
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.11.031>

УДК 539.421

М.Ф. Селіванов, Ю.О. Черноіван

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

Використання моделі складної зони зчеплення при дослідженні крайової тріщини змішаного режиму руйнування в ортотропному тілі

Представлено академіком НАН України Я.М. Григоренком

Розглянуто крайову задачу теорії пружності для напівнескінченного ортотропного тіла із крайовою, нормальною до межі тіла, тріщиною. Припускається, що тіло перебуває під дією двовісного навантаження, прикладеного на значній відстані від тріщини. Для дослідження розроблено і використано модель зони зчеплення у вершині тріщини для змішаного режиму руйнування. Закон зчеплення—відриву у розробленій моделі передбачає зв'язаність нормальних і дотичних напружень у потенціальній формі. Побудовано алгоритм розв'язування задачі щодо визначення параметрів граничної рівноваги тріщини. Наведено приклад обчислення граничного навантаження при різних значеннях параметрів задачі.

Ключові слова: *змішаний режим руйнування, модель складної зони зчеплення, тріщина в ортотропному тілі, закон зчеплення—відриву для змішаного режиму руйнування.*

Інженерні задачі дослідження граничної рівноваги та розвитку тріщин у сучасних композитних матеріалах вимагають якомога точнішого врахування параметрів тріщиностійкості матеріалу в околі вершини тріщини. Одним із інструментів, який надає змогу врахувати ці параметри, є модель когезивної взаємодії берегів тріщини. Така модель має досить значне теоретичне [1, 2] та практичне [3, 4] обґрунтування. У випадку змішаного напруженого стану можливі два підходи до побудови такої моделі: незв'язаний (коли закони зчеплення—відриву для різних мод навантаження будуються окремо [5]) та зв'язаний (коли закон зчеплення—відриву є загальним для усього діапазону можливої зміни параметрів моделі у зоні зчеплення [6]). Хоча перший підхід і надає змогу досить точно визначити параметри деяких тріщин у адгезивних швах, загальнішим і фізично виправданішим підходом є другий.

Однією з основних проблем механіки когезивної взаємодії при використанні зв'язаного підходу до побудови закону зчеплення—відриву між берегами тріщини є побудова фізично коректних співвідношень для моделювання нелінійної поведінки матеріалу в околі вершини тріщини [7, 8]. Використання у законі зчеплення—відриву потенціальних співвідношень дозволяє забезпечити незалежність пов'язаного із поширенням тріщини розсію-

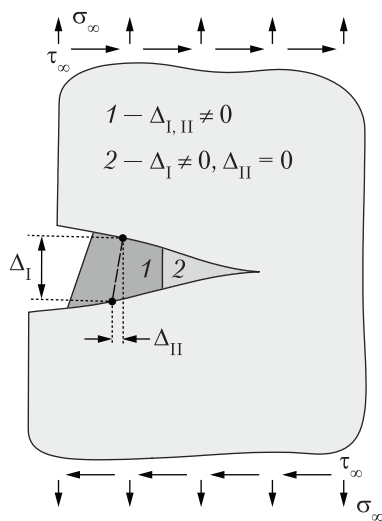


Рис. 1

вання енергії з розвантаженням і повторним завантаженням від самого потенціалу [9], таким чином забезпечуючи фізичну коректність постановки задачі.

У даній роботі розроблено підхід до побудови потенціального співвідношення зчеплення—відриву для моделі когезивної тріщини в умовах змішаного режиму руйнування, розроблено алгоритми розв’язування задач для крайової тріщини в ортотропному тілі та наведено приклади розрахунків за побудованими алгоритмами.

В рамках класичної моделі Баренблата—Дагдейла, яку було запропоновано для моделювання тріщин нормального відриву, розташування вершини зони зчеплення визначається з умови плавності змикання берегів: $l_I = \pi E \varphi_I / (8\sigma_{\max}^2)$ (φ_I — енергія руйнування нормальним відривом, σ_{\max} — міцності нормального зчеплення, E — модуль Юнга). Для визначення довжини нормального зчеплення в загальному

випадку закону зчеплення—відриву було запропоновано точні [10] та наближені числово-аналітичні методи [11, 12]. Зазначену класичну модель можна поширити на випадок тріщини зсуву, для якої довжина зсувного зчеплення $l_{II} = \pi E \varphi_{II} / (8\tau_{\max}^2)$ (φ_{II} — енергія руйнування зсувом, τ_{\max} — міцності зсувного зчеплення). Змішаний режим руйнування (нормальний відрив та поперечний зсув) можна описати за допомогою потенціалу

$$\Psi(\Delta_I, \Delta_{II}) = \sigma_{\max} \Delta_I + \tau_{\max} |\Delta_{II}|.$$

Поле напружень зчеплення T_I, T_{II} описується градієнтом Ψ : $T_I = \partial\Psi / \partial\Delta_I, T_{II} = \partial\Psi / \partial\Delta_{II}$. Потенціальну функцію має бути визначено на півплощині $\Delta_I \geq 0$ з метою виключення перекриття берегів тріщини. За такого типу руйнування довжини нормального та зсувного зчеплень у загальному випадку не збігаються, і для опису процесу руйнування використовують складну зону зчеплення.

Без втрати загальності, покладемо довжину зони відриву більшою за зону зсуву. Тоді, починаючи від вершини фізичної тріщини, виділимо дві зони: 1 — зона з обома ненульовими відривами, 2 — зона з ненульовим нормальним та нульовим від’ємним відривами (рис. 1).

Розв’яжемо задачу про стан граничної рівноваги крайової тріщини змішаного режиму руйнування за ортотропії механічних властивостей напівнескінченної пластини, навантаженої на значній відстані від тріщини.

Побудова розв’язувальних рівнянь. У випадку, коли напрямок осей ортотропії збігається з напрямком координатних осей, зв’язок деформацій з напруженнями має вигляд

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E_{11} - \nu_{12} \sigma_y / E_{11}, \quad \varepsilon_y = -\nu_{12} \sigma_x / E_{11} + \sigma_y / E_{22}, \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G_{12}.$$

Використовуючи принцип суперпозиції, задачу про тріщину в напівнескінченній площині, навантаженої на нескінченності, можна сформулювати в термінах граничної задачі на контурі тріщини. У вихідній задачі напруження $\sigma_{\infty}, \tau_{\infty}$ діють на нескінченності, а до берегів тріщини, перпендикулярної границі півплощини, прикладено напруження $\sigma_y^{\pm}, \tau_{xy}^{\pm}$

(граничні умови), які рівні на нижньому та верхньому берегах. Береги симетрично завантажені самоврівноваженими напруженнями

$$\sigma_y^-(x) = \sigma_y^+(x) = T_I(x), \quad \sigma_y^\pm(x) = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy}^-(x) = \tau_{xy}^+(x) = T_{II}(x), \quad \tau_{xy}^\pm(x) = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \tau_{xy}(x, y).$$

В допоміжній задачі 1 розглядається тіло без тріщини з напруженнями σ_∞ та τ_∞ вздовж лінії тріщини. Граничні умови вихідної задачі можна задовольнити розв'язанням задачі 2 з контурними напруженнями $-\sigma_\infty + T_I$, $-\tau_\infty + T_{II}$. Шукані поля напружень та переміщень вихідної задачі отримуються суперпозицією задач 1 та 2. Розв'язок задачі 1 для крайової тріщини в напівнескінченній півплощині є тривіальним. Розв'язанню задачі 2, у випадку зв'язаності $T_{I,II}$ та розкриття тріщини $\Delta_{I,II}$, і присвячено цю роботу.

Напруження на лінії розташування тріщини [13]

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{E_{11}}{2nk\pi_0} \int_0^\delta K(x, t) \varphi(t) dt, \quad \tau_{xy}(x, 0) = -\frac{E_{11}}{2n\pi_0} \int_0^\delta K(x, t) \psi(t) dt,$$

де

$$K(x, t) = \frac{1}{t-x} - h(x, t), \quad h(x, t) = \sum_{k=1}^3 \frac{a_k}{t + b_k x}, \quad a = \frac{1}{(1-\rho)^2} (2\rho^2, 2, -(1+\rho)^2), \quad b = \left(\rho, \frac{1}{\rho}, 1 \right),$$

$$k = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}, \quad n = \sqrt{m+2k}, \quad m = \frac{E_{11}}{G_{12}} - 2\nu_{12}, \quad \rho = \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - 4k^2}}{m + \sqrt{m^2 - 4k^2}}}.$$

Нормальний та зсувний відриви

$$\Delta_{\begin{Bmatrix} I \\ II \end{Bmatrix}}(x) = \int_x^\delta \begin{Bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} dt.$$

Розглянемо задачу з граничними умовами

$$\sigma_y^\pm(x) = -\sigma_\infty + T_I[\bar{\Delta}(x)], \quad 0 < x < \beta, \\ \tau_{xy}^\pm(x) = -\tau_\infty + T_{II}[\bar{\Delta}(x)], \quad 0 < x < \gamma, \quad \beta, \gamma < \delta;$$

$$T_I(\bar{\Delta}) = T_{II}(\bar{\Delta}) = 0, \quad \bar{\Delta} \notin \Xi,$$

$$\Xi = \{\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_I, \bar{\Delta}_{II}) : 0 \leq \bar{\Delta}_{I,II} \leq 1\}, \quad \bar{\Delta}_I = \Delta_I / \Delta_I^*, \quad \bar{\Delta}_{II} = \Delta_{II} / \Delta_{II}^*, \quad (1)$$

де $\Delta_{I,II}^*$ — параметри тріщиностійкості, що визначаються заданим законом зчеплення—відриву.

Границі зон нормального та зсувного зчеплень визначаються умовами плавності змикання берегів

$$\Delta_I'(\beta) = 0, \quad \Delta_{II}'(\gamma) = 0,$$

причому

$$\Delta_{II}(x) = 0, x \in (\gamma, \beta), \quad \text{якщо } \gamma < \beta;$$

$$\Delta_I(x) = 0, x \in (\beta, \gamma), \quad \text{якщо } \beta < \gamma;$$

Прирівнявши отримані напруження $\sigma_y(x, 0)$ і $\tau_{xy}(x, 0)$ відповідно до $\sigma_x^\pm(x)$ та $\tau_{xy}^\pm(x)$, взятими зі знаком “мінус”, отримаємо сингулярні інтегральні рівняння

$$\begin{aligned} \frac{E_{11}}{2nk\pi} \int_0^\delta K(x, t) \varphi(t) dt &= \sigma_\infty - T_I[\bar{\Delta}(x)], \\ \frac{E_{11}}{2n\pi} \int_0^\delta K(x, t) \psi(t) dt &= \tau_\infty - T_{II}[\bar{\Delta}(x)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Зауважимо, що у випадку навантаження, відмінного від розглянутих на нескінченності зусиль σ_∞ та τ_∞ , ці величини слід змінити у (2) напруженнями на лінії розташування тріщини в неушкодженому тілі.

Розглянемо метод розв’язання системи (2).

Метод розв’язування. Виконаємо в (2) заміну змінних $t = \delta t'$, $x = \delta x'$ ($0 \leq t', x' \leq 1$) та перейдемо до відносних величин

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(t') &= \frac{E_{11}}{2nk\sigma_{\max}} \varphi(\delta t'), & \bar{\sigma}_\infty &= \frac{\sigma_\infty}{\sigma_{\max}}, & \bar{T}_I(x') &= \frac{T_I(\delta x')}{\sigma_{\max}}, \\ \bar{\psi}(t') &= \frac{E_{11}}{2n\tau_{\max}} \psi(\delta t'), & \bar{\tau}_\infty &= \frac{\tau_\infty}{\tau_{\max}}, & \bar{T}_{II}(x') &= \frac{T_{II}(\delta x')}{\tau_{\max}}, \end{aligned}$$

а потім t' і x' перепозначимо через t і x відповідно. Рівняння в (2) набудуть вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 K(x, t) \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}(t) \\ \bar{\psi}(t) \end{Bmatrix} dt = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_\infty - \bar{T}_I[\bar{\Delta}(x)] \\ \bar{\tau}_\infty - \bar{T}_{II}[\bar{\Delta}(x)] \end{Bmatrix}, \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

відносно розкриття —

$$\bar{\Delta}_I(x) = \delta \ell_1^{-1} \int_{x/\delta}^1 \bar{\varphi}(t) dt, \quad \bar{\Delta}_{II}(x) = \delta \ell_2^{-1} \int_{x/\delta}^1 \bar{\psi}(t) dt$$

$$\ell_1 = \frac{E_{11} \Delta_I^*}{2nk\sigma_{\max}} = \frac{c_1 E_{11} \Phi_I}{2nk \sigma_{\max}^2}, \quad c_1 = \frac{\sigma_{\max} \Delta_I^*}{\Phi_I};$$

$$\ell_2 = \frac{E_{11} \Delta_{II}^*}{2n\tau_{\max}} = \frac{c_2 E_{11} \Phi_{II}}{2n \tau_{\max}^2}, \quad c_2 = \frac{\tau_{\max} \Delta_{II}^*}{\Phi_{II}}.$$

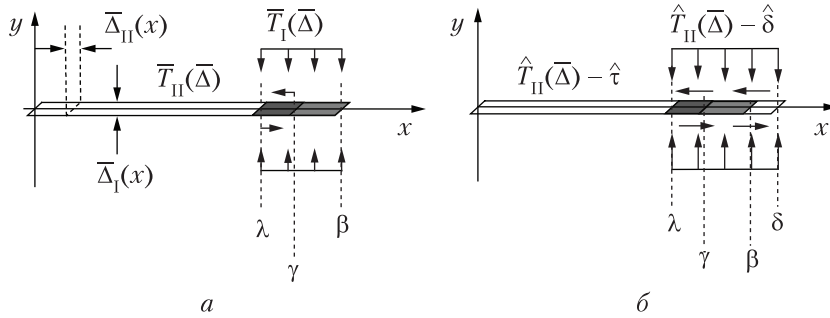


Рис. 2

Умову плавності змикання берегів можна задовольнити заміною відносних зчеплень $\bar{T}_{I,II}$ (рис. 2, а) різницею подовжених на від'ємний відрив напружень $\hat{T}_{I,II}$ та додаткових напружень $\hat{\sigma}$ та $\hat{\tau}$ відповідно [11, 12, 14] (рис. 2, б):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 K(x,t) \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}(t) \\ \bar{\psi}(t) \end{Bmatrix} dt = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_\infty - \hat{T}_I[\bar{\Delta}(x)] + \hat{\sigma}(x) \\ \bar{\tau}_\infty - \hat{T}_{II}[\bar{\Delta}(x)] + \hat{\tau}(x) \end{Bmatrix}, \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

додаткові напруження визначаються умовою невід'ємності відривів.

У випадку дослідження стану граничної рівноваги визначальна система доповнюється рівнянням

$$\delta \max \left\{ \ell_1^{-1} \int_0^{\lambda/\delta} \bar{\varphi}(\tau) d\tau, \ell_2^{-1} \int_0^{\gamma/\delta} \bar{\psi}(\tau) d\tau \right\} = 1. \quad (5)$$

Розв'яжемо задачу методом колокації [14]. Невідомі функції $\bar{\varphi}(t)$ і $\bar{\psi}(t)$ знайдемо у вигляді добутку вагової функції $w(t) = (1-t)^{-1/2}$ і кусково-лінійних функцій $g(t)$ і $h(t)$ відповідно:

$$\begin{Bmatrix} g(t) \\ h(t) \end{Bmatrix} = \frac{t-b_k}{\Delta b} \begin{Bmatrix} g_{k+1} \\ h_{k+1} \end{Bmatrix} + \frac{b_{k+1}-t}{\Delta b} \begin{Bmatrix} g_k \\ h_k \end{Bmatrix}, \quad t \in (t_k, t_{k+1}),$$

де квадратурні точки $b_k = (k-1) \cdot \Delta b$, $k = 1, \dots, n$, $\Delta b = 1/(n-1)$.

Після інтегрування в (4) і (5) отримаємо визначальну систему для дискретних щільностей розкриття $g = (g_1, \dots, g_{n-1}, 0)^T$ і $h = (h_1, \dots, h_{n-1}, 0)^T$

$$\begin{aligned} Jg &= -\bar{\sigma}_\infty \mathbf{1} + \hat{T}_I(\delta \ell_1^{-1} Vg, \delta \ell_2^{-1} Vh) - \hat{\sigma}, \quad Vg \geq 0, \\ Jh &= -\bar{\tau}_\infty \mathbf{1} + \hat{T}_{II}(\delta \ell_1^{-1} Vg, \delta \ell_2^{-1} Vh) - \hat{\tau}, \quad Vh \geq 0, \\ \delta \max \{ \ell_1^{-1} V_p g, \ell_2^{-1} V_p h \} &= 1, \end{aligned} \quad (6)$$

процедуру обчислення матриць J та V описано в [14]; $\mathbf{1}$ і $\mathbf{0}$ — вектори-стовпці n одиниць і нулів відповідно; V_p — вектор-рядок, що складається з елементів p -го рядка матриці V ; індекс p відповідає точці колокації, що збігається з λ/δ .

Для розв'язання (6) в [12] було запропоновано ітеративну процедуру. На кожному її кроці розв'язується система нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_m \mathbf{g} &= -\bar{\sigma}_\infty \mathbf{1} + \hat{T}_I(\delta \ell_1^{-1} \mathbf{V}_m \mathbf{g}, \delta \ell_2^{-1} \mathbf{V}_m \mathbf{h}), \quad m \in P_I \\ \mathbf{V}_m \mathbf{g} &= \mathbf{0}, \quad m \in M_I \\ \mathbf{J}_m \mathbf{h} &= -\bar{\tau}_\infty \mathbf{1} + \hat{T}_{II}(\delta \ell_1^{-1} \mathbf{V}_m \mathbf{g}, \delta \ell_2^{-1} \mathbf{V}_m \mathbf{h}), \quad m \in P_{II} \\ \mathbf{V}_m \mathbf{h} &= \mathbf{0}, \quad m \in M_{II} \\ \delta \max\{\ell_1^{-1} \mathbf{V}_p \mathbf{g}, \ell_2^{-1} \mathbf{V}_p \mathbf{h}\} &= 1, \end{aligned} \quad (7)$$

Вектори-рядки \mathbf{J}_m і \mathbf{V}_m – m -ті рядки матриць J і V відповідно. Для першої ітерації можна взяти $P_{I, II} = \{n-1\}$, $P_I \cup M_I = P_{II} \cup M_{II} = \{1, \dots, n-1\}$.

Для визначених з (7) векторів \mathbf{g} та \mathbf{h} , а також критичного рівня зовнішнього навантаження, додаткові напруження обчислимо наступним чином:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= -J\mathbf{g} - \bar{\sigma}_\infty \mathbf{1} + \hat{T}_I(\delta \ell_1^{-1} V\mathbf{g}, \delta \ell_2^{-1} V\mathbf{h}), \\ \hat{\tau} &= -J\mathbf{h} - \bar{\tau}_\infty \mathbf{1} + \hat{T}_{II}(\delta \ell_1^{-1} V\mathbf{g}, \delta \ell_2^{-1} V\mathbf{h}). \end{aligned}$$

На наступних кроках індекси приймають такі значення:

$$\begin{aligned} M_I &= \{m : \hat{\sigma}_m \geq 0 \vee \bar{\Delta}_I(t_m) \leq 0\}, \quad M_{II} = \{m : \hat{\tau}_m \geq 0 \vee \bar{\Delta}_{II}(t_m) \leq 0\}, \\ P_I &= \{m : \hat{\sigma}_m < 0 \wedge \bar{\Delta}_I(t_m) > 0\}, \quad P_{II} = \{m : \hat{\tau}_m < 0 \wedge \bar{\Delta}_{II}(t_m) > 0\}. \end{aligned}$$

Процедура припиняється, коли усі компоненти векторів $\bar{\Delta}$ та $\bar{\tau}$ стають невід'ємними.

Закон зчеплення—відриву. Задамо поле напружень зчеплення потенціалом

$$\Psi(\bar{\Delta}) = \varphi_I f_1(\bar{\Delta}_I) [1 - f_2(\bar{\Delta}_{II})] + \varphi_{II} f_2(\bar{\Delta}_{II}), \quad (8)$$

побудованим на основі законів зчеплення—відриву для простих режимів руйнування,

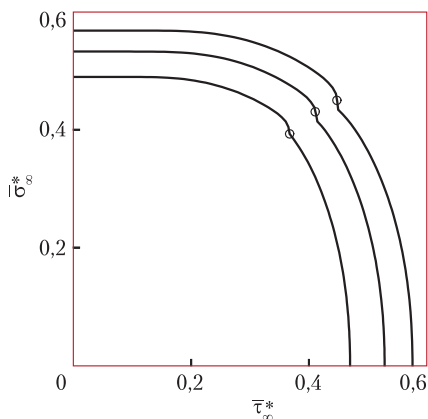


Рис. 3

$$\begin{aligned} f_1(x) &= c_1 \int_0^x t_1(\xi) d\xi, \quad t_1(x) = \bar{T}_I(x, 0), \\ f_2(y) &= c_2 \int_0^y t_2(\xi) d\xi, \quad t_2(y) = \bar{T}_{II}(0, y), \end{aligned}$$

$T_{I, II}(\bar{\Delta})$ – нормальне та зсувне зчеплення, які визначаються диференціюванням потенціалу:

$$\begin{aligned} \bar{T}_I(\bar{\Delta}) &= t_1(\bar{\Delta}_I) [1 - f_2(\bar{\Delta}_{II})], \\ \bar{T}_{II}(\bar{\Delta}) &= [1 - \tilde{\varphi} f_1(\bar{\Delta}_I)] t_2(\bar{\Delta}_{II}), \quad \tilde{\varphi} = \varphi_I / \varphi_{II}. \end{aligned} \quad (9)$$

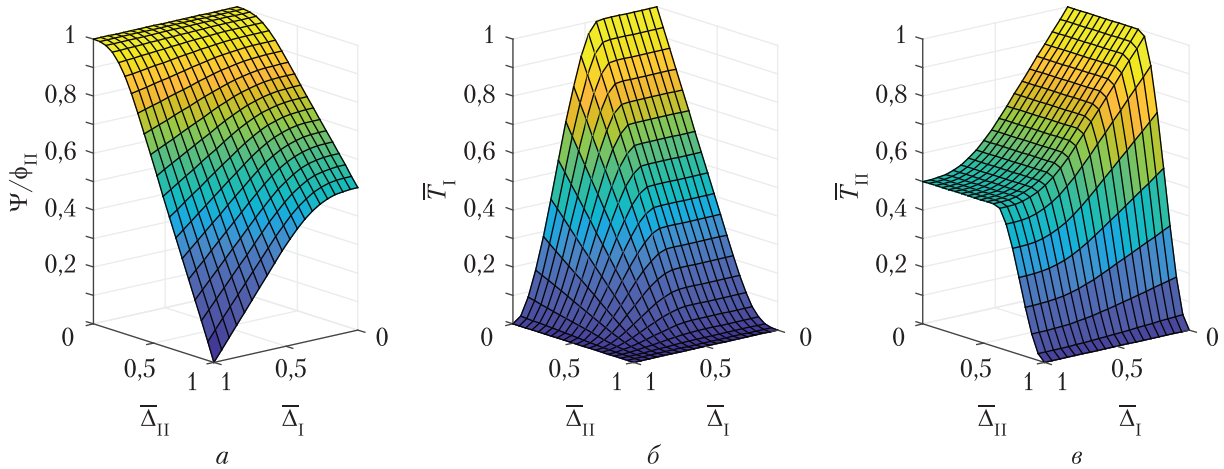


Рис. 4

Недоліком потенціалу (8) вважається [8] високий рівень зсувного зчеплення при критичному рівні нормального відриву ($\bar{T}_{II}(1, \bar{\Delta}_{II}) \neq 0$).

При реалізації числового методу розв'язання системи нелінійних рівнянь (7) важливо знайти її матрицю Якобі. З (9) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}_I(x, y)}{\partial x} &= t'_1(x)[1 - f_2(y)], & \frac{\partial \bar{T}_{II}(x, y)}{\partial x} &= -\tilde{\varphi}c_1 t_1(x)t_2(y), \\ \frac{\partial \bar{T}_I(x, y)}{\partial y} &= -c_2 t_1(x)t_2(y), & \frac{\partial \bar{T}_{II}(x, y)}{\partial y} &= [1 - \tilde{\varphi}f_1(x)]t'_2(y). \end{aligned}$$

Для числових розв'язків візьмемо обидва закони зчеплення—відриву простих режимів руйнування в трапецоїдальній формі

$$t_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, a_i], \\ \frac{(1-x)^2(1+2x-3a_i)}{(1-a_i)^3}, & x \in (a_i, 1], \end{cases}$$

тоді

$$f_i(x) = \frac{1+a_i}{2} \begin{cases} x, & x \in [0, a_i], \\ \frac{x^4 - 2(1+a_i)x^3 + 6a_ix^2 + 2(1-3a_i)x + a_i^3(2-a_i)}{2(1-a_i)^3}, & x \in (a_i, 1], \end{cases}$$

$$t'_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, a_i], \\ -\frac{6(1-x)(x-a_i)}{(1-a_i)^3}, & x \in (a_i, 1]. \end{cases}$$

Числові розв'язки та висновки. На рис. 3 зображені рівні граничного навантаження (віднесеного до міцності зчеплення) для $l_1 = 0,6$ см, $l_2 = 0,5$ см (крива 1), $l_1 = 0,5$ см, $l_2 = 0,4$ см (крива 2), $l_1 = 0,4$ см, $l_2 = 0,3$ см (крива 3). Інші параметри задачі: $a_1 = 0,4$, $a_2 = 0,6$, $\tilde{\varphi} = 0,5$ (параметри закону зчеплення відриву, який проілюстровано на рис. 4), $\rho = 0,2$ (параметр ортотропії), $\lambda = 1$ см, $\delta = 2$ см (геометричні параметри). Точка на кривих відповідає зміні режиму руйнування.

Таким чином, в роботі побудовано визначальні рівняння для дослідження напружено-деформованого стану ортотропної півплощини з крайовою тріщиною, перпендикулярною до границі півплощини, з урахуванням зони передруйнування у вершині тріщини (система (2)). Рівняння побудовано для моделі складної зони зчеплення для довільного закону зчеплення—відриву, що описує поведінку частково зруйнованого матеріалу в зоні передруйнування. Представлено ефективний метод розв'язування отриманих рівнянь в умовах стану граничної рівноваги. Вхідними параметрами розв'язку є невелика кількість змінних: дві характерні довжини $l_{1,2}$, параметри форми законів простих режимів руйнування $a_{1,2}$, відношення енергій руйнування двох режимів $\tilde{\varphi}$, параметр ортотропії ρ та два геометричних параметри довжини фізичної тріщини λ та її фіктивної довжини δ . Розв'язок проілюстровано локусом руйнування, який характеризує рівні граничних навантажень при зростанні σ_∞ та τ_∞ за лінійним законом. Для побудови числового розв'язку використано потенціальне поле зчеплення (потенціал наведено в (8)), що визначається законами простих режимів руйнування без введення параметрів об'єднання цих законів для дослідження змішаного режиму. Результати роботи дають можливість ефективно вивчити вплив параметрів форми закону зчеплення—відриву для змішаного режиму руйнування, що може бути предметом подальших досліджень.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Dimitri R., Trullo M., Zavarise G., De Lorenzis L. A consistency assessment of coupled cohesive zone models for mixed-mode debonding problems. *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2014. **8**, № 29. P. 266–283.
2. Högberg J.L. Mixed mode cohesive law. *Int. J. Fract.* 2006. **141**, № 3–4. P. 549–559. <https://doi.org/10.1007/s10704-006-9014-9>
3. Jensen S.M., Martos M.J., Bak B.L.V., Lindgaard E. Formulation of a mixed-mode multilinear cohesive zone law in an interface finite element for modelling delamination with r-curve effects. *Composite Struct.* 2019. **216**. P. 477–486. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.029>
4. de Moura M., Gonçalves J., Silva F. A new energy based mixed-mode cohesive zone model. *Int. J. Solids and Struct.* 2016. **102–103**. P. 112–119. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.10.012>
5. Li S., Thouless M.D., Waas A.M., Schroeder J.A., Zavattieri P.D. Mixed-mode cohesive-zone models for fracture of an adhesively bonded polymer–matrix composite. *Eng. Fract. Mech.* 2006. **73**, № 1. P. 64–78. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.07.004>
6. Tvergaard V., Hutchinson J.W. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*. 1992. **40**, № 6. P. 1377–1397. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(92\)90020-3](https://doi.org/10.1016/0022-5096(92)90020-3)
7. Tvergaard V. Predictions of mixed mode interface crack growth using a cohesive zone model for ductile fracture. *J. Mech. Phys. Solids*. 2004. **52**, № 4. P. 925–940. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00115-7](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00115-7)
8. Park K., Paulino G.H. Cohesive zone models: A critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. *Appl. Mech. Reviews*. 2013. **64**, № 6. 060802–060802–20. <https://doi.org/10.1115/1.4023110>
9. Park K., Paulino G.H., Roesler J.R. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 2009. **57**, № 6. P. 891–908. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.10.003>

10. Selivanov M.F. Subcritical and critical states of a crack with failure zones. *Appl. Math. Model.* 2019. **72**. P. 104–128. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.013>
11. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications. *Int. J. Fract.* 2018. **212**, № 1. P. 113–121. <https://doi.org/10.1007/s10704-018-0295-6>
12. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O., Kononchuk O.P. Determination of crack opening displacement and critical load parameter within a cohesive zone model. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2018. **31**, № 2. P. 569–586. <http://doi.org/10.1007/s00161-018-0712-0>
13. Селіванов М.Ф. Крайова тріщина із зоною зчеплення в ортотропному тілі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019, № 6, С. 25–32. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.06.025>
14. Селіванов М.Ф. Крайова тріщина із зоною зчеплення. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 3. С. 46–54. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.046>

Надійшло до редакції 09.07.2019

REFERENCES

1. Dimitri, R., Trullo, M., Zavarise, G. & De Lorenzis, L. (2014). A consistency assessment of coupled cohesive zone models for mixed-mode debonding problems. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 8, No. 29, pp. 266-283.
2. Högberg, J. L. (2006). Mixed mode cohesive law. *Int. J. Fract.*, 141, No. 3-4, pp. 549-559. <https://doi.org/10.1007/s10704-006-9014-9>
3. Jensen, S. M., Martos, M. J., Bak, B. L. V. & Lindgaard, E. (2019). Formulation of a mixed-mode multilinear cohesive zone law in an interface finite element for modelling delamination with r-curve effects. *Composite Struct.*, 216, pp. 477-486. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.029>
4. de Moura, M., Gonçalves, J. & Silva, F. (2016). A new energy based mixed-mode cohesive zone model. *Int. J. Solids and Struct.*, 102-103, pp. 112-119, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.10.012>
5. Li, S., Thouless, M. D., Waas, A. M., Schroeder, J. A. & Zavattieri, P. D. (2006). Mixed-mode cohesive-zone models for fracture of an adhesively bonded polymer–matrix composite. *Eng. Fract. Mech.*, 73, No. 1, pp. 64-78. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.07.004>
6. Tvergaard, V. & Hutchinson, J. W. (1992). The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids.*, 40, No. 6, pp. 1377-1397. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(92\)90020-3](https://doi.org/10.1016/0022-5096(92)90020-3),
7. Tvergaard, V. (2004). Predictions of mixed mode interface crack growth using a cohesive zone model for ductile fracture. *J. Mech. Phys. Solids.*, 52, No. 4, pp. 925-940. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00115-7](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00115-7)
8. Park, K. & Paulino, G. H. (. Cohesive zone models: A critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. *Appl. Mech. Reviews*, 2013. 64, No. 6, 060802-060802-20. doi: <https://doi.org/10.1115/1.4023110>
9. Park, K., Paulino, G. H. & Roesler, J. R. (2009). A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. *J. Mech. Phys. Solids.*, 57, No. 6, pp. 891-908. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.10.003>
10. Selivanov, M. F. (2019). Subcritical and critical states of a crack with failure zones. *Appl. Math. Model.*, 72, pp. 104-128. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.03.013>
11. Selivanov, M. F. & Chornoivan, Y. O. (2018). A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications. *Int. J. Fract.*, 212, No. 1, pp. 113-121. <https://doi.org/10.1007/s10704-018-0295-6>
12. Selivanov, M. F., Chornoivan, Y. O. & Kononchuk, O. P. (2018). Determination of crack opening displacement and critical load parameter within a cohesive zone model. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 31, No. 2, pp. 569-586. <http://doi.org/10.1007/s00161-018-0712-0>
13. Selivanov, M. F. (2019). An edge crack with cohesive zone in orthotropic body. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr.*, No. 6, pp. 25-35 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.06.025>
14. Selivanov, M. F. (2019). An edge crack with cohesive zone. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr.*, No. 3, pp. 46-54 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.046>

Received 09.07.2019

М.Ф. Селиванов, Ю.А. Черноиван

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ СЛОЖНОЙ ЗОНЫ СЦЕПЛЕНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ СМЕШАННОГО РЕЖИМА РАЗРУШЕНИЯ В ОРТОТРОПНОМ ТЕЛЕ

Рассмотрена задача теории упругости для полубесконечного ортотропного тела с краевой, нормальной к границе тела, трещиной. Предполагается, что тело пребывает под действием двусосного нагружения, приложенного на значительном расстоянии от трещины. Для исследования разработана и использована модель зоны сцепления в вершине трещины для смешанного режима разрушения. Закон сцепления—отрыва в разработанной модели предполагает связанность нормальных и касательных напряжений в потенциальной форме. Построен алгоритм решения задачи определения параметров предельного равновесия трещины. Приведен пример вычисления предельного нагружения для разных параметров задачи.

Ключевые слова: смешанный режим разрушения, модель сложной зоны сцепления, трещина в ортотропном теле, закон сцепления—отрыва для смешанного режима разрушения

M.F. Selivanov, Y.O. Chornoivan

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: mfs@ukr.net, yurchor@ukr.net

APPLICATION OF THE COMPLEX COHESIVE ZONE MODEL TO THE EDGE MIXED-MODE CRACK PROBLEM FOR ORTHOTROPIC MEDIA

The elasticity problem for a semiinfinite orthotropic body with an edge crack that is normal to the boundary is studied. The crack is aligned with one of the orthotropic material axes, and a biaxial stress field is applied at infinity. The multiple cohesive zone model developed to study the mixed-mode fracture is used to determine the critical stress parameters, as well as the cohesive stress field. The difference of mode I and mode II cohesive lengths is inherent to the model.

The problem is formulated in terms of integral equations for the unknown displacement discontinuity along the crack line. The collocation method, which is applied to two singular integral equations with generalized Cauchy kernel, gives the equations for critical loads and respective discrete cohesive tractions and separations. These equations are non-linear, as a dependence of cohesive stresses on the crack opening is taken according to the potential-based traction—separation law. An algorithm for determining the parameters of limiting equilibrium of a mixed-mode crack is constructed. An iterative procedure is used to enforce the smooth crack closure for the two pure fracture modes, and two cohesive lengths can be determined with the precision of a mesh size.

An example of calculating the critical state parameters and the corresponding cohesive stress field is given. The numerical example is built for the traction—separation law based on the trapezoidal laws of pure modes that are coupled without parameters of mode-mixity.

Keywords: mixed-mode fracture, multiple cohesive zone model, crack in an orthotropic body, traction—separation law for a mixed-mode crack.