

---

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.11.041>

УДК 539.37

**Є.А. Сторожук, В.А. Максимюк, І.С. Чернишенко**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: stevan@ukr.net

## **Концентрація напружень в області прямокутного отвору на бічній поверхні нелінійно-пружної ортотропної конічної оболонки**

*Представлено членом-кореспондентом НАН України І.С. Чернишенком*

*Дано постановку і розроблено чисельну методіку розв'язання фізично нелінійних задач статички для композитної конічної оболонки, ослабленої прямокутним отвором. Систему розв'язувальних рівнянь отримано на основі співвідношень теорії тонких оболонок Кірхгофа—Лява і деформаційної теорії пластичності анізотропних середовищ з використанням методів Ньютона, додаткових напружень і скінченних елементів. Досліджено вплив нелінійної пружності матеріалу і розташування прямокутного отвору відносно торців на концентрацію напружень в ортотропній конічній оболонці, навантаженої осьовими розтягувальними силами.*

**Ключові слова:** *композитна конічна оболонка, прямокутний отвір, статичне навантаження, нелінійно-пружний стан, концентрація напружень, метод скінченних елементів.*

Конічні оболонки використовуються при проектуванні корпусів ракет (головний обтічник, міжступеневий і хвостовий відсіки), доменних печей (кожух купола корпусу), телевізійних веж (опора) тощо. Досить часто з конструктивних або технологічних міркувань такі оболонки мають отвори і вирізи різноманітної форми. Значна частина результатів з вивчення концентрації напружень біля отворів в конічних оболонках, виготовлених з металевих і композитних матеріалів, отримана на основі розв'язання лінійно-пружних задач і найбільш повно викладена в узагальнюючих монографіях [1, 2].

Нелінійні задачі про концентрацію напружень в конічних оболонках розглянуті в обмеженій кількості робіт. Майже всі результати в цих роботах отримані для випадку, коли оболонки виготовлені з металів або їх сплавів. Так, за допомогою варіаційно-різницевого методу досліджено пружнопластичний стан конічної оболонки з прямокутним [3] і круговим [4] отворами. Вплив пластичних деформацій і скінченних прогинів на напружено-деформований стан (НДС) ізотропної конічної оболонки, ослабленої круговим або еліптичним отвором, вивчено в роботах [5, 6]. Останнім часом почали з'являтися публікації, присвячені розв'язанню нелінійних крайових задач для конічних оболонок з двома круго-

© Є.А. Сторожук, В.А. Максимюк, І.С. Чернишенко, 2019

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 11: 41–48

41

вими отворами при дії статичних навантажень [7, 8]. Чисельні дослідження проведені з використанням методу скінченних елементів (МСЕ). І лише в роботі [9] варіаційно-різнице-вим методом досліджено нелінійно-пружне деформування ортотропної конічної оболонки з круговим вирізом. Тому в роботі дано постановку нелінійно-пружних задач для композитних конічних оболонок з прямокутним отвором при дії статичного навантаження, розроблено методику чисельного розв'язання даного класу задач і представлено конкретні числові результати дослідження концентрації напружень в ортотропній конічній оболонці, ослабленій прямокутним отвором і навантаженій розтягувальними зусиллями.

**Постановка задачі. Основні співвідношення.** Розглянемо зрізану конічну оболонку з товщиною  $h$ , висотою  $H$  і радіусами верхньої та нижньої основ  $r_1$  і  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ), яка виготовлена з композитного матеріалу (КМ) і ослаблена прямокутним отвором (рис. 1).

Вважаємо, що при підвищених рівнях діючих поверхневих і крайових навантажень властивості матеріалу оболонки описуються нелінійними діаграмами деформування.

Основні співвідношення запишемо у криволінійній ортогональній системі координат  $(l, \vartheta, \gamma)$ , лінії  $l, \vartheta$  якої збігаються з лініями головних кривин оболонки. Координату  $\gamma$  будемо відраховувати по нормалі до серединної поверхні оболонки.

Вирази для компонент мембранної ( $\epsilon_{ij}$ ) і згинної ( $\mu_{ij}$ ) деформацій представимо у векторній формі згідно з теорією непологих оболонок, в якій виконуються гіпотези Кірхгофа–Лява [2, 8]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial \bar{u}}{A_l \partial l} \cdot \bar{e}_l; & \epsilon_{22} &= \frac{\partial \bar{u}}{A_\vartheta \partial \vartheta} \cdot \bar{e}_\vartheta; & \epsilon_{12} &= \frac{\partial \bar{u}}{A_l \partial l} \cdot \bar{e}_\vartheta + \frac{\partial \bar{u}}{A_\vartheta \partial \vartheta} \cdot \bar{e}_l; \\ \mu_{11} &= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{A_l \partial l} \cdot \bar{e}_l; & \mu_{22} &= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{A_\vartheta \partial \vartheta} \cdot \bar{e}_\vartheta; & 2\mu_{12} &= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{A_l \partial l} \cdot \bar{e}_\vartheta - \frac{\partial \bar{\varphi}}{A_\vartheta \partial \vartheta} \cdot \bar{e}_l; \\ e_{11} &= \epsilon_{11} + \gamma \mu_{11}; & e_{22} &= \epsilon_{22} + \gamma \mu_{22}; & e_{12} &= \epsilon_{12} + 2\gamma \mu_{12}, \end{aligned} \quad (1)$$

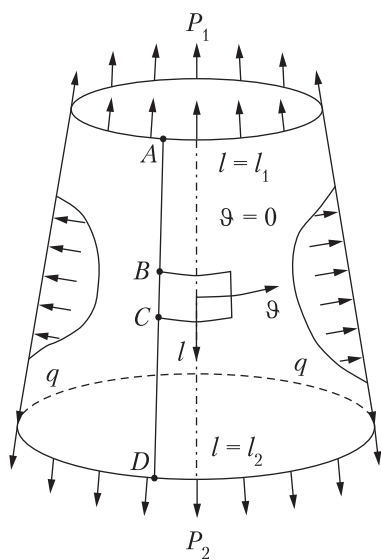


Рис. 1

де  $A_l, A_\vartheta$  – параметри Ламе;  $\bar{u} = u\bar{e}_l + v\bar{e}_\vartheta + w\bar{n}$  – вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки;  $\bar{e}_l, \bar{e}_\vartheta, \bar{n}$  – орти криволінійної ортогональної системи координат  $(l, \vartheta, \gamma)$ ;  $\bar{\varphi} = \varphi_l \bar{e}_l + \varphi_\vartheta \bar{e}_\vartheta$  – вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній, які визначаються за формулами:

$$\varphi_l = \frac{\partial \bar{u}}{A_l \partial l} \cdot \bar{n}; \quad \varphi_\vartheta = \frac{\partial \bar{u}}{A_\vartheta \partial \vartheta} \cdot \bar{n}. \quad (2)$$

Припускаючи, що навантаження просте, скористаємося нелінійними фізичними співвідношеннями деформаційної теорії пластичності анізотропних середовищ, у якій прийнята умова пластичності вигляду [10]:

$$f = \frac{1}{2}(q_{1111}\sigma_{11}^2 + q_{2222}\sigma_{22}^2 + 2q_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 4q_{1212}\sigma_{12}^2) = f_s. \quad (3)$$

Тут  $f_s$  – додатна матеріальна константа.

Також прийемо, що матеріал зміцнюється тільки тоді, коли виконується робота пластичних деформацій

$$W_p = \int_0^{e_{11}^p} \sigma_{11} de_{11}^p + \int_0^{e_{22}^p} \sigma_{22} de_{22}^p + \int_0^{e_{12}^p} \sigma_{12} de_{12}^p, \quad (4)$$

тобто при  $f \geq f_s$

$$f = f(W_p) \text{ та } W_p = W_p(f). \quad (5)$$

Залежності між компонентами напружень і деформацій при плоскому напруженому стані у випадку збігу напрямків ортотропії матеріалу з напрямками осей координат  $(l, \vartheta, \gamma)$  мають вигляд [10]:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left( \frac{1}{E_{11}} + \Psi q_{1111} \right) \sigma_{11} + \left( -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} + \Psi q_{1122} \right) \sigma_{22}; \\ e_{22} &= \left( -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} + \Psi q_{2211} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{E_{22}} + \Psi q_{2222} \right) \sigma_{22}; \\ e_{12} &= \left( \frac{1}{G_{12}} + 4\Psi q_{1212} \right) \sigma_{12}, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $E_{11}, E_{22}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}$  – пружні сталі композита;  $q_{1111}, q_{2222}, q_{1122}, q_{1212}$  – компоненти тензора, що враховує анізотропію нелінійних властивостей КМ;  $\Psi(f)$  – функція, яка описує нелінійне деформування матеріалу і обчислюється за формулою [10]:

$$\Psi = \frac{1}{2\sqrt{f}} \int_{f_s}^f \frac{W_p'}{\sqrt{f}} df.$$

Відзначимо, що функція зміцнення  $W_p = W_p(f)$  і значення параметрів  $q_{1111}, q_{2222}, q_{1122}, q_{1212}$  визначаються за допомогою методики, викладеної в роботах [10, 11].

**Методика розв'язання фізично нелінійних крайових задач для композитних конічних оболонок з прямокутним отвором.** Коротко викладемо чисельну методику розв'язання задач статки для ортотропних оболонок, ослаблених отвором, з врахуванням фізичної нелінійності, яка базується на використанні методу Ньютона, методу додаткових напружень і МСЕ.

Фізичні співвідношення (6) є істотно нелінійними й нерозв'язними аналітично відносно напружень. Запишемо рівняння (6) у вигляді:

$$F_i(\{\sigma\}, \{e\}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7)$$

де  $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$ ,  $\{e\} = \{e_{11}, e_{22}, e_{12}\}^T$  – вектори напружень і деформацій у довільній точці оболонки.

Розв'яжемо нелінійну систему (7) відносно напружень методом Ньютона

$$F_i + \frac{\partial F_i}{\partial \{\sigma^j\}} \{\Delta \sigma^j\} = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad \{\sigma^{j+1}\} = \{\sigma^j\} + \{\Delta \sigma^j\}, \quad (8)$$

вибираючи за початкове наближення напруження для лінійно-пружного тіла  $\{\sigma^0\}$ .

Після чисельного обернення рівнянь (6) відносно напружень будемо мати залежності вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}(e_{11}, e_{22}, e_{12}); \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}(e_{11}, e_{22}, e_{12}); \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12}(e_{11}, e_{22}, e_{12}). \end{aligned} \quad (9)$$

Представимо вирази для напружень (9) у вигляді суми лінійних ( $\sigma_{ij}^0$ ) і нелінійних ( $\sigma_{ij}^H$ ) доданків:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^H; \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^0 + \sigma_{22}^H; \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^0 + \sigma_{12}^H; \\ \sigma_{11}^0 &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22}; \quad \sigma_{22}^0 = c_{21}e_{11} + c_{22}e_{22}; \quad \sigma_{12}^0 = c_{33}e_{12}; \\ \sigma_{11}^H &= \sigma_{11} - \sigma_{11}^0; \quad \sigma_{22}^H = \sigma_{22} - \sigma_{22}^0; \quad \sigma_{12}^H = \sigma_{12} - \sigma_{12}^0; \\ c_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{21} = c_{12} = \frac{E_{11}\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_{33} = G_{12}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для внутрішніх зусиль і моментів  $\{m\} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$  з врахуванням рівностей (9) при довільному виборі координатної поверхні маємо вирази:

$$\begin{aligned} \{m\} &= \{m^0\} + \{m^H\}; \quad \{m^0\} = [D]\{\epsilon\}; \\ T_{ij}^H &= \int_{\Delta-h/2}^{\Delta+h/2} \sigma_{ij}^H d\gamma; \quad M_{ij}^H = \int_{\Delta-h/2}^{\Delta+h/2} \sigma_{ij}^H \gamma d\gamma \quad (i, j = 1, 2), \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}, \mu_{11}, \mu_{22}, 2\mu_{12}\}^T$  – вектор компонентів мембранної та згинної деформації оболонки;  $\Delta$  – відхилення серединної поверхні від координатної поверхні;  $[D]$  – матриця жорсткостей оболонки, елементи якої обчислюються за формулами:

$$d_{kl} = c_{kl}h; \quad d_{3+k, l} = d_{k, 3+l} = c_{kl}h\Delta; \quad d_{3+k, 3+l} = c_{kl} \left( \frac{h^3}{12} + h\Delta^2 \right) \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (12)$$

Систему розв'язувальних рівнянь отримаємо з варіаційного рівняння Лагранжа

$$\iint_{\Sigma} \delta\{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} d\Sigma = \delta A_p - \iint_{\Sigma} \delta\{\epsilon\}^T \{m^H\} d\Sigma. \quad (13)$$

Тут  $A_p$  — робота зовнішніх сил;  $\Sigma$  — серединна поверхня оболонки.

Методом додаткових напружень вихідна фізично нелінійна задача (13) зводиться до послідовності лінійно-пружних задач, які розв'язуються модифікованим МСЕ. Особливість запропонованого варіанту МСЕ полягає в тому, що вектор кутів повороту  $\bar{\phi}$  не визначається за допомогою формул (2) для  $\phi_l$  і  $\phi_\vartheta$ , як це прийнято в традиційному МСЕ для тонких оболонок, а апроксимується біквдратичним поліномом серендипового типу з виконанням гіпотез Кірхгофа—Лява у вузлах скінченного елемента (СЕ) [8, 12].

З рівняння Лагранжа (13) отримуємо систему алгебраїчних рівнянь, яка моделює нелінійно-пружне деформування композитної конічної оболонки, ослабленої прямокутним отвором:

$$[K]\{U\} = \{P\} - \{\Omega\}, \quad (14)$$

де  $[K]$  — глобальна матриця жорсткості лінійно-пружної оболонки;  $\{U\}$ ,  $\{P\}$ ,  $\{\Omega\}$  — глобальні вектори вузлових ступенів свободи, навантажень і нелінійностей.

Відзначимо, що для елемента ( $e$ ) матриця жорсткості та вектори нелінійностей і навантажень обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] &= \iint_{\Sigma^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D] [B^{(e)}] d\Sigma; \quad \{\Omega^{(e)}\} = \iint_{\Sigma^{(e)}} [B^{(e)}]^T \{m^H\} d\Sigma; \\ \{P^{(e)}\} &= \iint_{\Sigma_p^{(e)}} [f^{(e)}]^T \{p\} d\Sigma + \int_{\Gamma_k^{(e)}} [f_k^{(e)}]^T \{m_k\} ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут  $[f^{(e)}]$ ,  $[f_k^{(e)}]$  — матриці функцій форми переміщень точок внутрішньої області та контуру елемента ( $e$ );  $[B^{(e)}]$  — матриця функцій форми компонент деформації оболонки;  $\{p\}$ ,  $\{m_k\}$  — вектори поверхневих і крайових сил;  $\Gamma_k^{(e)}$  — частина контуру елемента ( $e$ ), на якій задані крайові сили.

**Числові результати і їх аналіз.** Дослідимо нелінійно-пружний стан конічної оболонки з прямокутним отвором, яка виготовлена з ортотропного органопластика та розтягується осьовими зусиллями  $P_1$  і  $P_2$ , розподіленими на торцях  $l = l_1$  і  $l = l_2$ .

На основі діаграм деформування побудована функція зміцнення органопластика  $W_p(f)$  і визначені його фізико-механічні параметри [10, 11], які характеризують лінійно-пружну стадію деформування:

$$E_{11} = 25,3 \text{ ГПа}; \quad E_{22} = 38,4 \text{ ГПа}; \quad G_{12} = 7,6 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12} = 0,238$$

і нелінійно-пружну:

$$\Psi = \frac{cn}{(2n-1)f_s} \left[ \left( \frac{f}{f_s} \right)^{n-1} - \sqrt{\frac{f_s}{f}} \right];$$

$$c = 0,137 \text{ МПа}; \quad n = 3; \quad f_s = 0,4 \cdot 10^6 \text{ МПа};$$

$$q_{1111} = 4,2; \quad q_{2222} = 2,0; \quad q_{1122} = 0,33; \quad q_{1212} = 13,0.$$

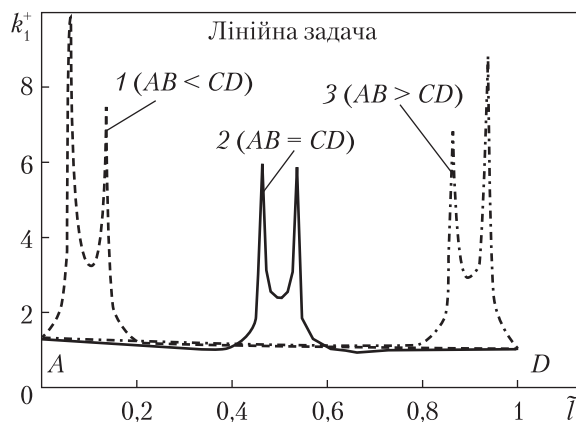


Рис. 2

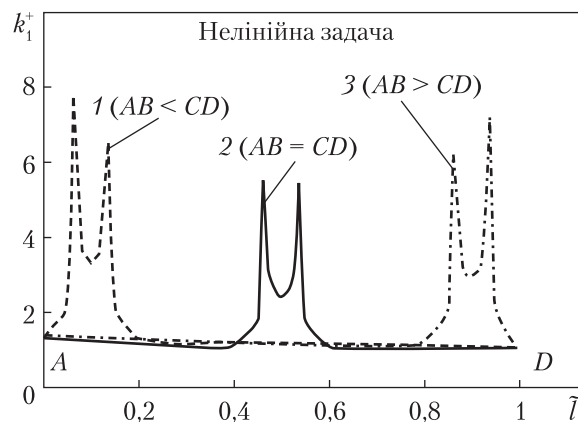


Рис. 3

Розрахунки виконані для оболонки з наступними розмірами:

$$r_1/h = 55,56; \quad r_2/h = 73,704; \quad H/h = 148,67; \quad a/h = 14,81; \quad b/h = 11,11,$$

де  $a, b$  – довжина і ширина (BC) прямокутного отвору.

Конкретні числові результати розв'язання лінійних (ЛЗ) і нелінійних (НЗ) крайових задач у класичній постановці (модель Кірхгофа–Лява) отримані для рівномірно розподілених осьових зусиль інтенсивності  $\tilde{P}_2 = 1000$  та  $\tilde{P}_1 = \tilde{P}_2 r_2 / r_1$  ( $P_k/h = \tilde{P}_k \cdot 10^5$  Па;  $k = 1, 2$ ).

На рис. 2 та 3 показано характер зміни коефіцієнта концентрації осьових напружень  $k_1^+ = \sigma_{11}^+ h / P_2$  уздовж перерізу  $AD$  на зовнішній поверхні оболонки як для задач у лінійно-пружній постановці (рис. 2), так і у нелінійно-пружній (рис. 3). Дані наведені для трьох варіантів розташування отвору: 1 – біля верхньої основи ( $AB < CD$ ;  $AB/h = 9,26$ ; штрихова крива); 2 – посередині конуса ( $AB = CD = (l_2 - l_1 - b) / 2$ ; суцільна крива); 3 – біля нижньої основи ( $AB > CD$ ;  $CD/h = 9,26$ ; штрих-пунктирна крива). На рисунках символом  $\tilde{l} = (l - l_1) / (l_2 - l_1)$  позначена відносна відстань довільної точки оболонки від верхньої основи.

Із представлених результатів розв'язання крайових задач видно, що при дії осьових розтягувальних зусиль для всіх трьох варіантів розміщення отвору найнебезпечнішими є кутові точки контурів отворів, які розташовані на зовнішній поверхні оболонок, де мають місце найбільші осьові напруження і деформації. Так, для варіантів 1 і 2, коли отвір знаходиться біля верхньої (меншої) основи або посередині конуса, найнебезпечнішою є кутова точка  $B$ , а для варіанта 3 – кутова точка  $C$ .

З розглянутих вище трьох варіантів розташування отвору оптимальним є варіант 2, для якого отвір розміщений посередині конуса, оскільки в цьому випадку коефіцієнт концентрації осьових напружень набуває найменшого значення:  $k_1^+ = 5,92$  для ЛЗ і  $k_1^+ = 5,44$  для НЗ, а найнебезпечнішим – варіант 1, коли отвір знаходиться біля меншої основи і коефіцієнт концентрації напружень досягає найбільшого значення:  $k_1^+ = 9,80$  для ЛЗ і  $k_1^+ = 7,72$  для НЗ.

Аналіз отриманих результатів також свідчить про те, що для конічної оболонки з прямокутним отвором області концентрації напружень і пластичних деформацій мають невеликі розміри й знаходяться в околі кутових точок контуру отвору.

Врахування нелінійних властивостей матеріалу оболонки зумовлює незначне збільшення максимальних прогинів і деформацій і більш істотне зменшення максимальних напружень у порівнянні з результатами лінійно-пружного розв'язку, відповідно, на 21,2 % для варіанта 1, на 8,2 % для варіанта 2 і на 18,3 % для варіанта 3.

*Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми “Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).*

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Луговой П.З., Шульга Н.А. Конические оболочки, ослабленные отверстиями. Киев: Наук. думка, 1976. 163 с.
2. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н., Шнеренко К.И. Методы расчета оболочек. Т.1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. Киев: Наук. думка, 1980. 636 с.
3. Мушчанов В.Ф., Демидов А.И. Упруго-пластическое напряженное состояние круговых конических оболочек переменной и постоянной толщины с отверстием. *Метал. конструкції*. 2008. **14**, № 3. С. 125–142.
4. Troyak E.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Elastoplastic state of a conical shell with a circular hole on the lateral surface. *Int. Appl. Mech.* 1988. **24**, № 1. P. 65–70.
5. Chernyshenko I.S., Storozhuk E.A., Kharenko S.B. Physically and geometrically nonlinear deformation of thin-walled conical shells with a curvilinear hole. *Int. Appl. Mech.* 2007. **43**, № 4. P. 418–424.
6. Chernyshenko I.S., Storozhuk E.A., Kharenko S.B. Physically and geometrically nonlinear deformation of conical shells with an elliptic hole. *Int. Appl. Mech.* 2008. **44**, № 2. P. 174–181.
7. Харенко С.Б. Рівновага непружної конічної оболонки з двома круговими отворами. *Пробл. обчисл. механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. Вип. 14. С. 340–346.
8. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Kharenko S.B. Elastoplastic deformation of conical shells with two circular holes. *Int. Appl. Mech.* 2012. **48**, № 3. P. 343–348.
9. Ermakovskaya I.P. Effect of physical nonlinearity and orthotropy on the stress distribution around holes in a conical shell. *Int. Appl. Mech.* 1991. **27**, № 10. P. 995–1000.
10. Ломакин В.А. О теории пластичности анизотропных сред. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*. 1964. № 4. С. 49–53.
11. Механика композитов. Т. 7. Концентрация напряжений: Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. (ред.). Киев: “А.С.К.”, 1998. 387 с.
12. Areias P.M.A., Song J.-H., Belytschko T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff–Love constraints. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 2005. **64**, № 9. P. 1166–1206.

Надійшло до редакції 17.07.2019

#### REFERENCES

1. Guz, A. N., Lugovoy, P. Z. & Shulga, N. A. (1976). Conical shells weakened by holes. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
2. Guz, A. N., Chernyshenko, I. S., Chekhov, Val. N., Chekhov, Vik. N. & Shnerenko, K. I. (1980). Calculation methods shells. (vol. 1) Theory of thin shells weakened by holes. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
3. Mushchanov, V. F. & Demidov, A. I. (2008). Elastic-plastic stress state of circular conical shells of variable and constant thickness with aperture. *Metal. constructions*, 14, No. 3, pp. 125-142 (in Russian).
4. Troyak, E. N., Storozhuk, E. A. & Chernyshenko, I. S. (1988). Elastoplastic state of a conical shell with a circular hole on the lateral surface. *Int. Appl. Mech.*, 24, No. 1, pp. 65-70. <https://doi.org/10.1007/BF00885078>
5. Chernyshenko, I. S., Storozhuk, E.A. & Kharenko, S.B. (2007). Physically and geometrically nonlinear deformation of thin-walled conical shells with a curvilinear hole. *Int. Appl. Mech.*, 43, No. 4, pp. 418-424. <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0038-2>
6. Chernyshenko, I. S., Storozhuk, E. A. & Kharenko, S. B. (2008). Physically and geometrically nonlinear deformation of conical shells with an elliptic hole. *Int. Appl. Mech.*, 44, No. 2, pp. 174-181. <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0032-3>

7. Kharenko, S. B. (2010). Equilibrium of an inelastic conical shell with two circular holes. Problems of computational mechanics and strength of structures. Dnipropetrovsk: Nauka i osvita, 14, pp. 340-346 (in Ukrainian).
8. Storozhuk, E. A., Chernyshenko I. S. & Kharenko, S. B. (2012). Elastoplastic deformation of conical shells with two circular holes. Int. Appl. Mech., 48, No. 3, pp. 343-348. <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0525-y>
9. Ermakovskaya, I. P. (1991). Effect of physical nonlinearity and orthotropy on the stress distribution around holes in a conical shell. Int. Appl. Mech., 27, No. 10, pp. 995-1000. <https://doi.org/10.1007/BF00887508>
10. Lomakin, V. A. (1964). On the theory of anisotropic plasticity. Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika, No. 4, pp. 49-53 (in Russian).
11. Guz, A. N., Kosmodamianskii, A. S. & Shevchenko, V. P. (Eds.). (1998). Mechanics of Composite Materials. (vol. 7) Stress Concentration. Kyiv: A.S.K. (in Russian).
12. Areias, P. M. A., Song, J.-H. & Belytschko, T. (2005). A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff–Love constraints. Int. J. Numer. Meth. Eng., 64, No. 9, pp. 1166-1206. <https://doi.org/10.1002/nme.1389>

Received 17.07.2019

Є.А. Сторожук, В.А. Максимюк, І.С. Чернышенко

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: stevan@ukr.net

#### КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОБЛАСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОТВЕРСТИЯ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Дана постановка и разработана численная методика решения физически нелинейных задач статики для композитной конической оболочки, ослабленной прямоугольным отверстием. Система разрешающих уравнений получена на основе соотношений теории тонких оболочек Кирхгофа–Лява и деформационной теории пластичности анизотропных сред с использованием методов Ньютона, дополнительных напряжений и конечных элементов. Исследовано влияние нелинейной упругости материала и расположения прямоугольного отверстия относительно торцов на концентрацию напряжений в ортотропной конической оболочке, нагруженной осевыми растягивающими силами.

**Ключевые слова:** композитная коническая оболочка, прямоугольное отверстие, статическая нагрузка, нелинейно-упругое состояние, концентрация напряжений, метод конечных элементов.

Є.А. Storozhuk, V.A. Maksimyuk, I.S. Chernyshenko

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: stevan@ukr.net

#### STRESS CONCENTRATION IN THE REGION OF A RECTANGULAR HOLE ON THE SIDE SURFACE OF A NONLINEARLY ELASTIC ORTHOTROPIC CONICAL SHELL

The formulation and development of a numerical method for solving physically nonlinear static problems for a composite conical shell weakened by a rectangular hole is given. Geometric relationships are written in the vector form according to the theory of non-stray shells, in which Kirchhoff-Love's hypotheses take place, and physical ones are based on the deformation theory of plasticity of anisotropic media. The inversion of physical relations with respect to stresses is performed numerically – by the Newton method. The system of resolving equations in displacements is obtained from the Lagrange variational equation using the method of additional stresses and the modified finite element method. A feature of the proposed version of the finite-element method is the implementation of the vector form of approximations of the unknown quantities and the implementation of the geometric part of the Kirchhoff–Love hypotheses at the nodes of the final element. Using the developed technique, the effect of nonlinear elasticity of the material and the location of a rectangular hole relative to the ends on the stress concentration in an orthotropic conical shell loaded with axial tensile forces is investigated.

**Keywords:** composite conical shell, rectangular hole, static load, nonlinear elastic state, stress concentration, finite-element method.