

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.01.023>

УДК 539.3

**А.М. Багно**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: alexbag2016@gmail.com

## **О влиянии конечных начальных деформаций на фазовые скорости нормальных волн в упругом полупространстве, взаимодействующем со слоем идеальной сжимаемой жидкости**

*Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем*

*Рассматривается задача о распространении нормальных волн в предварительно деформированном упругом полупространстве, взаимодействующем со слоем идеальной сжимаемой жидкости. Исследование проводится на основе трехмерных линеаризованных уравнений теории упругости конечных деформаций для сжимаемого и несжимаемого упругих полупространств, а также трехмерных линеаризованных уравнений Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости. Применяются постановка задачи и подход, основанные на использовании представлений общих решений линеаризованных уравнений для упругого тела и жидкости. Получены дисперсионные уравнения, описывающие распространение гармонических волн в гидроупругих системах. Построены дисперсионные кривые нормальных волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние конечных начальных деформаций упругого полупространства и толщины слоя идеальной сжимаемой жидкости на фазовые скорости гармонических волн. Показано, что влияние начальных деформаций упругого полупространства на параметры волнового процесса связано со свойствами локализации волн. Предложен критерий существования нормальных волн в гидроупругих волноводах. Развитый подход и полученные результаты позволяют установить для волновых процессов пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций и классической теории упругости для твердого тела. Численные результаты представлены в виде графиков и дан их анализ.*

**Ключевые слова:** нормальные волны, дисперсия волн, сжимаемые и несжимаемые упругие полупространства, слой идеальной сжимаемой жидкости, начальные напряжения.

Проблема описания полного спектра распространяющихся акустических волн в упруго-жидкостных волноводах, анализа их дисперсионных характеристик, а также поведения их как в длинноволновом, так и в коротковолновом диапазонах частотного спектра относится к классическим задачам механики [1]. Закономерности распространения этих волн широко используются в различных областях науки и техники. Значительное практическое использование акустических волн ставит задачу более полного учета реальных свойств сред. К ним относятся начальные напряжения. Созданные целенаправленно, или, возникшие в результате технологических операций при изготовлении, они оказывают существенное влияние

© А.М. Багно, 2019

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 1

23

на волновые процессы. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом действия начальных напряжений, приведены в [2, 3].

В настоящей работе для исследования распространения акустических волн в системе, состоящей из слоя жидкости и упругого полупространства, подверженного большим (конечным) начальным деформациям, привлекаются модели предварительно напряженного тела и покоящейся идеальной сжимаемой жидкости. При этом используются трехмерные линейаризованные уравнения теории упругости конечных деформаций для упругого тела и трехмерные линейаризованные уравнения Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений линейаризованных уравнений движения упругого тела и жидкости, предложенные в работах [4–9].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из слоя идеальной сжимаемой жидкости и упругого полупространства, подверженного большим (конечным) начальным деформациям. Решение получим с привлечением трехмерных линейаризованных уравнений теории упругости конечных деформаций для твердого тела и линейаризованных уравнений Эйлера для жидкости, находящейся в состоянии покоя [4–9].

Затем рассмотрим такие динамические процессы в гидроупругой системе, при которых возникающие дополнительные деформации, т.е. возмущения деформаций значительно меньше начальных. Исследуем гармонические волновые процессы малой амплитуды. При этом примем, что упругое тело находится в начальном состоянии.

Предположим, что изотропное нелинейно-упругое твердое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, занимает объем  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-\infty < z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  и контактирует со слоем идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $Oz_3$ . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $Oz_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений гидроупругости при следующих граничных условиях:

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = 0; \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \tilde{P}_2|_{z_2=h} = 0; v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (1)$$

Воспользуемся постановками задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями и идеальной жидкости, а также представлениями общих решений из работ [4–9]. Далее исследуем волновые процессы в предварительно деформированных сжимаемых и несжимаемых упругих телах, взаимодействующих с идеальной жидкостью, начальное состояние которых является однородным. В случае однородного напряженно-деформированного состояния для плоского случая общие решения имеют вид [4–9]:

1) несжимаемые упругие тела

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \chi_1;$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 \left[ \lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12}) \right] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi_1;$$

2) сжимаемые упругие тела

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2;$$

3) идеальная сжимаемая жидкость

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t},$$

где введенные функции  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

1) несжимаемые упругие тела

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2\lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \chi_1 = 0; \quad q_i = \lambda_i^{-1}; \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1;$$

2) сжимаемые упругие тела

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_2 = 0;$$

3) идеальная сжимаемая жидкость

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_3 = 0.$$

Здесь и выше:  $u_i$  — компоненты вектора смещений упругого тела  $\mathbf{u}$ ;  $v_i$  — составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$ ;  $\tilde{Q}_i$  и  $\tilde{P}_i$  — составляющие напряжений, соответственно, в упругом теле и жидкости;  $\rho$  — плотность материала упругого полупространства;  $\rho_0$  и  $a_0$  — плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $\lambda_i$  — удлинения упругого тела в направлениях координатных осей;  $a_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  — величины, определяемые из

уравнений состояния и зависящие от вида упругого потенциала [10, 11, 14];  $s_{ii}^0$  — начальные напряжения.

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений определяем в классе бегущих волн

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (j = \overline{1, 3}),$$

где  $k$  — волновое число;  $\omega$  — круговая частота;  $i^2 = -1$ .

В дальнейшем для каждой из гидроупругих систем решаем две задачи Штурма—Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также находим соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1) получаем однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиальных решений этих систем, получаем дисперсионные уравнения. Для упруго-жидкостной системы, упругое полупространство которой из несжимаемого материала дисперсионное соотношение имеет вид

$$\det \| e_{lm}(c, \lambda_i, \rho, \mu, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h/c_s) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 4}). \quad (2)$$

Для упруго-жидкостной системы, упругое полупространство которой из сжимаемого материала, аналогичное уравнение будет таким:

$$\det \| \tilde{e}_{lm}(c, \lambda_i, \rho, \mu, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h/c_s) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 4}). \quad (3)$$

В уравнениях (2) и (3)  $c$  — фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h$  — толщина слоя жидкости;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) — скорость волны сдвига в материале упругого тела;  $\mu$  — модуль сдвига материала упругого тела.

Отметим, что полученные дисперсионные уравнения (2) и (3) не зависят от формы упругого потенциала и получены для несжимаемых и сжимаемых упругих тел, подверженных большим (конечным) начальным деформациям. Они являются наиболее общими и из них можно получить соотношения для ряда частных случаев [см. работы 1, 2, 3, 12, 13].

Задачи, рассмотренные в рамках модели, учитывающей начальные напряжения, приведены в [2–7, 12, 13]. Если положить  $s_{ii}^0 = 0$ ,  $\lambda_i = 1$ , то получим равенства для основательно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея и Стоунли—Шольте [1].

**Числовые результаты.** В дальнейшем дисперсионные уравнения (2) и (3) решаем численно. При этом расчеты проводим для трех гидроупругих систем. Первая состоит из эластичной резины и воды. Механические параметры этой системы выбираем следующими: упругое полупространство —  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ; слой жидкости —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$ . Этот гидроупругий волновод характеризуется тем, что материал упругого полупространства (резина) является несжимаемым, податливым и мягким. Вторая система состоит из оргстекла и воды. Она характеризуется следующими параметрами: упругое полупространство —  $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ; слой жидкости —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$ . У этого волновода материал упругого полупространства (оргстекло) является сжимаемым и жестким. Третья

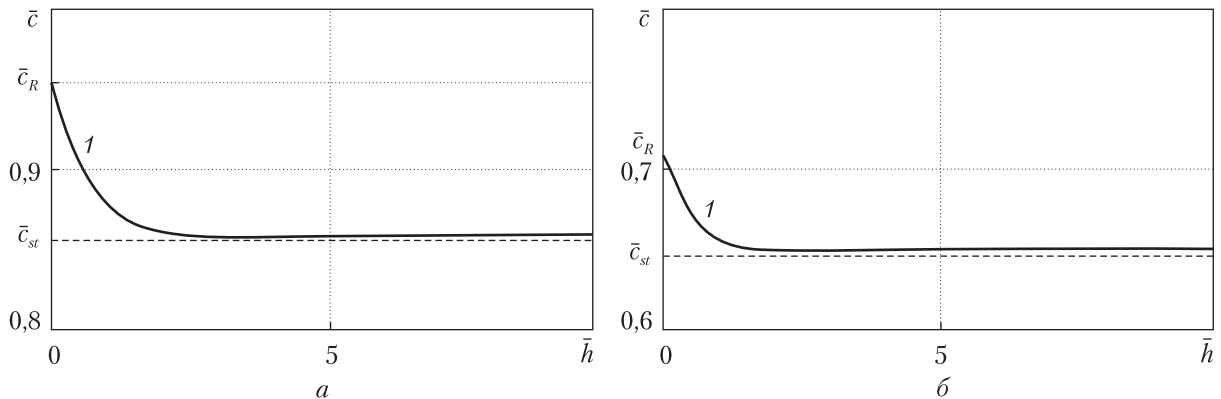


Рис. 1

система представляет собой волновод из стали и воды. При этом параметры выбираем такими: упругое полупространство —  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ; жидкость —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{a}_0 = 0,463021$ . Этот волновод отличается тем, что материал упругого полупространства (сталь) относится к разряду сжимаемых и более жестких, чем оргстекло.

Заметим, что уравнения (2) и (3) выведены без введения каких-либо дополнительных ограничений к виду функции упругого потенциала, поэтому они справедливы для упругих потенциалов произвольной формы. В данной работе при численном решении уравнения (2) для описания упругих свойств резины применялся потенциал Трелоара [5, 6, 10, 11]. Для оргстекла и стали использовался потенциал Мурнагана, зависящий от трех алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина [5, 6, 12–14]. При рассмотрении конкретных примеров и численного решения уравнения (3) учитывалось то обстоятельство, что оргстекло и сталь не разрушаясь не допускают больших деформаций и поэтому коэффициенты уравнений состояния  $a_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  определяли в рамках линейного акустического приближения [14].

Результаты вычислений в виде графиков представлены на рис. 1–3.

Графики (рис. 1), полученные для гидроупругой системы, состоящей из полупространства резины (податливый материал) и слоя воды, иллюстрируют характер влияния предварительного сжатия ( $\lambda_1 = 0,8$ ) на фазовые скорости поверхностных волн в упруго-жидкостной системе. Это графики зависимости безразмерных величин фазовых скоростей поверхностных волн  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины жидкого слоя (частоты)  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ). Дисперсионная кривая, соответствующая гидроупругому волноводу при отсутствии начальных деформаций ( $\lambda_1 = 1$ ) представлена на рис. 1, а, дисперсионная кривая, полученная для системы, упругое полупространство которой подвержено начальному сжатию ( $\lambda_1 = 0,8$ ) — на рис. 1, б.

Результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из оргстекла (жесткий материал) и воды, представлены на рис. 2. График зависимости безразмерной величины фазовой скорости поверхностной волны  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины жидкого слоя (частоты)  $\bar{h}$  при отсутствии начальных напряжений построен на рис. 2, а. Влияние начального растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на скорость поверхностной волны в упруго-жидкостной системе иллюстрирует график на рис. 2, б, представляющий зависи-

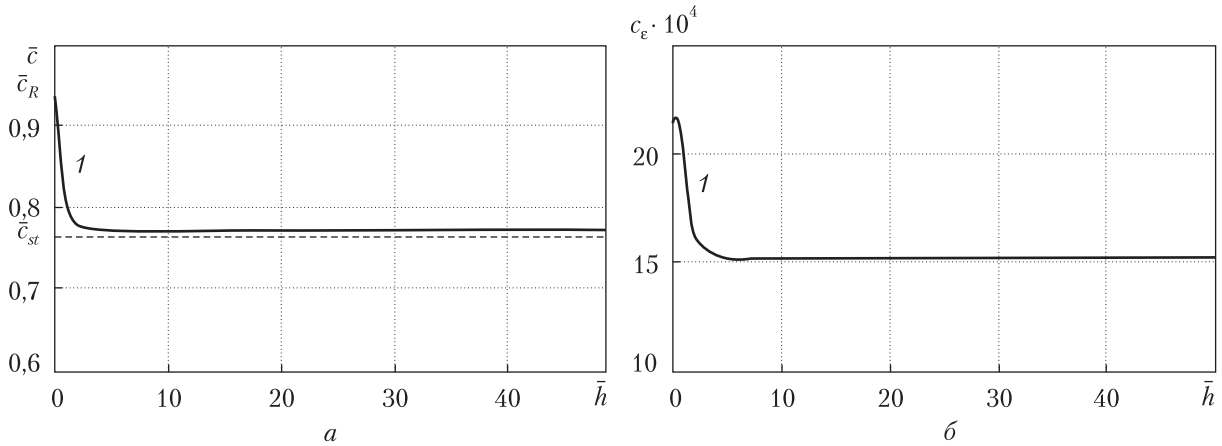


Рис. 2

мость относительного изменения величины фазовой скорости  $c_\epsilon$  ( $c_\epsilon = (c_\sigma - c)/c$ ,  $c_\sigma$  — фазовая скорость волны в гидроупругой системе, упругое полупространство которой подвержено начальным напряжениям;  $c$  — фазовая скорость нормальной волны в системе при отсутствии начальных деформаций) от толщины жидкого слоя (частоты)  $\bar{h}$ .

На рис. 3 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из стали (более жесткий материал) и воды. Зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины жидкого слоя (частоты)  $\bar{h}$  при отсутствии начальных напряжений даны на рис. 3, а. Влияние предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на скорости нормальных волн в упруго-жидкостной системе иллюстрируют графики на рис. 3, б. Здесь представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей мод  $c_\epsilon$  от толщины жидкого слоя (частоты)  $\bar{h}$ .

Для наглядности на рис. 1; 2, а и 3, а штриховыми линиями обозначены асимптотики, к которым стремятся значения фазовых скоростей нормальных волн при стремлении толщины слоя жидкости  $\bar{h}$  к бесконечности.

**Анализ числовых результатов.** Из графиков рис. 1, а следует, что в гидроупругой системе, упругое полупространство которой из податливого материала, распространяется лишь одна поверхностная волна. Величина ее фазовой скорости стремится к величине скорости поверхностной волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,955312$  при  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_R = 0,709557$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ) при стремлении частоты (толщины слоя жидкости)  $\bar{h}$  к нулю ( $\bar{h} \rightarrow 0$ ). При стремлении частоты (толщины слоя жидкости)  $\bar{h}$  к бесконечности ( $\bar{h} \rightarrow \infty$ ) значение фазовой скорости этой волны стремится к величине скорости поверхностной волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,859257$  при  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_{st} = 0,650184$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ). Нетрудно видеть, что начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) приводит к понижению фазовой скорости этой волны.

Как и в случае податливого материала, для гидроупругой системы, состоящей из упругого полупространства из жесткого материала (оргстекло) и воды (см. рис. 2), также характерно распространение только одной поверхностной волны, значение фазовой скорости которой изменяется от величины скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933557$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,7717101$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . При этом начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) приводит к увеличению ее фазовой скорости.

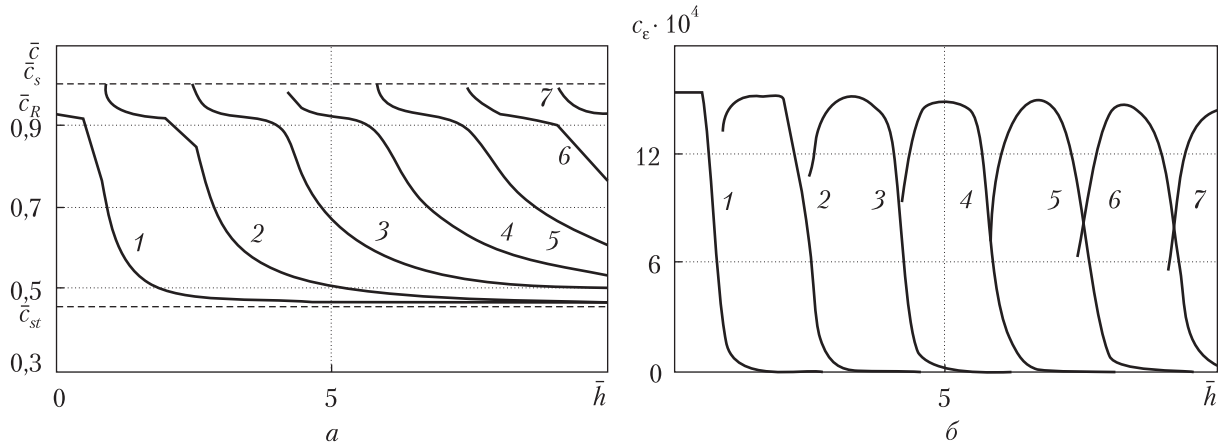


Рис. 3

Графики, приведенные на рис. 3, показывают, что в упруго-жидкостной системе с упругим полупространством из стали (более жесткий материал) распространяется множество нормальных волн, количество которых зависит от рассматриваемого интервала частот (толщин жидкого слоя)  $\bar{h}$ . Нетрудно видеть, что на промежутке  $0 \leq \bar{h} \leq 10$  существует семь мод. При этом скорость моды 1 изменяется от значения скорости поверхностной волны Рэля  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923007$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,462886$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . Скорости всех мод высокого порядка изменяются от скорости волны сдвига в упругом теле  $\bar{c}_s$  при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . При этом начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) приводит к увеличению величин фазовых скоростей всех квазилэмбовских мод (см. рис. 3, б).

**Особенности волновых процессов в гидроупругих волноводах.** Анализ дисперсионных уравнений (2) и (3) показал, что условием, позволяющим определять количество волн, распространяющихся в гидроупругой системе, является соотношение между скоростями волны звука в жидкости и волны сдвига в материале упругого тела. При  $\bar{a}_0 > \bar{c}_s$  в системе упругое полупространство — жидкий слой возникает одна поверхностная волна. Скорость ее  $\bar{c}$  при возрастании толщины слоя жидкости (частоты)  $\bar{h}$  изменяется от значения скорости волны Рэля  $\bar{c}_R$  до значения скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$ . Если же соотношение между механическими параметрами компонентов гидроупругого волновода удовлетворяет условию  $\bar{a}_0 < \bar{c}_s$ , то возникает множество мод, распространяющихся в упруго-жидкостной системе. Из полученного графического материала видно, что для систем с податливым и слабо жестким упругим полупространством имеет место  $\bar{a}_0 > \bar{c}_s$ . При этом в этих гидроупругих волноводах распространяется одна поверхностная волна (см. рис. 1 и 2). В случае более жесткого материала при  $\bar{a}_0 < \bar{c}_s$  возникает множество мод высокого порядка (см. рис. 3).

**Особенности влияния начальных напряжений на фазовые скорости волн в гидроупругих волноводах.** Из рис. 1 и 2 следует, что начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) понижает, а начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) повышает фазовые скорости поверхностных волн, распространяющихся в одномодовых волноводах. Нетрудно видеть (см. рис. 1, б и 2, б), что начальные напряжения оказывают влияние на величину скорости поверхностной волны на протяжении всего частотного диапазона. Обусловлено это свойствами локализации волны.

Как показано в работе [15], движения этой волны происходят не только в жидкости, но и в приповерхностной области упругого полупространства. Этим и вызвано влияние начальных напряжений на значение фазовой скорости этой поверхностной волны на всем частотном интервале.

Анализ графиков, представленных на рис. 3, б, позволяет заключить, что начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) упругого полупространства из стали также повышает значения фазовых скоростей всех мод. При этом, как видно из графиков, наибольшее влияние оно оказывает на фазовые скорости мод, в основном, в окрестности частот их зарождения. Кроме того, воздействие начального растяжения проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых мод, а также в смещении их в коротковолновую часть спектра. С ростом частоты (толщины жидкого слоя) влияние предварительных деформаций на скорости мод ослабевает. Связано это с локализационными свойствами нормальных волн, распространяющихся в гидроупругой системе с более жестким полупространством [15]. Вызвано это тем, что с увеличением толщины жидкого слоя волновые движения низшей моды локализуются в жидкости, а моды высокого порядка смещаются от поверхностей слоя в его толщу и распространяются со скоростью волны звука в жидкости. Это приводит к тому, что в высокочастотной части спектра воздействие упругого полупространства на скорости мод ослабевает, а также уменьшается влияние на них начальных напряжений.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.
2. Bagno A.M., Guz A.N. Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey). *Int. Appl. Mech.* 1997. **33**, № 6. P. 435–463.
3. Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M. Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, № 5. P. 449–507.
4. Guz A. N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1980. **16**, № 3. P. 175–190.
5. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 т. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 2. 536 с.
6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: 2 части. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. Ч. 2. 505 с.
7. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
8. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. 428 p.
9. Гузь А.Н. Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. 244 с.
10. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Киев: Наук. думка, 1979. 144 с.
11. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 272 с.
12. Babich S.Y., Guz A.N., Zhuk A.P. Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1979. **15**, № 4. P. 277–291.
13. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями. *Прикл. механика.* 1980. **16**, № 1. С. 113–116.
14. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. Киев: Наук. думка, 1977. 152 с.
15. Багно А.М. О локализации поверхностных волн в слое идеальной сжимаемой жидкости, взаимодействующем с упругим полупространством. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 1. С. 22–28. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.022>

Поступило в редакцию 09.01.2018



REFERENCES

1. Viktorov, I. A. (1981). Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Bagno, A. M. & Guz, A. N. (1997). Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey). Int. Appl. Mech., 33, No. 6, pp. 435-463.
3. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Bagno, A. M. (2016). Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). Int. Appl. Mech., 52, No. 5, pp. 449-507.
4. Guz, A. N. (1980). Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. Int. Appl. Mech., 16, No. 3, pp. 175-190.
5. Guz, A. N. (1986). Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 v. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
6. Guz, A. N. (2016). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. 2 parts. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing (in Russian).
7. Guz, A. N. (1998). Dynamics of compressible viscous fluid. Kiev: A.C.K. (in Russian).
8. Guz, A. N. (2009). Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
9. Guz, A. N. (2017). Introduction to dynamics of compressible viscous fluid. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU (in Russian).
10. Guz, A. N. (1979). Stability of elastic bodies under hydrostatic pressure. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
11. Guz, A. N. (1973). Stability of elastic bodies under finite deformations. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
12. Babich, S. Y., Guz, A. N. & Zhuk, A. P. (1979). Elastic waves in bodies with initial stresses. Int. Appl. Mech., 15, No. 4, pp. 277-291.
13. Zhuk, A. P. J. (1980). Stoneley wave in a medium with initial stresses. J. Appl. Mech., 16, No. 1, pp. 113-116 (in Russian).
14. Guz, A. N., Makhort, F. G. & Guscha, O. I. (1977). Introduction in acoustoelasticity. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
15. Bagno, A. M. (2018). On the localization of surface waves in the layer of an ideal compressible fluid interacting with the elastic half-space. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 1, pp. 22-28 (in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.022>

Received 09.01.2018

*О.М. Багно*

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

ПРО ВПЛИВ СКІНЧЕННИХ ПОЧАТКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ  
НА ФАЗОВІ ШВИДКОСТІ НОРМАЛЬНИХ ХВИЛЬ У ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРІ,  
ЩО ВЗАЄМОДІЄ З ШАРОМ ІДЕАЛЬНОЇ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ

Розглянуто задачу про поширення нормальних хвиль у попередньо деформованому пружному півпросторі, що взаємодіє з шаром ідеальної стисливої рідини. Дослідження проведено на основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для стислої та нестислої пружних півпросторів і тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини. Застосовані постановка задачі та підхід, засновані на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружного тіла та рідини. Отримані дисперсійні рівняння, які описують поширення гармонічних хвиль у гідропружних системах. Побудовано дисперсійні криві нормальних хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив скінченних початкових деформацій пружного півпростору та товщини шару ідеальної стисливої рідини на фазові швидкості гармонічних хвиль. Показано, що вплив початкових деформацій пружного півпростору на параметри хвильового процесу пов'язаний з властивостями локалізації хвиль. Запропоновано критерій існування нормальних хвиль у гідропружних хвилеводах. Розвинутий підхід і отримані результати дозволяють встановити для хвильових процесів межі застосування моделей, заснованих на різних варіантах теорії малих початкових деформацій та класичній теорії пружності для твердого тіла. Чисельні результати представлені у вигляді графіків і дано їх аналіз.

**Ключові слова:** нормальні хвилі, дисперсія хвиль, стисливі та нестисливі пружні півпростори, шар ідеальної стисливої рідини, початкові напруження.

O.M. Bahno

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

ON THE EFFECT OF FINITE INITIAL DEFORMATIONS  
ON THE PHASE VELOCITIES OF NORMAL WAVES IN THE ELASTIC HALF-SPACE  
INTERACTING WITH THE LAYER OF AN IDEAL COMPRESSIBLE FLUID

The problem of propagation of normal waves in a pre-deformed elastic half-space that interacts with the layer of an ideal compressible fluid is considered. The study is conducted on the basis of the three-dimensional linearized equations of elasticity theory for finite deformations in the compressible and incompressible elastic half-spaces and on the basis of the three-dimensional linearized Euler equations for an ideal compressible fluid. The problem formulation and the approach based on the utilization of representations of general solutions of the linearized equations for elastic solid and fluid are applied. The dispersion equations, which describe the propagation of harmonic waves in hydroelastic systems, are obtained. The dispersion curves for normal waves over a wide range of frequencies are constructed. The effects of finite initial deformations of the elastic half-space and the thickness of the layer of an ideal compressible fluid on the phase velocities of harmonic waves are analyzed. It is shown that the influence of initial deformations of the elastic half-space on the wave process parameters is associated with the localization properties of waves. A criterion for the existence of the normal waves in hydroelastic waveguides is proposed. The approach developed and the results obtained make it possible to establish, for the wave processes, the limits of applicability of the models based on different versions of the theory of small initial deformations and the classical elasticity theory for a solid body. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

**Keywords:** *normal waves, dispersion of waves, compressible and incompressible elastic half-spaces, layer of an ideal compressible fluid, initial stresses.*