

---

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.12.033>

УДК 532.546:682.16

**В.Л. Поляков**

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

E-mail: polyakov\_igm@list.ru

## **Математическое моделирование осветления суспензии в динамическом слое**

*Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А.Я. Олейником*

*Сформулирована и строго решена нелинейная нестационарная задача безотрывного поверхностного фильтрования при постоянном перепаде давлений на неподвижной и подвижной границах динамического слоя. Полученное в параметрической форме решение позволяет надежно прогнозировать изменения во времени качества фильтрата и производительности установки поверхностного фильтрования. На ряде примеров проанализировано влияние сорбционных свойств фильтрующего материала, автокатализа, темпа формирования динамического слоя на важнейшие характеристики фильтрования.*

**Ключевые слова:** *поверхностное фильтрование, суспензия, скорость, перепад давлений, математическое моделирование, концентрация, подвижная граница.*

Наряду с традиционным объемным фильтрованием [1, 2] для удаления тонкодисперсных загрязнений в практике водоочистки, а также для обезвоживания осадков, в мембранных технологиях, биотехнологиях применяется поверхностное фильтрование [3–7]. При этом рабочий пористый слой создается из особой, грубодисперсной фракции, содержащейся в би- или полидисперсной примеси разделяемой суспензии. Крупные частицы могут оказаться в ней как результат природного (ливневые стоки, паводки) или техногенного (бытовые, промышленные, сельскохозяйственные стоки) загрязнения воды, а также целенаправленно добавляться в уже загрязненную воду. Поверхностное фильтрование в сравнении с объемным имеет с технологической точки зрения существенные и преимущества, и недостатки. И прежде всего, следует отметить, что таким образом удастся отказаться от регулярных промывок. Тем самым экономится очищенная вода и удешевляется технологический процесс. Поверхностное фильтрование, как и объемное, может реализовываться на практике в двух режимах, а именно, при постоянных скорости фильтрования  $V$  или действующем перепаде давлений.

Математическое моделирование фильтрования суспензии с существенно неоднородной примесью через динамический слой, образующийся на удерживающей поверхности с мелкой перфорацией (сетке с мелкими ячейками), осложняется ввиду наличия у области

фильтрации подвижной границы. Но если при постоянном значении  $V$  закономерность перемещения указанной границы заранее известна, то при втором режиме фильтрования, который и рассматривается аналитическими методами ниже, и скорость  $V$ , и высота динамического слоя  $l$  изменяются со временем, причем зависимости  $V(t)$  и  $l(t)$  должны устанавливаться в ходе решения соответствующей математической задачи.

Итак, формулируется и затем строго решается нелинейная нестационарная задача безотрывного фильтрования полидисперсной суспензии через формирующийся с нуля поверхностный несжимаемый пористый слой, при постоянном перепаде давлений на его неподвижной и подвижной границах. Исходная математическая модель включает два блока — осветлительный и фильтрационный. Первый из них содержит уравнения баланса и кинетики тонкодисперсного загрязняющего вещества [8–10]

$$V(t) \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = V(t) \tilde{\lambda}(S) C, \quad (2)$$

которые дополняются парой условий на подвижной верхней границе

$$z = l(t), \quad C = C_0, \quad S = 0. \quad (3)$$

Здесь  $C, S$  — объемные концентрации взвешенных и осажденных мелких частиц;  $\tilde{\lambda}$  — приведенный функциональный коэффициент фильтрования, который не зависит от скорости  $V$ ;  $C_0$  — постоянная исходная концентрация мелких частиц в суспензии.

Фильтрационный блок составляют уравнения движения суспензии, гидравлического сопротивления динамического слоя и состояния осадка в нем

$$V(t) = k(S_s) \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (4)$$

$$k(S_s) = k_0 f_k(S_s), \quad (5)$$

$$S_s(S) = \gamma(S) S, \quad (6)$$

а также два граничных условия

$$z = 0, \quad h = H_d = \text{const}, \quad z = l(t), \quad h = H_d + \frac{\Delta p_0}{\rho g} + l(t). \quad (7)$$

Здесь  $h$  — пьезометрический напор;  $k, k_0$  — коэффициенты фильтрации загрязненного и чистого фильтрующего материала;  $S_s$  — объемная концентрация осадка;  $\gamma$  — функциональный коэффициент, характеризующий соотношение между содержаниями осадка и частиц суспензии в нем [11, 12];  $H_d$  — пьезометрический напор на выходе из динамического слоя;  $\Delta p_0$  — перепад давлений на его границах;  $\rho$  — плотность суспензии;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Задача (1)–(7) обезразмеривается с использованием системы масштабов  $C_0, k_0, l_0$ . Тогда  $\bar{C} = \frac{C}{C_0}$ ,  $\bar{S} = \frac{S}{n_l C_0}$ ,  $\bar{z} = \frac{z}{l_0}$ ,  $\bar{t} = \frac{k_0 t}{n_l l_0}$ ,  $\bar{\lambda} = l_0 \tilde{\lambda}$ ,  $\bar{S}_s = \frac{S_s}{n_l C_0}$ ,  $\tilde{h} = \frac{h - H_d}{l_0}$ ,  $\bar{l} = \frac{l}{l_0}$ ,  $\Delta \bar{h}_0 = \frac{\Delta p_0}{\rho g l_0}$ ,  $n_l$  – пористость чистого динамического слоя.

$$\bar{V}(\bar{t}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} = \bar{V}(\bar{t}) \bar{\lambda}(\bar{S}) \bar{C}, \quad (9)$$

$$\bar{V}(\bar{t}) = f_k(\bar{S}_s) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{z}}, \quad (10)$$

$$\bar{S}_s = \gamma(\bar{S}) \bar{S}, \quad (11)$$

$$\bar{z} = \bar{l}(\bar{t}), \quad \bar{C} = 1; \quad \bar{S} = 0; \quad (12)$$

$$\bar{z} = 0, \quad \tilde{h} = 0; \quad \bar{z} = \bar{l}(\bar{t}), \quad \tilde{h} = \Delta \bar{h}_0 + \bar{l}(\bar{t}). \quad (13)$$

Прежде всего, вводится новая относительная независимая переменная

$$\bar{\tau} = \int_0^{\bar{t}} \bar{V}(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Из баланса тонкодисперсной фракции в примеси в динамическом слое следует

$$\bar{l}(\bar{t}) = \bar{a}_l \bar{\tau}, \quad (15)$$

где  $\bar{a}_l = \frac{n_l C_l}{1 - n_l}$ ,  $C_l$  – объемная концентрация грубодисперсной фракции примеси, формирующей указанный слой. Система уравнений (8), (9) сводится к единому уравнению относительно  $\bar{S}$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \left[ \frac{1}{\bar{\lambda}(\bar{S})} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{z}} - \bar{S} \right] = 0. \quad (16)$$

Двойное интегрирование (16) с учетом условий (12) позволило получить, во-первых, строгое представление для искомой концентрации  $\bar{S}$  в неявной интегральной форме

$$\bar{a}_l \int_0^{\bar{S}} \frac{d\zeta}{\bar{\lambda}(\zeta) (1 - \bar{a}_l \zeta)} = \bar{a}_l \bar{\tau} - \bar{z}, \quad (17)$$

во-вторых, простую формулу для концентрации  $\bar{C}$ .

$$\bar{C}(\bar{S}) = 1 - \bar{a}_l \bar{S}. \quad (18)$$

В результате относительные выходные концентрации  $\bar{C}_e$  и  $\bar{S}_e$  со временем изменяются следующим образом:

$$\bar{C}_e(\bar{\tau}) = \bar{C}(0, \bar{\tau}) = 1 - \bar{a}_l \bar{S}_e(\bar{\tau}). \quad (19)$$

$$\int_0^{\bar{S}_e} \frac{d\bar{S}}{\bar{\lambda}(\bar{S})(1 - \bar{a}_l \bar{S})} = \bar{\tau}. \quad (20)$$

Распределение приведенного напора в динамическом слое на произвольный момент времени после интегрирования уравнения (10) при условии (13) описывается зависимостью

$$\tilde{h}(\bar{z}, \bar{\tau}) = \bar{V}(\bar{\tau}) \int_0^{\bar{z}} \frac{d\eta}{f_k(\bar{S}(\eta, \bar{\tau}))}. \quad (21)$$

Для проведения конкретных расчетов устанавливается связь между  $\bar{\tau}$  и  $\bar{t}$  из решения уравнения

$$\int_0^{\bar{a}_l \bar{\tau}} \frac{d\eta}{f_k(\bar{S}(\eta, \bar{\tau}))} \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{t}} = \Delta \bar{h}_0 + \bar{a}_l \bar{\tau}. \quad (22)$$

При условии

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{\tau} = 0$$

искомая связь имеет вид обратной функции

$$\bar{t}(\bar{\tau}) = \int_0^{\bar{\tau}} (\Delta \bar{h}_0 + \bar{a}_l \sigma) \left[ \int_0^{\bar{a}_l \sigma} \frac{d\eta}{f_k(\bar{S}(\eta, \sigma))} \right]^{-1} d\sigma. \quad (23)$$

Однако ввиду неявного представления функции  $\bar{S}(\bar{z}, \bar{\tau})$  интеграл в (23) приходится преобразовывать, принимая во внимание

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{S}} = -\frac{\bar{a}_l}{\bar{\lambda}(\bar{S})(1 - \bar{a}_l \bar{S})}, \quad \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{S}_e} = -\frac{1}{\bar{\lambda}(\bar{S}_e)(1 - \bar{a}_l \bar{S}_e)}.$$

Тогда окончательно зависимость  $\bar{t}(\bar{\tau})$  будет

$$\bar{t}(\bar{S}_e) = \bar{a}_l \int_0^{\bar{S}_e} \frac{1}{[\Delta \bar{h}_0 + \bar{a}_l \bar{\tau}(\zeta)] \cdot \bar{\lambda}(\zeta)(1 - \bar{a}_l \zeta)} \int_0^{\zeta} \frac{d\bar{S}}{f_k(\bar{S}) \bar{\lambda}(\bar{S})(1 - \bar{a}_l \bar{S})} d\zeta. \quad (24)$$

Скорость фильтрования также следует рассчитывать как функцию от  $\bar{S}_e$  по формуле

$$\bar{V}(\bar{S}_e) = \left[ \frac{\Delta \bar{h}_0}{\bar{a}_l} + \bar{\tau}(\bar{S}_e) \right] \left[ \int_0^{\bar{S}_e} \frac{d\bar{S}}{f_k(\bar{S}) \bar{\lambda}(\bar{S})(1 - \bar{a}_l \bar{S})} \right]^{-1}. \quad (25)$$

Ввиду неявного присутствия во выведенных выше зависимостях неопределенного масштаба  $l_0$  для инженерных расчетов удобнее их использовать в размерной форме. В частности, размерным аналогом (24) будет

$$t(S_e) = a_l \int_0^{S_e} \frac{1}{[\Delta h_0 + a_l \tau(\zeta)] \cdot \tilde{\lambda}(\zeta) (C_0 - a_l \zeta)} \int_0^{\zeta} \frac{dS}{f_k(S) \tilde{\lambda}(S) (C_0 - a_l S)} d\zeta \quad (26)$$

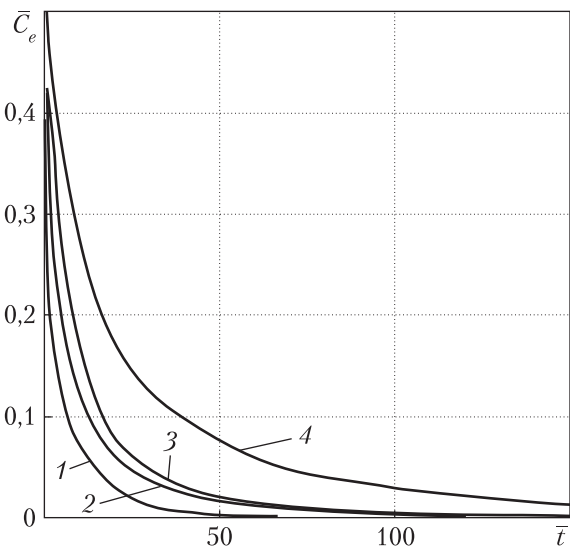
Полученное выше строгое решение нелинейной нестационарной задачи безотрывного поверхностного фильтрования иллюстрируется расчетами четырех примеров (рис. 1). Для них выбирались исходные данные, которые характерны для такого фильтрования в реальных условиях. Но прежде всего для приведенного функционального коэффициента фильтрования  $\tilde{\lambda}(\bar{S})$ , а также  $f_k(\bar{S})$  приняты следующие известные аппроксимационные выражения [13–15]

$$\tilde{\lambda}(\bar{S}) = \tilde{\lambda}_0 (\bar{S}_m - \bar{S})(1 + \theta \bar{S}), \quad f_k(\bar{S}) = (1 - \gamma_c \bar{S})^3,$$

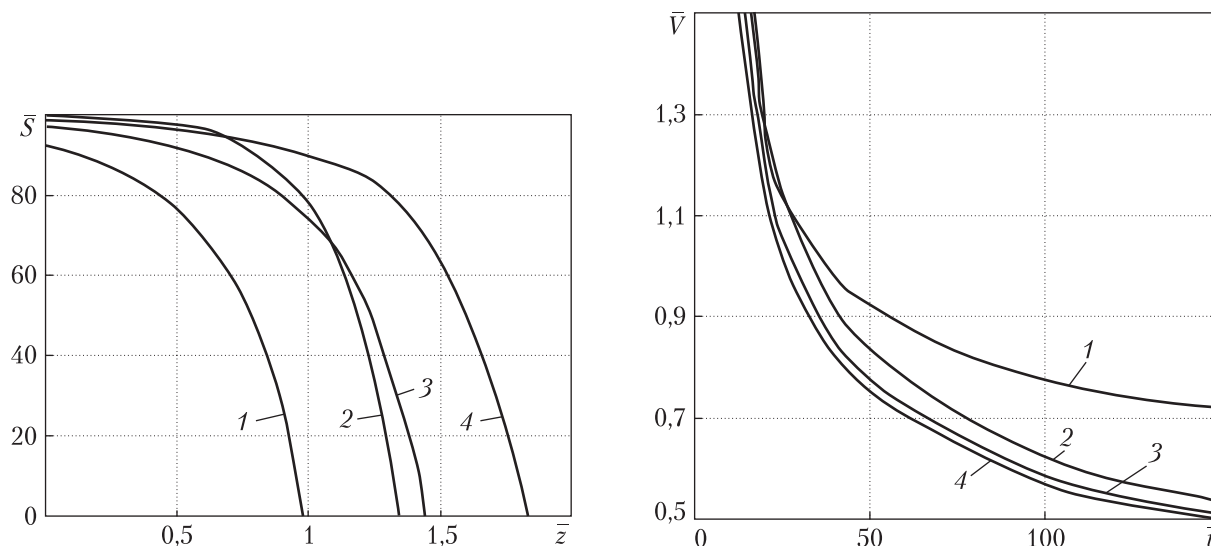
где  $\tilde{\lambda}_0$  – постоянный приведенный коэффициент фильтрования;  $\bar{S}_m$  – относительная грязеемкость по отношению к мелким частицам суспензии;  $\theta$  – автокаталитический коэффициент. Значения параметров  $\bar{S}_m$  (200),  $\Delta \bar{h}_0$  (1),  $\gamma_c$  (0,0035) были единичными для всех упомянутых примеров. Кроме того, для базового (первого) примера принимались  $\tilde{\lambda}_0 = 0,02$ ,  $\theta = 0$ ,  $\bar{a}_l = 0,01$ . В остальных примерах значения последних трех коэффициентов поочередно менялись, а именно,  $\tilde{\lambda}_0 = 0,04$  (пример 2),  $\theta = 0,01$  (пример 3),  $\bar{a}_l = 0,02$  (пример 4). Предметом расчетов стали важнейшие относительные характеристики фильтрования – концентрации  $\bar{C}_e$ ,  $\bar{S}$  и потери напора  $\Delta \bar{h}$ .

Семейство кривых, описывающих закономерное снижение выходной концентрации взвешенных частиц со временем от начального значения 1, представлено на рис. 1. Вычисляли  $\bar{C}_e$  непосредственно по формуле (19), а предварительно значения  $\bar{\tau}$  и  $\bar{S}_e$  находили в зависимости от заданного значения  $\bar{t}$  из уравнений (20), (24). Из рис.1 следует важный вывод – начальный этап фильтрования, когда качество фильтрата еще неудовлетворительное, является кратковременным. И логично, что продолжительность данного этапа еще более сокращается при усилении сорбционных свойств за счет увеличения и  $\tilde{\lambda}_0$ , и  $\theta$ .

С технологической точки зрения особого внимания заслуживает факт значительной неравномерности распределения задержанных в динамическом слое частиц суспензии, о чем свидетельствует рис. 2. Здесь изображены профили  $\bar{S}(\bar{z})$ , вычисленные для базового при-



**Рис. 1.** Снижение относительной концентрации взвешенных частиц в фильтрате: 1 – пример 4; 2 – пример 2; 3 – пример 3; 4 – базовый пример.



**Рис. 2.** Профили относительной объемной концентрации осажденных мелких частиц: 1, 2, 4 – базовый пример; 3 – пример 3; 1 –  $\bar{t} = 50$ ; 2, 3 –  $\bar{t} = 100$ ; 4 –  $\bar{t} = 150$

**Рис. 3.** Снижение относительной скорости фильтрования со временем: 1 – пример 4; 2 – базовый пример; 3 – пример 3; 4 – пример 2

мера на три момента времени. Дополнительно функцию распределения  $\bar{S}(\bar{z})$  определяли при  $\bar{t} = 100$  с учетом автокатализа (пример 3, кривая 3).

Положение подвижной верхней границы области фильтрации на заданные моменты времени идентифицируется на рис. 2 как значение  $\bar{z}$ , при котором расчетный профиль обнуляется. Отсюда видно, что значение  $\bar{t}$  при рассматриваемом режиме фильтрования в отличие от режима  $V = \text{const}$  зависит не только от расчетного времени, но и от сорбционной способности динамического слоя. Ее усиление обуславливает большие наполненность и нелинейность профилей концентрации осажденных частиц.

Наблюдаемая значительная неравномерность в распределении осадка по высоте указанного слоя ведет к ускоренному снижению скорости фильтрования. На рис. 3 приведены в графической форме результаты расчетов убывающей скорости, выполненные по формуле (25) при ранее найденных значениях  $\bar{t}$  и  $\bar{S}_e$ . Отсюда очевидно возможное падение расчетной скорости, так что поверхностное фильтрование может оказаться неэффективным по своей производительности уже через короткое время. Показательным является сопоставление величины  $\bar{V}(\bar{t})$  для случаев  $\bar{a}_l = 0,01$  (пример 1, кривая 2) и  $\bar{a}_l = 0,02$  (пример 4, кривая 1). Сначала скорость  $\bar{V}$  снижается быстрее во втором случае ввиду большого количества задержанных в поверхностном слое частиц суспензии и темпа прироста его высоты. Однако со временем ситуация в отношении  $\bar{V}$  кардинально меняется вследствие намного более равномерного распределения осадка в данном случае. Как следствие, скорость  $\bar{V}$  теперь стабилизируется на более высоком уровне.

В заключение необходимо отметить принципиальные отличия в поведении функций-концентраций  $\bar{C}(\bar{z}, \bar{t})$  и  $\bar{S}(\bar{z}, \bar{t})$  при поверхностном и объемном фильтровании. Выведенные выше зависимости могут служить надежной основой для выработки рекомендаций с целью рационального управления установкой поверхностного фильтрования.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Минц Д.М. Теоретические основы технологии очистки воды. Москва: Стройиздат, 1964. 155 с.
2. Jegatheesan V., Vigneswaran S. Deep bed filtration: mathematical models and observations. *Crit. Rev. Environ. Sci. Technol.* 2005. **35(6)**. P. 515–569.
3. Benesch T., Meier U., Schutz W. Modelling filtration with superimposed sedimentation. *Separat. Purif. Technol.* 2004. **35**. P. 37–46.
4. Zee D.J., Wang C.H. Theories of cake filtration and consolidation and implications to sludge dewatering. *Water Res.* 2000. **34**. P. 1–20.
5. Zee S., Park P.-K., Kim J.-H., Yeon K.-M., Lee C.-H. Analysis of filtration in submerged microfiltration for drinking water treatment. *Water Res.* 2008. **42**. P. 3109–3121.
6. Mota M., Teixeira J.A., Yelshin A. Influence of cell-shape on the cake resistance in dead-end and cross-flow filtrations. *Separat. Purific. Technol.* 2002. **27**. P. 137–144.
7. Wakeman R. The influence of particle properties on filtration. *Separat. Purific. Technol.*, 2007. **58**. P. 234–241.
8. Akgiray O, Saatci A.M. An algorithm for bank operation of declining rate Filters. *Water Res.* 1998. **3**. P. 2095–2105.
9. Bai R., Tien C. Effect of deposition in deep-bed filtration: determination and search of rate parameters. *J. Colloid Interface Sci.* 2000. **231**. P. 299–311.
10. Chaundry F.H. Theory of declining rate filtration. I. Continuous operation. *J. Environ. Eng. Din. ASCE*. 1987. **113(4)**. P. 834–851.
11. Ojha C.S., Graham N.J.D. Theoretical estimates of bulk specific deposit in deep bed filters. *Water Res.* 1993. **27**. P. 377–387.
12. Polyakov V., Kravchuk A., Kochetov G., Kravhuk O. Clarification of aqueous suspensions with a high content of suspended solids in rapid sand filters. *Eureka: Physics and Engineering*. 2019. № 1. P. 28–45.
13. Веницианов Е.В., Рубинштейн Р.Н. Динамика сорбции из жидких сред. Москва: Наука, 1983. 237 с.
14. Boller M.A., Kavanaugh M.C. Particle characteristics and headloss increase in granular media filtration. *Water Res.* 1995. **29**. P. 1139–1149.
15. Saatci A.M. Application of the declining rate filtration theory – Continuous operation. *J. Environ. Eng. Din. ASCE*. 1990. **116(1)**. P. 87–105.

Поступило в редакцию 17.07.2019

REFERENCES

1. Mints, D. M. (1964). Theoretical fundamentals of water purification technology. Moscow: Stroyizdat (in Russian).
2. Jegatheesan, V. & Vigneswaran, S. (2005). Deep bed filtration: mathematical models and observations. *Crit. Rev. Environ. Sci. Technol.*, 35(6), pp. 515-569.
3. Benesch, T., Meier, U. & Schutz, W. (2004) Modelling filtration with superimposed sedimentation. *Separat. Purific. Technol.*, 35, pp. 37-46.
4. Zee, D. J. & Wang, C. H. (2000). Theories of cake filtration and consolidation and implications to sludge dewatering. *Water Res.*, 34, pp. 1-20.
5. Zee, S., Park, P.-K., Kim, J.-H., Yeon, K.-M. & Lee, C.-H. (2008). Analysis of filtration in submerged microfiltration for drinking water treatment. *Water Res.*, 42, pp. 3109-3121.
6. Mota, M., Teixeira, J. A. & Yelshin, A. (2002). Influence of cell-shape on the cake resistance in dead-end and cross-flow filtrations. *Separat. Purific. Technol.*, 27, pp. 137-144.
7. Wakeman, R. (2007). The influence of particle properties on filtration. *Separat. Purific. Technol.*, 58, pp. 234-241.
8. Akgiray, O. & Saatci, A.M. (1998). An algorithm for bank operation of declining rate filters. *Water Res.*, 3, pp. 2095-2105.
9. Bai, R. & Tien, C. (2000). Effect of deposition in deep-bed filtration: determination and search of rate parameters. *J. Colloid Interface Sci.*, 231, pp. 299-311.
10. Chaundry, F. H. (1987). Theory of declining rate filtration. I. Continuous operation. *J. Environ. Eng. Din. ASCE*, 113(4), pp. 834-851.

11. Ojha, C. S. & Graham, N. J. D. (1993) Theoretical estimates of bulk specific deposit in deep bed filters. *Water Res.*, 27, pp. 377-387.
12. Polyakov, V., Kravchuk, A., Kochetov, G. & Kravhuk, O. (1993). Clarification of aqueous suspensions with a high content of suspended solids in rapid sand filters. *Eureka: Physics and Engineering*, No. 1, pp. 28-45.
13. Venitsianov, E. V. & Rubinshteyn, R. N. (1983). Sorption dynamics from aqueous media. Moscow: Nauka (in Russian).
14. Boller, M. A. & Kavanaugh, M. C. (1995). Particle characteristics and headloss increase in granular media filtration. *Water Res.*, 29, pp. 1139-1149.
15. Saatci, A. M. (1990). Application of the declining rate filtration theory — Continuous operation. *J. Environ. Eng. Div. ASCE*, 116(1), pp. 87-105.

Received 17.07.2019

В.Л. Поляков

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ  
E-mail: polyakov\_igm@list.ru

#### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСВІТЛЕННЯ СУСПЕНЗІЇ В ДИНАМІЧНОМУ ШАРІ

Сформульовано і точно розв'язано нелінійну нестационарну задачу безвідривного поверхневого фільтрування при постійному перепаді тисків на нерухомій і рухомій границях динамічного шару. Отриманий у параметричній формі розв'язок дозволяє надійно прогнозувати зміни у часі якості фільтрату і продуктивності установки поверхневого фільтрування. На ряді прикладів проаналізовано вплив сорбційних властивостей фільтруючого матеріалу, автокаталізу, темпу формування динамічного шару на основні характеристики фільтрування.

**Ключові слова:** *поверхневе фільтрування, суспензія, швидкість, перепад тисків, математичне моделювання, концентрація, рухлива межа.*

V.L. Polyakov

Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv  
E-mail: polyakov\_igm@list.ru

#### MATHEMATICAL MODELING OF SUSPENSION CLARIFICATION IN A DYNAMIC LAYER

A non-linear non-steady task of undetachable cake filtration at a constant pressure difference at moving and stationary cake layer boundaries is formulated and solved exactly. Sorption and conductivity possibilities are described by arbitrary functions. The solution obtained in the parametric form enables one to predict reliably changes in time of the filtrate quantity and productivity of a cake filtration installation. The effects of layer sorption properties, autocatalysis, and rate of cake formation on the main filtration characteristics are analyzed for a number of test examples. It is established that a considerable decrease in the suspended substance content in a filtrate, and filtration rate occurs during a short time, and the deposition is distributed along the dynamic layer height essentially unevenly with the maximum at its exit.

**Keywords:** *surface filtration, suspension, rate, pressure difference, mathematical modeling, concentration, moving boundary.*