
doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.02.045>

УДК 539.3

А.Ю. Глухов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: ndrew.gl@gmail.com

Про вплив початкових напружень на вісесиметричні квазіпоперечні хвилі у нестисливому композитному матеріалі

Представлено академіком НАН України О.М. Гізем

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуто задачу про поширення вісесиметричних хвиль у шаруватому композитному нестисливому матеріалі у випадку проковзування шарів. Досліджені чисельні розв'язки дисперсійного рівняння для нестисливого матеріалу з пружним потенціалом типу Трелоара для різних початкових напружень у шарах композитного матеріалу.

Ключові слова: шаруватий композитний нестисливий матеріал, початкові напруження, пружні хвилі, дисперсійне рівняння.

Шаруваті композитні матеріали — найважливіший клас композитів, що мають унікальне поєднання цінних властивостей і широкий спектр застосування в різних галузях.

Вивченню закономірностей поширення плоских гармонічних хвиль у шаруватих поперечно напружених стисливих та нестисливих матеріалах періодичної структури, яка складається з двох компонентів, присвячені роботи [1–8]. Основні результати в цьому напрямі отримані в такому ж обсязі, як і для шаруватих композитних матеріалів у класичній теорії (без початкових напружень).

У роботах [9–11] розглянуті питання про поширення в радіальному напрямку вісесиметричних хвиль та хвиль кручення в шаруватих композитних матеріалах періодичної структури з початковими напруженнями для випадку повного контакту шарів.

Випадок неповного контакту шарів для вісесиметричних хвиль розглянутий в роботах [12, 13], в яких описано поширення хвиль вздовж шарів із стисливого і нестисливого матеріалів, наведено дисперсійні рівняння для квазіпоздовжніх та квазіпоперечних хвиль та їх довгохвильові наближення.

У даній роботі наведено результати чисельних досліджень дисперсійного рівняння, яке було отримано в роботі [13], для нестисливого матеріалу з пружним потенціалом типу Трелоара.

© А.Ю. Глухов, 2019

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 2

45

Постановка задачі. У рамках постановки, викладеній у роботі [13], розглядається задача про поширення вісесиметричних пружних хвиль вздовж шарів нестисливого композитного матеріалу періодичної структури з початковими напруженнями. Композитний матеріал складається з шарів двох типів, що чергуються. Матеріали і початкові напружено-деформовані стани однакові для розглянутого типу шарів. Матеріали шарів вважатимемо гіперпружними ізотропними з довільною структурою пружних потенціалів. Вважаємо початковий напружений стан однорідним.

На границях розділу шарів неперервними є лише нормальні до шарів напруження та переміщення, а всі дотичні напруження дорівнюють нулеві. Як і в роботах [12, 13], автором застосовувався метод дослідження, викладений у монографії [14].

Дослідження закономірностей поширення вісесиметричних пружних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями зводиться до побудови розв'язків рівняння руху за граничних умов на площинах розділу шарів і умов періодичності Флоке.

Для квазіпоперечної хвилі, що поширюється вздовж шарів нестисливого композитного матеріалу, в [13] отримано дисперсійне рівняння у вигляді

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_2^{(2)2} - \alpha_1^{(2)2}) \chi_{3113}^{(2)} \left(\begin{aligned} & \alpha_1^{(1)} (\chi_{1313}^{(1)} - \alpha_2^{(1)2} \chi_{3113}^{(1)}) \times (C_{Sy_3}^2 \varrho^{(1)} - \chi_{1111}^{(1)} - \chi_{3333}^{(1)} + \\ & + 2\chi_{1133}^{(1)} + \chi_{1313}^{(1)} - \alpha_1^{(1)2} \chi_{3113}^{(1)}) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h^{(1)} \\ & - \alpha_2^{(1)} (\chi_{1313}^{(1)} - \alpha_1^{(1)2} \chi_{3113}^{(1)}) \times (C_{Sy_3}^2 \varrho^{(1)} - \chi_{1111}^{(1)} - \chi_{3333}^{(1)} + \\ & + 2\chi_{1133}^{(1)} + \chi_{1313}^{(1)} - \alpha_2^{(1)2} \chi_{3113}^{(1)}) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h^{(1)} \end{aligned} \right) - \\
 & - (\alpha_2^{(1)2} - \alpha_1^{(1)2}) \chi_{3113}^{(1)} \left(\begin{aligned} & \alpha_2^{(2)} (\chi_{1313}^{(2)} - \alpha_1^{(2)2} \chi_{3113}^{(2)}) \times (C_{Sy_3}^2 \varrho^{(2)} - \chi_{1111}^{(2)} - \chi_{3333}^{(2)} + \\ & + 2\chi_{1133}^{(2)} + \chi_{1313}^{(2)} - \alpha_2^{(2)2} \chi_{3113}^{(2)}) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h^{(2)} \\ & - \alpha_1^{(2)} (\chi_{1313}^{(2)} - \alpha_2^{(2)2} \chi_{3113}^{(2)}) \times (C_{Sy_3}^2 \varrho^{(2)} - \chi_{1111}^{(2)} - \chi_{3333}^{(2)} + \\ & + 2\chi_{1133}^{(2)} + \chi_{1313}^{(2)} - \alpha_1^{(2)2} \chi_{3113}^{(2)}) \operatorname{tg} \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h^{(2)} \end{aligned} \right) = 0, \quad (1)
 \end{aligned}$$

де $C_{Sy_3} = \omega k^{-1}$ – швидкість квазіпоперечної хвилі вздовж осі Or' , поляризованої в площині $r'Oy_3$; k , ω – хвильове число і кругова частота; $\varrho^{(j)}$, $h^{(j)}$ ($j = 1, 2$) – щільність матеріалів та товщина кожного з шарів у початковому напружено-деформованому стані; $\alpha_{1,2}^{(j)2}$ – корені характеристичних рівнянь (14) [13]; χ' – тензор, що характеризує механічні властивості матеріалів шарів.

Числові результати. Дисперсійне співвідношення (1) отримане для пружного потенціалу довільної форми. Для проведення числового аналізу конкретизуємо вигляд пружного потенціалу. Розглянемо закономірності впливу початкових напружень на швидкість поширення квазіпоперечних хвиль у композитному високоеластичному матеріалі в рамках потенціалу Трелоара [14]

$$w^{(j)} = 2c_{10}^{(j)} A_1^{(j)},$$

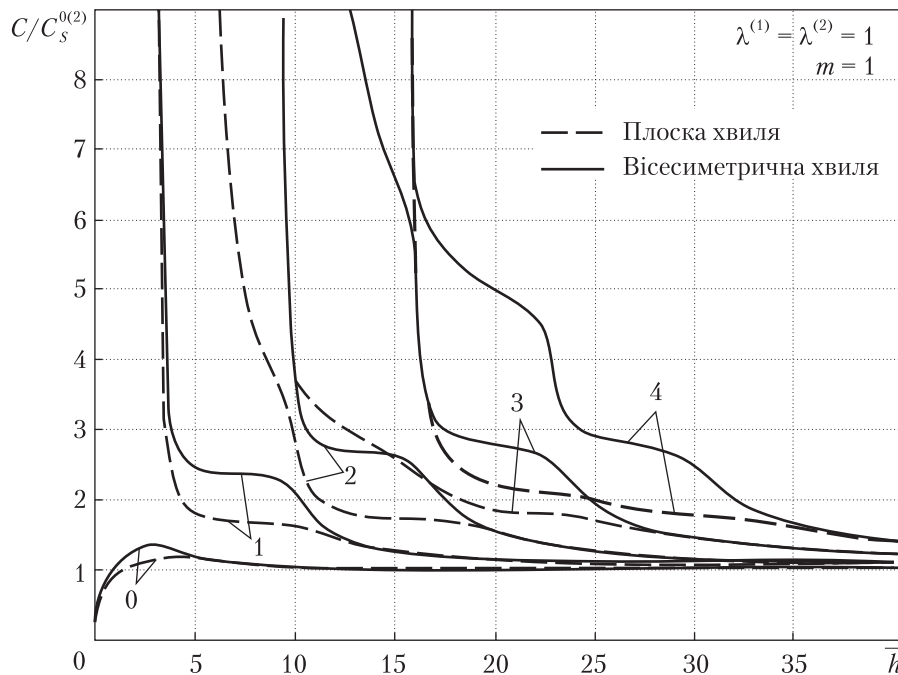


Рис. 1. Залежності фазової швидкості поширення плоскої і вісесиметричної хвиль від частоти у випадку ненапруженого початкового стану

де $c_{10}^{(j)}$ – пружна стала; $A_1^{(j)}$ – алгебраїчний інваріант.

Розрахунки проведені за умов початкового стану $S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq 0$, $S_{33}^{0(j)} = 0$, $\lambda^{(j)} = \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}$, $\lambda_3^{(j)} = \lambda^{(j)-2}$ і таких співвідношень механічних характеристик шарів композита: $c_{10}^{(1)}/c_{10}^{(2)} = 5$; $\rho^{(2)}/\rho^{(1)} = 0,7$.

На всіх рисунках введені такі позначення: $C/C_S^{0(2)}$ – безрозмірна швидкість поширення хвилі в шаруватому композитному матеріалі; \bar{h} – зведена частота ($\bar{h} = k_S^{0(2)} h^{(2)}$), $k_S^{0(2)}$ – хвильове число; $C_S^{0(2)}$ – швидкість поперечних хвиль в ізотропному матеріалі другого шару без початкових напружень; m – параметр шаруватості ($m = h^{(1)}/h^{(2)}$); ζ – відносна фазова швидкість ($\zeta = (C^0 - C)/C^0$); C^0 – швидкість квазіпоперечних хвиль, що поширюються в напрямку осі Or' вздовж шарів нестисливого композитного матеріалу без початкових напружень; C – така ж швидкість при початкових напруженнях.

На рис. 1–3 наведені результати числових розрахунків для квазіпоперечної хвилі, яка поширюється вздовж шарів композитного матеріалу у випадку проковзування шарів.

На рис. 1 показані залежності безрозмірної швидкості поширення плоскої і вісесиметричної хвиль у шаруватому композитному матеріалі $C/C_S^{0(2)}$ від зведеної частоти \bar{h} при $m = 1$ для перших п'яти мод (0–4). Даний випадок відповідає ненапруженому початковому стану.

На рис. 2 зображено відповідні моди у випадку різних початкових напружень у другому шарі композита.

Для композитного матеріалу з початковими напруженнями побудовано залежності відносної зміни фазової швидкості ζ від зведеної частоти \bar{h} (рис. 3).

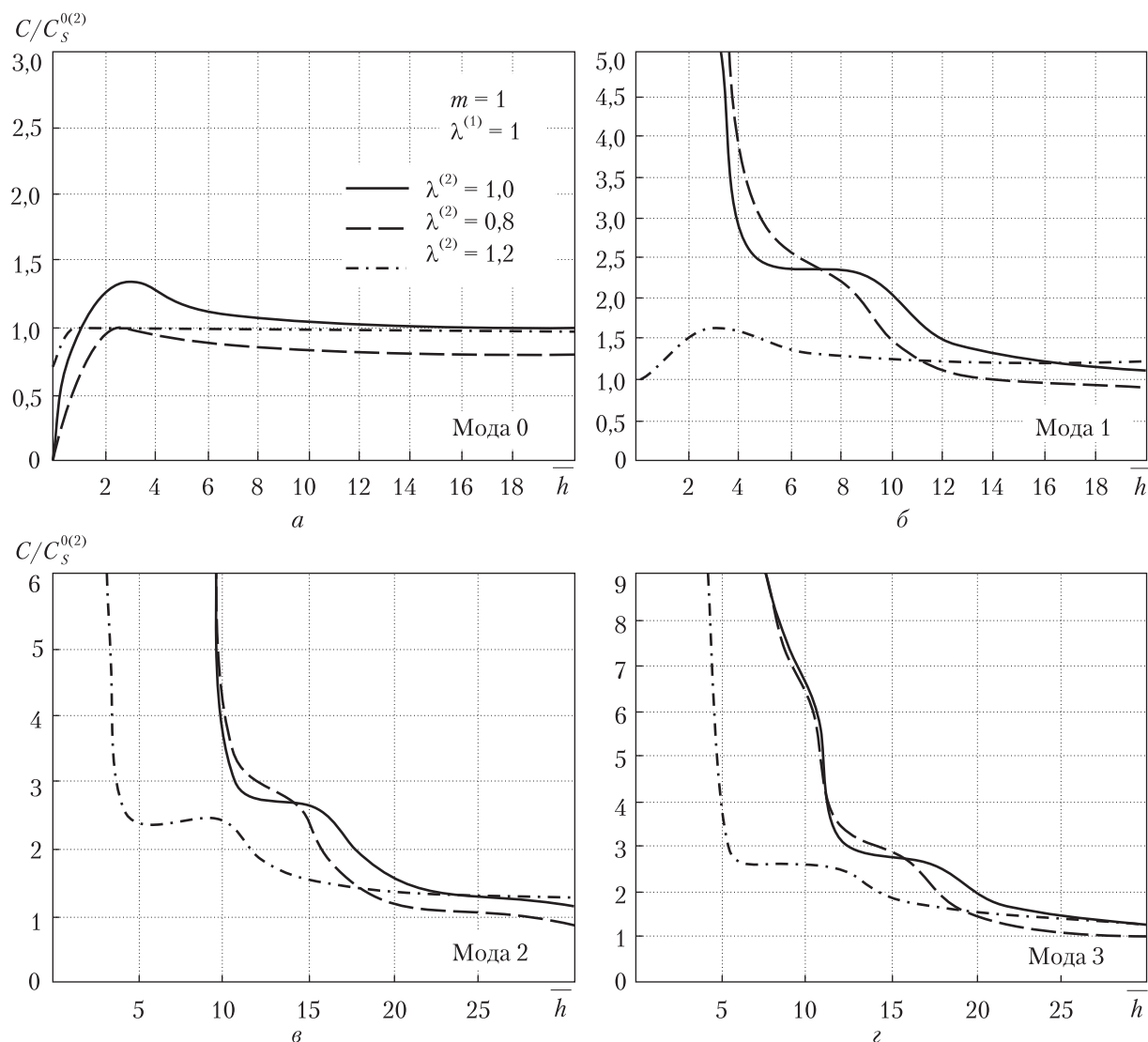


Рис. 2. Залежність фазової швидкості від частоти та початкових напружень (моди 0–3)

Аналізуючи вплив початкових напружень на фазову швидкість, можна зробити такі висновки:

моделі поширення вісесиметричної і плоскої квазіпоперечних хвиль вздовж шарів нестисливого композитного матеріалу значно відрізняються;

початкові напруження істотно впливають на фазову швидкість вісесиметричних хвиль майже на всьому діапазоні частот;

особливо значний вплив початкові напруження справляють на фазову швидкість хвиль, що зароджуються;

як правило, початкові напруження змінюють значення критичної частоти;

залежність фазової швидкості від початкових напружень для кожної моди визначається діапазоном частот;

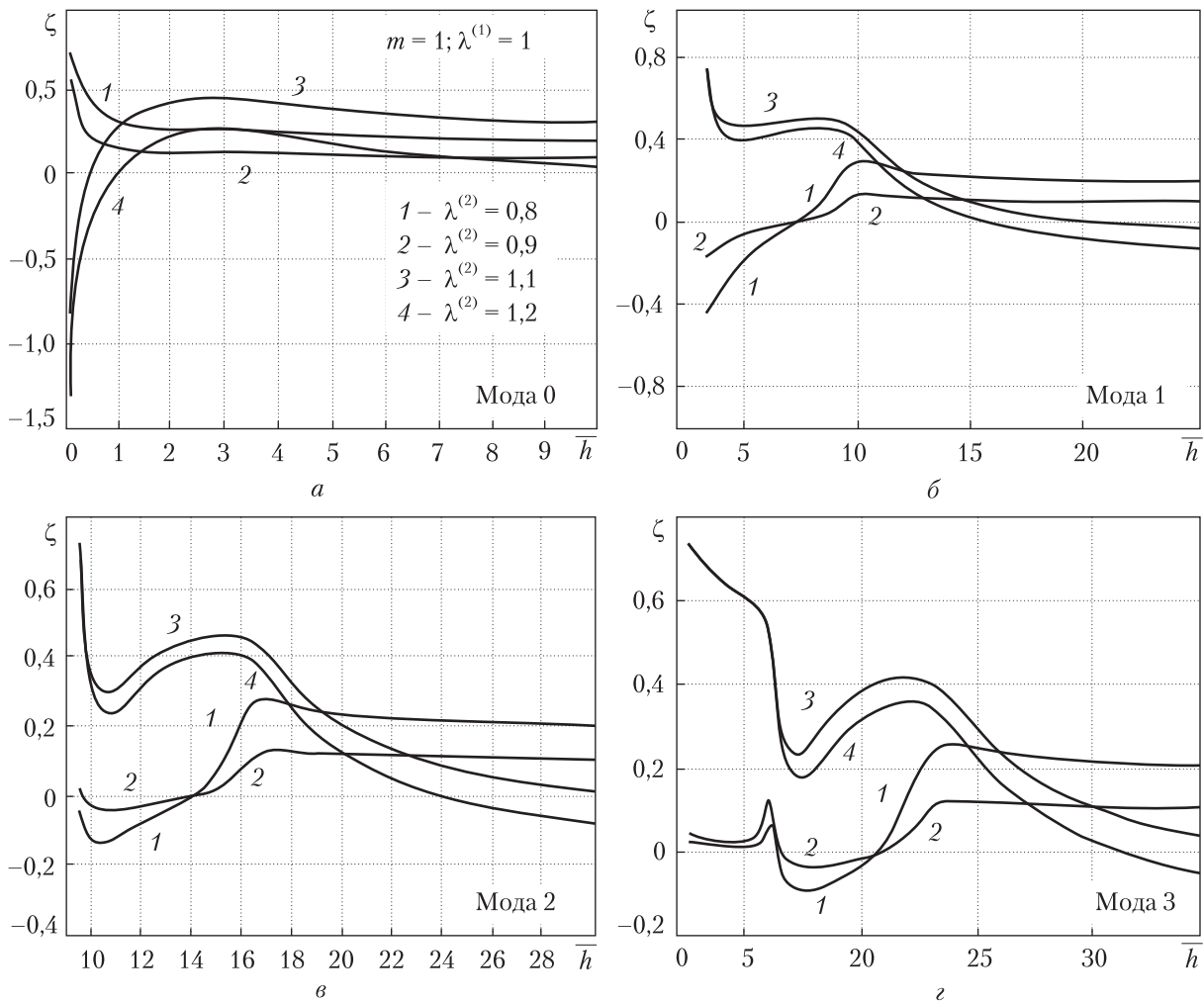


Рис. 3. Залежність відносної фазової швидкості від частоти та початкових напружень (моди 0–3)

існують частоти, у зоні дії яких початкові напруження неістотно впливають (або взагалі не впливають) на значення фазової швидкості;

для розглянутого варіанта початкового стану фазова швидкість значно більше реагує на розтягнення другого шару, ніж на стискання.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Кхань Л.М. Распространение волн в композитных слоистых материалах с большими начальными деформациями. *Прикл. механика*. 1976. **12**, № 1. С. 3–11.
2. Кхань Л.М. Распространение волн вдоль слоев в слоистых несжимаемых материалах с начальными деформациями. *Прикл. механика*. 1976. **12**, № 12. С. 69–72.
3. Кхань Л.М. Распространение волн вдоль слоев в слоистых сжимаемых материалах с начальными деформациями. *Прикл. механика*. 1977. **13**, № 9. С. 21–26.
4. Кхань Л.М. Волны, распространяющиеся под углом к слоям в среде с начальными напряжениями. *Прикл. механика*. 1979. **15**, № 3. С. 24–29.

5. Панасюк О.М. Про поширення хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2010. № 1. С. 65–70.
6. Панасюк О.М. Чисельний аналіз поширення хвиль вздовж шарів композитного матеріалу з початковими напруженнями. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2011. Вип. 15. С. 127–133.
7. Панасюк О.Н. Распространение квазипоперечных волн в слоистых материалах с начальным напряжением с учетом проскальзывания. *Прикл. механика.* 2011. **47**, № 3. С. 59–66.
8. Панасюк О.Н. Распространение квазипродольных волн в слоистых материалах с начальными напряжениями с учетом проскальзывания. *Теорет. и прикл. механика.* 2010. № 1. С. 150–159.
9. Гузь А.Н., Ситенок Н.А., Жук А.П. Осесимметричные упругие волны в слоистом сжимаемом композиционном материале с начальными напряжениями. *Прикл. механика.* 1984. **20**, № 7. С. 3–10.
10. Ситенок Н.А. Волны кручения в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями. *Прикл. механика.* 1984. **20**, № 8. С. 112–116.
11. Guz' A.N. Elastic waves in laminated periodic bodies with initial (residual) stresses. *ICIAM 95: Proceedings of the Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Hamburg, 3–7 July, 1995.* Akademie Verlag, 1996. P. 173.
12. Глухов А.Ю. Про поширення вісесиметричних хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2016. № 8. С. 33–39. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.033>
13. Глухов А.Ю. Вісесиметричні хвилі в шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. 2016. № 10. С. 42–46. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.10.042>
14. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: “А.С.К.”, 2004. 672 с.

Надійшло до редакції 19.11.2018

REFERENCES

1. Guz', A. N. & Han, L. M. (1976). Wave propagation in composite layered materials with large initial deformations. *Sov. Appl. Mech.*, 12, Iss. 1, pp. 1-7. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01073873>
2. Han, L. M. (1976). Wave propagation along layers in layered incompressible materials with initial deformations. *Sov. Appl. Mech.*, 12, Iss. 12, pp. 1258-1262. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00882701>
3. Han, L. M. (1977). Wave propagation along layers in initially strained laminated compressible materials. *Sov. Appl. Mech.*, 13, Iss. 9, pp. 868-873. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00884794>
4. Khan, L. M. (1979). Waves propagating obliquely through layers of a medium with initial strains. *Sov. Appl. Mech.*, 15, Iss. 3, pp. 197-201. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00884356>
5. Panasiuk, O. M. (2010). On the propagation of waves in laminated composite compressible materials with initial stresses at a slipping of layers. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 1, pp. 65-70 (in Ukrainian).
6. Panasiuk, O. M. (2011). Numerical analysis of the waves propagation along the layers of composite with initial stresses. *Problems of computational mechanics and strength of structures*, No. 15, pp. 127-133 (in Ukrainian).
7. Panasyuk, O. N. (2011). Propagation of quasishear waves in prestressed materials with unbonded layers. *Int. Appl. Mech.*, 47, Iss. 3, pp. 276-283. doi: <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0458-x>
8. Panasyuk, O. N. (2010). Propagation of quasi-longitudinal waves in prestressed materials with initial stresses taking slippage into account. *Theoret. Appl. Mech.*, No. 1, pp. 150-159 (in Russian).
9. Guz', A. N., Sitenok, N. A. & Zhuk, A. P. (1984). Axially symmetric elastic waves in a laminated compressible composite material with initial stresses. *Sov. Appl. Mech.*, 20, Iss. 7, pp. 589-596. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00891714>
10. Sitenok, N. A. (1984). Torsion waves in layered composite materials with initial stresses. *Prikladnaya Mekhanika*, 20, No. 8, pp.112-116 (in Russian).
11. Guz', A. N. (1995, July). *Proceedings of the Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics ICIAM 95* (p. 173), Hamburg.
12. Glukhov, A. Yu. (2016). On the propagation of axisymmetric waves in laminated composite compressible materials with initial stresses at the slipping of layers. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 8, pp. 33-39 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.033>

13. Glukhov, A. Yu. (2016). Axisymmetric waves in laminated composite incompressible materials with initial stresses under the slipping of layers. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 10, pp. 42-46 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.10.042>
14. Guz', A. N. (2004). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kiev: A.S.K (in Russian).

Received 19.11.2018

А.Ю. Глухов

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: ndrew.gl@gmail.com

О ВЛИЯНИИ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КВАЗИПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В НЕСЖИМАЕМОМ КОМПОЗИТНОМ МАТЕРИАЛЕ

В рамках линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена задача о распространении осесимметричных волн в слоистом композитном несжимаемом материале при проскальзывании слоев. Исследованы численные решения дисперсионного уравнения для несжимаемого материала с упругим потенциалом типа Трелоара для различных начальных напряжений в слоях композитного материала.

Ключевые слова: слоистый композитный несжимаемый материал, начальные напряжения, упругие волны, дисперсионное уравнение.

А.Ю. Глухов

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: ndrew.gl@gmail.com

ON THE EFFECT OF INITIAL STRESSES ON QUASITRANSVERSAL AXISYMMETRIC WAVES IN AN INCOMPRESSIBLE COMPOSITE

In the framework of the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, the problem of propagation of axisymmetric waves in a layered incompressible composite with the slippage of layers is considered. Numerical solutions of the dispersion equation for an incompressible material with an elastic potential of the Treloar type for various initial stresses in layers of a composite are investigated.

Keywords: laminated incompressible composite, initial stresses, elastic waves, dispersive equation.