ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.11.025
УДК 537.84

И.Т. Селезов

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
E-mail: igor.selezov@gmail.com

Распространение возмущений в акустической ферромагнитной среде

Представлено академиком НАН Украины В.Т. Гринченко

Приведено обобщение уравнений распространения волновых возмущений в акустической ферромагнитной среде с конечной скоростью, как развитие исследований в области акустики. В отличие от традиционных уравнений феррогидродинамики обобщенные уравнения учитывают конечность скорости распространения волн, что влияет на разогрев широко применяемых феррогерметизаторов, особенно в начальной стадии.

Ключевые слова: *акустика, ферромагнитная среда, феррогерметизатор, волны, распространение возмущений, конечная скорость, обобщенная модель.*

В данном сообщении представлены обобщенные уравнения феррогидродинамики как развитие магнитной гидродинамики и плазмы, когда учитываются эффекты сжимаемости и тепловой релаксации. После линеаризации относительно невозмущенных полей давления, плотности, температуры, скорости, напряженности магнитного поля и намагниченности, исходные уравнения сведены к системе трех разрешающих скалярных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболо-эллиптического типа, что предсказывает распространение волн с конечной скоростью в отличие от традиционной модели. Как развитие исследований в области акустики [1] вопрос о конечности скорости распространения возмущений в средах рассматривался на акустических симпозиумах [2—5].

Обобщенная волновая гиперболическая модель ферромагнитной среды. Предполагается, что рассмотрение проводится в R^3 и все искомые функции гладкие, т. е. принадлежат классу C^∞. Соответствующая замкнутая система обобщенных уравнений записывается в виде:

уравнение сохранения импульса

$$\tilde{\rho}\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right]=-\vec{\nabla}\tilde{p}+\mu_0(\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{H}, \qquad (1)$$

обобщенное уравнение состояния

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}=-K\vec{\nabla}\cdot\vec{V}+\beta K\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2}$$

обобщенное гиперболическое уравнение распространения тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t}=k_t\nabla^2 T-\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}-\gamma\vec{\nabla}\cdot\vec{V}, \tag{3}$$

уравнения Максвелла

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=0,\quad \vec{\nabla}\cdot(\vec{H}+\vec{M})=0, \tag{4}$$

материальные уравнения

$$\tilde{\rho}=\rho_0[1-\beta(T-T_0)],\quad \vec{M}=\frac{\vec{H}}{H}M, \tag{5}$$

$$M=M_0-K_p(T-T_0)+\chi(H-H_0). \tag{6}$$

В (1)—(6) приняты следующие обозначения: $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ — пространственные координаты; t — время; $\vec{\nabla}$ — гамильтониан; ∇^2 — лапласиан; $(\bullet)$ и $(\times)$ — символы скалярного и векторного произведения; $\tilde{p}$ — давление; $\tilde{\rho}$ — плотность; T — температура; $\vec{V}$ — вектор скорости; $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; $\vec{M}$ — вектор намагниченности; μ_0 — магнитная проницаемость; K — коэффициент объемного расширения; β — коэффициент объемной температурной дилатации; k_t — коэффициент теплопроводности; τ — время тепловой релаксации; γ — коэффициент термоупругой диффузии; K_p — пиромагнитная постоянная; χ — восприимчивость.

Как частные случаи из системы (1)—(6) следуют уравнения магнитной жидкости (как раздела магнитной гидродинамики), уравнения магнитоакустики, если не учитывать тепловое поле, и намагничивание, т.е. ферромагнитную фракцию, и уравнения акустики.

Приведенная система уравнений (1)—(6) — гиперболо-эллиптического типа и описывает распространение возмущений с конечной скоростью, следуя Максвеллу, Эйнштейну и Ландау, в отличие от традиционной системы в случае вязкой несжимаемой среды

$$\tilde{\rho}[\partial\vec{V}/\partial t+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}]=-\vec{\nabla}\tilde{p}+\eta_d\nabla^2\vec{V}+\mu_0 M\vec{\nabla}\vec{H}, \tag{7}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0, \tag{8}$$

$$\partial T/\partial t+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})T=\chi\nabla^2 T+\frac{\nu_k}{2c_p}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right)^2, \tag{9}$$

$$\tilde{\rho}=\rho_0[1-\beta(T-T_0)], \tag{10}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=0, \tag{11}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{H}+\vec{M})=0, \tag{12}$$

$$\vec{M} = M\vec{H}/H, \tag{13}$$

$$M = M_0 - K_p(T - T_0) + \chi_m(H - H_0). \tag{14}$$

Теоретический анализ поведения ферромагнитных сред (1)—(6) и (7)—(14) представляет большие трудности в связи со сложностью уравнений.

Представим величины в (1)—(6) в виде суммы невозмущенных и возмущенных компонент в предположении, что в начальном состоянии среда покоится

$$\begin{gathered}\tilde{p}(\vec{x},t) = p_0 + p(\vec{x},t), \quad \tilde{\rho}(\vec{x},t) = \rho_0 + \rho(\vec{x},t),\\ \vec{V}(\vec{x},t) = 0 + \vec{v}(\vec{x},t), \quad T(\vec{x},t) = T_0(\vec{x}) + \hat{t}(\vec{x},t),\\ \vec{H}(\vec{x},t) = \vec{H}_0(\vec{x}) + \vec{h}(\vec{x},t), \quad \vec{M}(\vec{x},t) = \vec{M}_0(\vec{x}) + \vec{m}(\vec{x},t).\end{gathered} \tag{15}$$

Предположение малости возмущенных величин в (1)—(6) с учетом (15) по сравнению с невозмущенными приводит к линеаризованной замкнутой системе уравнений для скалярных функций $\varphi, \hat{t}$ и $\psi(\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi, \quad \vec{h} = \vec{\nabla}\psi)$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_0^2\nabla^2\varphi = -\beta c_0^2\frac{\partial\hat{t}}{\partial t} + \frac{\mu_0(1+\chi)}{\rho_0}(\vec{\nabla}\psi_0)\cdot\left(\vec{\nabla}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right), \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2\hat{t}}{\partial t^2} - c_h^2\nabla^2\hat{t} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\hat{t}}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\nabla^2\varphi, \tag{17}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{K_p}{\chi}\nabla\hat{t}, \tag{18}$$

где $c_0 = \sqrt{\dfrac{K}{\rho_0}}$, $c_h = \sqrt{\dfrac{K}{\tau}}$.

Уравнение (16) включает в правой части член, учитывающий влияние температурного поля и диссипации, связанной с потерями в магнитной жидкости. Уравнение (17) включает член с релаксацией времени и член, учитывающий влияние дилатационного поля. Как видно из уравнения (16), последний член не равен нулю только в том случае, когда $\vec{\nabla}\psi_0 \neq 0$.

В случае распространения плоских волн предполагается, что в направлении оси Ox распространяется плоская волна, система уравнений (16)—(18) представляется в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\beta c_0^2\frac{\partial\hat{t}}{\partial t} + \frac{\mu_0(1+\chi)}{\rho_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi_0(x)\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2\hat{t}}{\partial t^2} - c_h^2\frac{\partial^2\hat{t}}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\hat{t}}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \tag{20}$$

$$\frac{\nabla^2\psi}{\partial x^2} = \frac{K_p}{\chi}\frac{\partial\hat{t}}{\partial x}. \tag{21}$$

Если рассматривать случай постоянного невозмущенного магнитного поля $H_0 = \text{const}$, то получим

$$\psi_0(x) = H_0 x \Rightarrow \frac{\partial \psi_0 x}{\partial x} = H_0 . \qquad (22)$$

Уравнения (19)—(21) с учетом (22) могут быть сведены к следующему разрешающему уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\tau \frac{\partial \hat{t}}{\partial t^2} - \tau c_h^2 \frac{\partial^2 \hat{t}}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{t}}{\partial t}\right] - \left[-\underbrace{\beta c_0^2}_{q_t} + \underbrace{\frac{\mu_0(1+\chi)}{\rho_0} H_0 \frac{K_p}{\chi}}_{q_m}\right] \frac{\partial^3 \hat{t}}{\partial x^2 \partial t} = 0 . \qquad (23)$$

После некоторых преобразований уравнение (23) может быть представлено в виде

$$\tau \frac{\partial^4 \hat{t}}{\partial t^4} - \tau (c_h^2 + c_0^2) \frac{\partial^4 \hat{t}}{\partial t^2 \partial x^2} + \tau c_0^2 c_h^2 \frac{\partial^4 \hat{t}}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 \hat{t}}{\partial t^3} + (q_t - q_m) \frac{\partial^3 \hat{t}}{\partial t \partial x^2} = 0 . \qquad (24)$$

Магнитные жидкости (феррожидкости) были впервые получены в США в середине 1960-х годов, начиная от исследования Нейрингера и Розенцвейга [6], и обстоятельно изложены в публикации [7]. Они обладают рядом существенных преимуществ: малые потери на трение, обеспечение полной герметичности, безизносность, эффект самовосстановления в случае аварийного прорыва уплотняемой среды, высокие надежность и долговечность, простота в изготовлении и обслуживании.

Магнитная жидкость (феррожидкость) включает частицы размером 3 – 15 нм = $(3-15)10^{-9}$ = = 0,000001 мм, расположенные в вакуумном масле. Плотность частиц равна 10^3 частиц/м^3 среды, в которой есть взвешенные малые феррочастицы.

Отметим некоторые приложения. Магнитное поле может существенно влиять на распространение пульсовых волн. Например, когда вводится феррожидкость для доставки препаратов в необходимое место, так что магнитное поле применяется как для доставки препарата, так и для его удержания в некоторой локальной области.

Транспорт лекарств в локальную пораженную зону и его удержание представляют собой актуальную задачу современной фармакологии, при этом размеры носителей не должны превышать нескольких микрон. Это одно из возможных эффективных приложений феррожидкости, которое давно развивается. В связи с этим отметим работы [8, 9].

В работе [10] представлена математическая модель, описывающая гидродинамику феррожидкости как носителя наночастиц через кровеносный сосуд под действием приложенного магнитного поля. Проведены исследования на этой основе доставки лекарства в пораженную зону. В качестве примера рассмотрена доставка лекарства в аневризму через трубку (стент) с отверстием в сторону аневризмы. Исследование течения крови в магнитном поле с учетом намагниченности (феррожидкость) проведено в [11].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В. Т. Волновые задачи акустики. Киев: Интерсервис, 2013. 572 с.
2. Селезов И.Т. Распространение волн в магнитных жидкостях с временной релаксацией. Акуст. симпозиум. Киев, 27–29 сентября 2005. С. 279—282.
3. Селезов И.Т. Волновая гиперболическая модель распространения возмущений в феррожидкости. Акуст. симпозиум. Киев, 29 сентября–1 октября 2009. С. 292—297.
4. Selezov I.T. On wave hyperbolic model for disturbance propagation in magnetic fluid. Ser. Operator Theory. *Advances and Applications*. Vol. 191. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 221—225.
5. Selezov I. Wave propagation in ferrofluid on the basis of extended equations. 12th Int. Conference on Magnetic Fluids (ICMF12), Abstract Book, Japan, Sendai, 1—5 August 2010. P. 212—213.
6. Neuringer J. L., Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics. *Phys. Fluids*. 1964. **7**, № 12. P. 1927—1937.
7. Rosensweig R.E. Ferrohydrodynamics. Cambridge Univ. Press. 1985.
8. Анашкин О.П., Брусенцов Н.А., Лысенко В.В., Миронова И.Б. Локализация магнитовосприимчивого препарата в фантоме опухоли с помощью концентраторов магнитного потока. *Магнит. гидродинамика*. 1990. № 1. С. 77—81.
9. Рууге Э.К., Русецкий А.Н. Направленный транспорт лекарств с помощью магнитного поля. *Журн. Всес. хим. об-ва*. 1987. **32**, № 5. С. 556—561.
10. Liu Han-dan, Xu Wei, Wang Shi-gang and Ke Zun-ji. Hydrodynamic modeling of ferrofluid flow in magnetic targeting drug delivery. *Appl. Math. and Mech*. 2008. **29**, № 10. P. 1341—1349.
11. Tzirtzilakis E.E. A mathematical model for blood flow in magnetic field. *Phys. Fluids*. 2005. **17**(7). P. 077103/1—077103/15.

Поступило в редакцию 11.07.2019

REFERENCES

1. Grinchenko, V. T., Vovk, I. V. & Matsypura, I. T. (2013). Wave problems of acoustics. Kiev: Interservice (in Russian).
2. Selezov I. T. (2005). Wave propagation in magnetic fluids with a time relaxation. Acoustic Symposium. Kiev, 27-29 September, pp. 279-282 (in Russian).
3. Selezov, I. T. (2009). Wave hyperbolic model of perturbation propagations in ferrofluid. Acoustic Symposium: Kiev, 29 September — 1 October, pp. 292-297 (in Russian).
4. Selezov, I. T. (2009). On wave hyperbolic model for disturbance propagation in magnetic fluid. Ser. Operator Theory. Advances and Applications, Vol. 191. Basel: Birkhäuser, pp. 221-225.
5. Selezov, I. (2010). Wave propagation in ferrofluid on the basis of extended equations. 12th Int. Conference on Magnetic Fluids (ICMF12), Abstract Book, Japan, Sendai, 1—5 August, pp. 212-213.
6. Neuringer, J. L. & Rosensweig, R. E. (1964). Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids., 7, No. 12, pp. 1927-1937.
7. Rosensweig, R. E. (1985). Ferrohydrodynamics. Cambridge Univ. Press.
8. Anashkin, O. P., Brusentsov, N. A., Lysenco, V. V. & Mironova, I. B. (1990). Location of magnetosusceptible preparation in phantom of tumour using hubs of magnetic flux. Magnetohydrodynamics, No. 1, pp. 77-81 (in Russian).
9. Ruuge, E. K. & Rusetski, A. N. (1987). Directed transport of medicine using magnetic field. J. National Chemical Society, 32, No. 5, pp. 556-561.
10. Liu, Han-dan, Xu, Wei, Wang, Shi-gang & Ke, Zun-ji. (2008). Hydrodynamic modeling of ferrofluid flow in magnetic targeting drug delivery. Appl. Math. and Mech., 29, No. 10, pp. 1341-1349.
11. Tzirtzilakis, E. E. (2005). A mathematical model for blood flow in magnetic field. Phys. Fluids., 17(7), pp. 077103/1-077103/15.

Received 11.07.2019

І.Т. Селезов

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ
E-mail: igor.selezov@gmail.com

ПОШИРЕННЯ ЗБУРЕНЬ В АКУСТИЧНОМУ ФЕРОМАГНІТНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Приведено узагальнення рівнянь поширення хвильових збурень в акустичному феромагнітному середовищі зі скінченною швидкістю, як розвиток досліджень в області акустики. На відміну від традиційної моделі ферогідродинаміки узагальнені рівняння враховують скінченність швидкості поширення хвиль, що впливає на розігрівання широко застосованих ферогерметизаторів, особливо на початковій стадії.

Ключові слова: *акустика, феромагнітне середовище, ферогерметизатор, хвилі, поширення збурень, скінченна швидкість, узагальнена модель.*

I.T. Selezov

Instutute of Hydromecanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: igor.selezov@gmail.com

PROPAGATION OF PERTURBATIONS IN AN ACOUSTIC FERROMAGNETIC MEDIUM

A generalization of the equations for the propagation of wave perturbations in the acoustic ferromagnetic medium with a finite speed are presented, as a development of researches in the region of acoustics. Unlike the traditional equations of ferrohydrodynamics, the generalized equations involve the finiteness of a speed of propagating waves, that influences the warming-up of widely used ferrohermetics, especially in the initial stage. The developed generalized equations include, as particular cases, the known continual equations taking the effect of a magnetic field into account. These equations can be useful in applications.

Keywords: *acoustics, ferromagnetic medium, ferrohermetics, waves, propagation of perturbations, finite speed, generalized equations.*