

1. Класичний метод фіктивних областей. Під час чисельного розв'язування багатовимірних рівнянь із частинними похідними геометрія області часто є однією з труднощів, які треба подолати. Найкращою геометрією для методу скінченних різниць є паралелепіпед, який легко покривається прямокутною сіткою. Навпаки, згідно з методом скінченних елементів задану область спочатку потрібно триангулювати, що ускладнює алгоритм розв'язку.

Однією з перших ідей розв'язування рівняння з частинними похідними (РЧП)

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)u = f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

яке задовольняє умови $a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad c(x) \geqslant 0$ та умову еліптичності

$$\inf_{x\in\Omega} \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

з позитивною сталою μ, незалежною від довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, була ідея занурити область Ω довільної форми в паралелепіпед R і сформулювати задачу в R із розв'язком, який апроксимує $u(x)$ в Ω [1].

Нехай Ω_1 є доповнення області Ω до паралелепіпеда R і нехай S є спільною границею областей Ω та Ω_1. В області R розглянемо задачу

$$L_\varepsilon v(x) \equiv -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + C(x)v = F(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in R,$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial R,$$

$$[v(x)]_s = 0, \quad \left[\sum_{i,\,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x) \cos(\nu, x_i) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right]_s = 0, \tag{1}$$

де ν — нормаль до поверхні S і $[\cdot]_s$ означає стрибок функції на поверхні S. Коефіцієнти РЧП визначаються як продовження коефіцієнтів вихідної задачі в паралелепіпед:

$$A_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega_1, \quad i \neq j, \\ \varepsilon^{-2}, & x \in \Omega_1, \quad i = j, \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} c(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega_1, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega_1. \end{cases}$$

У роботі [2] було показано, що

$$\| u - v \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\varepsilon. \tag{2}$$

Більш ретельний аналіз [2, 3] показує, що

$$\| u - v \|_{C(\bar{\Omega})} \leqslant C\varepsilon^2. \tag{3}$$

Одним з ускладнень практичної реалізації викладеного підходу є велика область зміни коефіцієнтів у паралелепіпеді. Цю складність було подолано, наприклад, у роботах [4—7]. Крім того, оцінки (2), (3) вказують на низьку точність цього методу. Метод фіктивних областей для РЧП був надалі розвинений в [3, 8—14] та багатьох інших публікаціях.

2. Метод гомотопії. У даній роботі ми розглядаємо задачу

$$A(x)u(x) + b(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

в гільбертовому просторі H. Нехай Ω – область довільної геометрії. Для розв'язання (4) ми пропонуємо перейти до деякої іншої задачі в паралелепіпеді (прямокутнику) $R \supseteq \Omega$, розв'язок якої апроксимує $u(x)$ в Ω. З цією метою ми використаємо ідею гомотопії, що застосовується в топології. Формально гомотопія між двома проблемами f (відносно простою) в топологічному просторі X та g (відносно складною) в топологічному просторі Y визначається як неперервна функція $H: X\times[0,1]\to Y$ така, що $H(x,0)=f$ і $H(x,1)=g$. Беручи до уваги другий параметр функції H, можна сказати, що H описує неперервну деформацію задачі f у задачу g, тобто для $t=0$ ми маємо проблему f, а для $t=1$ одержуємо проблему g. Можна також вважати другий параметр регулятором, який визначає гладкий перехід від f до g, коли цей регулятор змінюється від 0 до 1, і навпаки.

Аналогічний підхід, що отримав назву функціонально-дискретний метод (FD-метод), був запропонований у [15] та в подальшому розвинений у численних публікаціях автора зі співавторами.

Розглянемо таку гомотопію:

$$\begin{aligned}&A(x,t)u(x,t)+B(x,t)u(x,t)=F(x),\quad x\in R,\quad t\in[0,1],\\&u(x,t)=0,\quad x\in\partial R,\end{aligned}\tag{5}$$

де

$$B(x,t)=\begin{cases}b(x)I, & x\in\Omega,\\(1-t)b(x)I, & x\in R\setminus\bar{\Omega},\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\Omega,\\0, & x\in R\setminus\bar{\Omega},\end{cases}$$

I — тотожний оператор, $A(x,t)$ — самоспряжений додатно визначений оператор у гільбертовому просторі векторнозначних функцій H, який є продовженням оператора $A(x), x\in\Omega$, в область Ω_1 із збереженням гладкості та з деякими умовами спряження на S (див., наприклад, умови спряження (1)), які залежать від t. Оператор $b(x)$ продовжений в область Ω_1 також із збереженням гладкості. Якщо $t=1$, то (5) перетворюється на вихідну задачу (4), а при $t=0$ отримуємо так звану базову задачу

$$\begin{aligned}&A(x,0)u(x,0)+B(x,0)u(x,0)=F(x),\quad x\in\Omega,\\&u(x,0)=0,\quad x\in\partial R.\end{aligned}$$

Будемо шукати розв'язок параметричної задачі (5) у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}u^{(j)}(x)t^j,$$

припускаючи, що ряд збігається для всіх $t=(0,1]$. Підставляючи цей вираз у (5) та прирівнюючи відповідні коефіцієнти перед однаковими степенями t, отримуємо таку рекурентну послідовність задач у прямокутнику R:

$$\begin{aligned}&A(x,0)u^{(j+1)}(x)+B(x,0)u^{(j+1)}(x)=B(x,0)u^{(j)}(x),\quad x\in R,\quad j=0,1,\ldots,\\&u^{(0)}(x)=u(x,0),\end{aligned}\tag{6}$$

з відповідними умовами спряження.

Алгоритм, що пропонується, полягає в розв'язуванні N задач (6) у паралелепіпеді та в обчисленні такого наближення N-го рангу до розв'язку вихідної задачі в області довільної форми:

$$\overset{N}{u}(x) = \sum_{j=0}^{N} u^{(j)}(x).$$

Ми можемо зобразити розв'язок задачі (5) у вигляді

$$u^{(j+1)}(x) = [A(x,0)+B(x,0)]^{-1} B(x,0) u^{(j)}(x), \quad x \in R, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Припускаючи, що $\| [A(x,0)+B(x,0)]^{-1} \| \leqslant \delta$, отримуємо оцінку

$$\| u^{(j+1)} \| \leqslant \delta \| u^{(j)} \|,$$

де $\| u \| = \left[\int_R u(x), u(x))dx \right]^{\frac{1}{2}}$ є нормою в гільбертовому просторі H.

Використаємо описану вище абстрактну схему до задачі

$$\begin{gathered} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) + c(x) u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{7}$$

де $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)$, $c(x) \geqslant \tau > 0$, а оператор $b(x)$ є оператором множення на $c(x)$.

Відповідно до ідеї методу фіктивних областей ми вкладемо задачу (7) в задачу

$$\begin{gathered} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{i,j}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right) + C(x,t) u(x,t) = F(x), \quad x \in R, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial R, \quad \forall t \in [0,1]. \end{gathered} \tag{8}$$

$$C(x,t) = \begin{cases} c(x), & x \in \Omega, \\ (1-t)c(x), & x \in \Omega_1, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega_1, \end{cases}$$

$$[u(x,t)]_{x \in S} = 0,$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x,t) \cos(\nu, x_i) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right]_{x \in S} = 0, \quad A_{i,j}(x,t) = \begin{cases} a_{i,j}(x), & x \in \Omega, \\ (1-t)^{-1} a_{i,j}(x), & x \in \Omega_1, \end{cases}$$

де ν — нормаль до поверхні S як спільної границі областей Ω та Ω_1. Домножуючи рівняння (8) на функцію $u(x,t)$ та інтегруючи за областю R із використанням інтегрування за частинами та умов спряження, отримуємо

$$\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right)dx+\int_{\Omega}c(x)u(x)^2dx+$$

$$+(1-t)^{-1}\left\{\int_{\Omega_1}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right)dx+\int_{\Omega}c(x)u(x)^2dx\right\}=\int_{\Omega}u(x,t)f(x)dx.$$

Переходячи тут до границі $t\to 1$ і враховуючи умову еліптичності, а також граничні умови, одержуємо

$$u(x,1)\equiv 0,\quad x\in\Omega_1,$$

тобто

$$u(x,1)\equiv 0,\quad x\in S,$$

і

$$u(x,1)\equiv u(x),\quad x\in\Omega.$$

Рекурсивні задачі методу гомотопії мають вигляд

$$Lu^{(s+1)}\equiv -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u^{(s+1)}(x,t)}{\partial x_j}\right)+c(x)u^{(s+1)}(x,t)=F^{(s+1)}(x),\quad x\in R,$$

$$u^{(s+1)}(x)=0,\quad x\in\partial R, \tag{9}$$

$$F^{(s+1)}(x)=\begin{cases}0, & x\in\Omega,\\ c(x)u^{(s)}(x), & x\in\Omega_1,\end{cases}\quad s=0,1,\ldots,$$

$$[u^{(s+1)}(x)]_{x\in S}=0,$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x)\cos(\nu,x_i)\frac{\partial u^{(s+1)}(x)}{\partial x_j}\right]_{x\in S}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x)\cos(\nu,x_i)\frac{\partial u^{(s)}(x+0)}{\partial x_j},\quad x\in S,$$

з базовою задачею

$$\begin{aligned}&Lu^{(0)}\equiv -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u^{(0)}(x,t)}{\partial x_j}\right)+c(x)u^{(0)}(x,t)=F(x),\quad x\in R,\\ &u^{(0)}(x,t)=0,\quad x\in\partial R.\end{aligned} \tag{10}$$

Зауважимо, що, на відміну від класичного методу фіктивних областей, коефіцієнти в (9) не є сильно змінними.

Припустимо, що існує стала $\delta>0$ така, що

$$\|L^{-1}\|\leqslant\delta.$$

Використовуючи цю нерівність, отримуємо для розв'язків рекурентної послідовності задач (9) ланцюжок нерівностей

$$\| u^{(j+1)} \| \leqslant \delta \| u^{(j)} \| \leqslant \ldots \leqslant \delta^{j+1} \| u^{(0)} \| .$$

Таким чином, ми довели таке твердження.

Теорема. *Нехай* $\delta < 1$, *тоді метод* (9), (10) *збігається принаймні із швидкістю геометричної прогресії із знаменником* δ *та з оцінкою точності*

$$\| u(x) - \overset{N}{u}(x) \| \leqslant \frac{\delta^{N+1}}{1-\delta} \| u^{(0)} \|, \quad x \in \Omega ,$$

де розв'язок $u(x)$ *вихідної задачі продовжено нулем у область* Ω_1 .

Нижченаведений одновимірний приклад ілюструє запропонований підхід.

3. Чисельний приклад. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - u(x) = -2, \quad x \in (0, 1/2), \quad u(0) = 0, \quad u(1/2) = 0 , \tag{11}$$

з точним розв'язком

$$u(x) = 2 - 2\frac{\cosh(1/4 - x)}{\cosh(1/4)} .$$

Застосовуючи метод гомотопії, ми вкладемо цю задачу в таку:

$$\frac{d^2u(x,t)}{dx^2} + c(x,t)u(x,t) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0 ,$$

$$u(1/2+0,t) = u(1/2-0,t) ,$$

$$\frac{du(1/2+0,t)}{dx} = (1-t)\frac{du(1/2-0,t)}{dx}, \quad t \in [0,1],$$

$$c(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1/2], \\ 1-t, & x \in (1/2,1], \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \in [0,1/2], \\ 0, & x \in (1/2,1], \end{cases}$$

з точним розв'язком

$$u(x,t) = \begin{cases} -2\beta(t)\sinh(x) - 2(1-\mathrm{e}^{x}), & x \in [0,1/2], \\ a(t)\cosh(\gamma(t)x)\left[1 - \dfrac{\sinh(\gamma(t)x)}{\sinh(\gamma(t))}\right], & x \in [1/2,1], \end{cases}$$

Чисельні результати для задачі (11)

j	$\beta^{(j)}$	j	$\beta^{(j)}$
0	−1,353517909831859	8	0,0006561428750142905
1	0,050252078944478	12	0,000055146777602237
2	0,0269339956655875	16	0,00000463491590037
3	0,01449939684357629	20	$3{,}895504108227860 \cdot 10^{-7}$
4	0,00780686833385055	24	$3{,}2740444447127 \cdot 10^{-9}$
5	0,00420346206116659	28	$2{,}7517533077 \cdot 10^{-10}$
6	0,002263276197364295	32	$2{,}34142926392013 \cdot 10^{-11}$
7	0,00121861911610010		

$$\beta(t)=\sqrt{e}\,\frac{(\sqrt{e}-1)\cosh\left(\frac{3}{2}\gamma(t)\right)+\sqrt{e}\gamma(t)\sinh\left(\frac{\gamma(t)}{2}\right)}{(e-1)\cosh\left(\frac{3}{2}\gamma(t)\right)+(e+1)\gamma(t)\sinh\left(\frac{e(t)}{2}\right)},$$

$$a(t)=\frac{2(\sqrt{e}-1)^2\gamma(t)\sinh(\gamma(t))}{(e-1)\cosh\left(\frac{3}{2}\gamma(t)\right)+(e+1)\gamma(t)\sinh\left(\frac{\gamma(t)}{2}\right)},\quad \gamma(t)=\sqrt{1-t}.$$

Легко помітити, що

$$\lim_{t\to 1}\beta(t)=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e+1}},\quad \lim_{t\to 1}a(t)=0,$$

тобто наближений розв'язок у розширеній області збігається до точного розв'язку задачі (11) на [0, 1/2] і до нуля в розширенні [1/2, 1]. Поправки нашого методу на [0, 1/2] мають вигляд

$$u^{(j)}(x)=-2\beta^{(j)}\sinh(x),$$

де значення $\beta^{(j)}$ наведені в таблиці.Числові значення з даної таблиці вказують на експоненційну збіжність із швидкістю геометричної прогресії із знаменником $\delta<0{,}54$. Використовуючи наближення рангу 32, отримуємо результат

$$\overset{32}{\beta}=\sum_{j=0}^{32}\beta^{(j)}=-1{,}244918662669409$$

з абсолютною похибкою $|\beta(1)-\overset{32}{\beta}|=2{,}65700\cdot 10^{-10}$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Саульев В.К. О решении некоторых краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах методом фиктивных областей. *Сиб. матем. журн.* 1963. **4**, № 4, С. 912–925.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. Москва: Наука, 1989. 608 с.

3. Копченов В.Д. Приближение решения задачи Дирихле методом фиктивных областей. *Дифференц. уравнения*. 1968. **4**, № 1. С. 151–164.
4. Kobel'kov G.M. Fictitious domain method and the solution of elliptic equations with highly varying coefficients. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 1987. **2**, Iss. 6. P. 407—419. https://doi.org/10.1515/rnam.1987.2.6.407
5. Брусникин М.Б. Об эффективных алгоритмах решения задач метода фиктивных областей в многосвязном случае. *Докл. АН*. 2002. **387**, № 2. С. 151–155.
6. Бахвалов Н.С., Богачев К.Ю., Мэтр Ж.Ф. Эффективный алгоритм решения жестких эллиптических задач с приложениями к методу фиктивных областей. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1999. **39**, № 6. С. 919—931.
7. Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1964. **4**, № 3. С. 449—465.
8. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения. *Численные методы механики сплошной среды*. 1973. **4**, № 2. С. 109—115.
9. Богачев К.Ю. Обоснование метода фиктивных областей решения смешанных краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика*. 1996. № 3. С. 16—23.
10. Руховец Л.А. Замечание к методу фиктивных областей. *Дифференц. уравнения*. 1967. **3**, № 4. С. 698—701.
11. Glowinski R., Pan T.W., Periaux J. A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1994. **111**, Iss. 3—4. P. 283–303. https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)90135-X
12. Войцеховский С.А., Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. Сходимость разностных решений к обобщенным решениям задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в произвольной области. *Докл. АН СССР*. 1982. **267**, № 1. С. 34–37.
13. Копченов В.Д. Метод фиктивных областей для второй и третьей краевых задач. *Тр. МИАН АН СССР*. 1974. **131**. С. 119—127.
14. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. 2-е изд. Москва: ЛЕНАНД, 2017. 160 с.
15. Макаров В.Л. О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма—Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами. *Докл. АН СССР, Сер. матем.* 1991. **320**, № 1. С. 34—39.

Надійшло до редакції 12.08.2019

REFERENCES

1. Sauljev, V. K. (1963). On the solution of certain boundary value problems on high-speed computers by the fictitious domain method. Sib. mat. zhurn., 4, No. 4, pp. 912-925 (in Russian).
2. Marchuk, G. I. (1989). Methods of numerical mathematics. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Kopchenov, V. D. (1968). The approximation of the solution of the Dirichlet problem by the method of fictitious domains. Differents. uravneniya, 4, No. 1, pp. 151-164 (in Russian).
4. Kobel'kov, G. M. (1987). Fictitious domain method and the solution of elliptic equations with highly varying coefficients. Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2, Iss. 6, pp. 407-419. https://doi.org/10.1515/rnam.1987.2.6.407
5. Brusnikin, M. B. (2002). On effective algorithms for solving problems of the fictitious domain method in the multiply connected case. Dokl. AN, 387, No. 2, pp. 151-155 (in Russian).
6. Bakhvalov, N. S., Bogachev, K. Ju. & Metr, J. F. (1999). An efficient algorithm for stiff elliptic problems with applications to the method of fictitious domains. Comput. Math. Math. Phys., 39, No. 6, pp. 884-896.
7. Lebedev, V. I. (1964). Difference analogues of orthogonal decompositions, basic differential operators and some boundary problems of mathematical physics. I. USSR Comput. Math. Math. Phys., 4, No. 3, pp. 69-92. https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90240-X
8. Konovalov, A. N. (1973). The method of fictitious domains in torsion problems. Chislennyie metody mehaniki sploshnoy sredy, 4, No. 2, pp. 109-115 (in Russian).
9. Bogachev, K. Ju. (1996). Justification of the method of fictitious domains for solving mixed boundary-value problems for quasilinear elliptic equations. Vestn. Mosk. Un-ta, Ser. 1, Matematica. Mehanika, No. 3, pp.16-23 (in Russian).

10. Rukhovets, L. A. (1967). A remark on the method of fictitious regions. Differents. uravneniya, 3, No. 4, pp. 698-701 (in Russian).
11. Glowinski, R., Pan, T. W. & Periaux, J. (1994). A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 111, Iss. 3-4, pp. 283-303. https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)90135-X
12. Vojtsekhovskij, S. A., Gavrilyuk, I. P. & Makarov, V. L. (1982). Convergence of difference solutions to generalized solutions of the Dirichlet problem for the Helmholtz equation in an arbitrary domain. Dokl. AN SSSR, 267, No. 1, pp. 34-37 (in Russian).
13. Kopchenov, V. D. (1974). A method of fictitious domains for the second and third boundary value problems. Proc. Steklov Inst. Math., 131, pp. 125-134.
14. Vabishchevich, P. N. (2017). The method of fictitious domains in problems of mathematical physics. Moscow: LENAND (in Russian).
15. Makarov, V. L. (1991). About functional-discrete method of arbitrary accuracy order for solving Sturm—Liouville problem with piecewise smooth coefficients. Dokl. AN SSSR, Ser. math., 320, No. 1, pp. 34-39 (in Russian).

Received 12.08.2019

И.П. Гаврилюк[1], *В.Л. Макаров*[2]

[1] Университет дуального образования Гера-Айзенах, Германия
[2] Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: iwan.gawriljuk@dhge.de, makarovimath@gmail.com

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ И ГОМОТОПИЯ
КАК НОВАЯ АЛЬТЕРНАТИВА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Объединены идеи метода фиктивных областей и гомотопии с целью сведения решения многомерных уравнений в частных производных в области произвольной формы к экспоненциально сходящейся последовательности задач в параллелепипеде (прямоугольнике для случая 2D). Это дает возможность уменьшить объем вычислительной работы за счет отсутствия необходимости триангуляции области.

Ключевые слова: *краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных, область произвольной формы, параллелепипед, метод фиктивных областей, гомотопия, экспоненциальная скорость сходимости.*

I.P. Gavrilyuk[1], V.L. Makarov[2]

[1] University of cooperative education Gera-Eisenach, Germany
[2] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: iwan.gawriljuk@dhge.de, makarovimath@gmail.com

THE FICTITIOUS DOMAIN METHOD AND HOMOTOPY
AS A NEW ALTERNATIVE FOR MULTIDIMENSIONAL PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS IN DOMAINS OF ARBITRARY SHAPE

The ideas of the method of fictitious domains and of homotopy are united with the aim to reduce the solution of multidimensional partial differential equations in an arbitrary domain to an exponentially convergent sequence of problems in a parallelepiped (rectangle in the 2D case). This makes it possible to reduce the amount of computational work due to the absence of the need for the triangulation of a domain.

Keywords: *boundary-value problem for a partial differential equation, domain of arbitrary shape, parallelepiped, fictitious domain method, homotopy, exponential convergence rate.*