
doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.009>
УДК 517.982.27

Т.М. Касіренко, О.О. Мурач, І.С. Чепурухіна

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: kasirenko@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua, Chepurukhina@gmail.com

Простори Хермандера на многовидах та їх застосування до еліптичних крайових задач

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Н. Кочубеєм

Уведено розширену соболевську шкалу на гладкому компактному многовиді з краєм. Її утворюють гільбертові простори Хермандера, для яких показником регулярності служить радіальна функція, RO -змінна на нескінченності за Авакумовичем. Ці простори не залежать від вибору локальних карт на многовиді. Уведена шкала складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболева, отримується інтерполяцією з функціональним параметром цих пар та замкнена відносно цієї інтерполяції. Як застосування уведеної шкали наведено теорему про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі на відповідних просторах Хермандера і знайдено достатні умови належності її узагальнених розв'язків до простору $p \geq 0$ разів неперервно диференційовних функцій.

Ключові слова: простір Хермандера, розширена соболевська шкала, інтерполяція просторів, інтерполяційний простір, еліптична крайова задача.

У сучасному математичному аналізі важливу роль відіграють простори розподілів, для яких показником регулярності служить не число (як у класичних просторах Соболева), а досить загальний функціональний параметр, залежний від частотних змінних (див., наприклад, [1–5]). Понад півстоліття тому Л. Хермандер [1] увів і дослідив широкі класи таких просторів та навів їх застосування до диференціальних рівнянь, заданих у евклідових областях. Утім довгий час простори Хермандера не знаходили широкого застосування в теорії багатовимірних крайових задач, що було пов'язано з браком зручних аналітичних методів для роботи з цими просторами і відсутністю коректного їх означення на многовидах. В останній час ситуація істотно змінилася завдяки роботам В.А. Михайлеця, О.О. Мурача та їх учнів (див. [5] і наведену там літературу). Ними виділено класи гільбертових просторів Хермандера, які отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар соболевських просторів і допускають коректне означення на многовидах (незалежне від вибору локальних карт). Для таких класів вдалося побудувати теорію розв'язності загальних еліптичних крайових задач.

Серед цих класів найширшою є сім'я усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболева. Її уведено і досліджено в [6–8] для евклідових облас-

тей і замкнених гладких многовидів та названо розширеною соболевською шкалою. Вона замкнена відносно інтерполяції гільбертових просторів з функціональним параметром.

Мета цієї роботи — увести розширену соболевську шкалу на довільному гладкому компактному многовиді з краєм і дослідити її властивості, зокрема інтерполяційні. Крім того, ми наведемо деякі застосування цієї шкали до загальних еліптичних крайових задач.

1. Простори Хермандера на многовидах. Нехай M — компактний орієнтовний нескінченно гладкий многовид вимірності $n \geq 1$ з краєм $\partial M \neq \emptyset$. Уведемо клас гільбертових функціональних просторів на $M^\circ := M \setminus \partial M$, узявши за основу простори Хермандера $B_{p,\mu}(\mathbf{R}^n)$ [1, п. 2.2; 2, п. 10.1], де $p=2$, а функція μ частотного аргументу $\xi \in \mathbf{R}^n$ набуває вигляду $\mu(\xi) = \varphi(\langle \xi \rangle)$; тут $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, а $\varphi \in \text{RO}$.

За означенням, множина RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, для яких існують числа $b > 1$ і $c \geq 1$ такі, що $c^{-1} \leq \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leq c$ для будь-яких $t \geq 1$ і $\lambda \in [1, b]$ (числа b і c залежать від φ). Клас RO введений В.Г. Авакумовичем [9], допускає простий опис і досить повно вивчений (див., наприклад, [10, додаток]). Функцію $\varphi \in \text{RO}$ називають RO -змінною на нескінченності.

Як відомо [10, с. 88], для кожної функції $\varphi \in \text{RO}$ існують дійсні числа $s_0 \leq s_1$ та додатні числа c_0 і c_1 такі, що

$$c_0 \lambda^{s_0} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c_1 \lambda^{s_1} \quad \text{для довільних } t \geq 1, \lambda \geq 1. \quad (1)$$

Поклавши тут $t := 1$, бачимо, що ця функція є міжстепенною. Її зв'язок зі степеневими функціями характеризують числа $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$, перше з яких є супремумом усіх дійсних s_0 таких, що виконується ліва частина нерівності (1), а друге є інфімумом усіх дійсних s_1 таких, що виконується права частина нерівності (1). Числа $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$ називаються відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської [11] функції $\varphi \in \text{RO}$. Зокрема, якщо вона правильно змінна на нескінченності [10, с. 9], то ці індекси дорівнюють її порядку.

Нехай $\varphi \in \text{RO}$. Нагадаємо означення вказаного простору Хермандера $B_{2,\varphi(\langle \cdot \rangle)}(\mathbf{R}^n)$, який будемо позначати через $H^\varphi(\mathbf{R}^n)$. Ми розглядаємо комплекснозначні функції і розподіли та комплексні функціональні простори. За означенням, лінійний простір $H^\varphi(\mathbf{R}^n)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів w на \mathbf{R}^n таких, що їх перетворення Фур'є \hat{w} є локально інтегровним за Лебегом на \mathbf{R}^n і задовольняє умову

$$\|w\|_{\varphi, \mathbf{R}^n}^2 := \int_{\mathbf{R}^n} \varphi^2(\langle \xi \rangle) |\hat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Простір $H^\varphi(\mathbf{R}^n)$ гільбертів і сепарабельний відносно норми $\|\cdot\|_{\varphi, \mathbf{R}^n}$.

У випадку степеневі функції $\varphi(t) \equiv t^s$ він стає гільбертовим простором Соболева $H^{(s)}(\mathbf{R}^n)$ порядку $s \in \mathbf{R}$. Узагалі виконуються щільні неперервні вкладення

$$H^{(s_1)}(\mathbf{R}^n) \subset H^\varphi(\mathbf{R}^n) \subset H^{(s_0)}(\mathbf{R}^n)$$

для довільних дійсних чисел s_0 і s_1 , які задовольняють умову (1), зокрема, для довільних $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Клас просторів $\{H^\varphi(\mathbf{R}^n) : \varphi \in \text{RO}\}$ досліджено в [7; 5, п. 2.4.2] і названо розширеною соболевською шкалою.

Для відкритої непорожньої множини $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ простір $H^\varphi(\Omega)$ складається, за означенням, із звужень на Ω усіх розподілів $w \in H^\varphi(\mathbf{R}^n)$. Цей простір гільбертів і сепарабельний відносно норми

$$\|u\|_{\varphi, \Omega} := \inf \left\{ \|w\|_{\varphi, \mathbf{R}^n} : w \in H^\varphi(\mathbf{R}^n), u = w \text{ в } \Omega \right\},$$

де $u \in H^\varphi(\Omega)$. Він є ізотропним випадком просторів, досліджених Л.Р. Волевичем і Б.П. Панеяхом [12, § 3]. Нас окремо цікавить випадок, коли множина Ω є півпростором $\mathbf{R}_+^n := \{(x', x_n) : x' \in \mathbf{R}^{n-1}, x_n > 0\}$.

Означимо тепер гільбертів простір $H^\varphi(M^\circ)$ за допомогою локальних карт і розбиття одиниці на M та норм у просторах $H^\varphi(\mathbf{R}^n)$ і $H^\varphi(\mathbf{R}_+^n)$. Із C^∞ -структури на компактному многовиді M виберемо який-небудь його скінченний атлас. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що останній складається з l локальних карт $\pi_j : \mathbf{R}_+^n \leftrightarrow M_j$, де $j = 1, \dots, l$, і l_0 локальних карт $\pi_j : \mathbf{R}^n \leftrightarrow M_j$, де $j = l+1, \dots, l+l_0$. Тут відкриті (у топології на M) множини M_j , де $j = 1, \dots, l+l_0$, утворюють покриття многовиду M таке, що $M_j \cap \partial M \neq \emptyset$ тоді і лише тоді, коли $j \leq l$. Звісно, $\mathbf{R}_+^n := \{(x', x_n) : x' \in \mathbf{R}^{n-1}, x_n \geq 0\}$. Крім того, виберемо розбиття одиниці на M , утворене деякими функціями $\chi_j \in C^\infty(M)$, де $j = 1, \dots, l+l_0$, які задовольняють умову $\text{supp } \chi_j \subset M_j$.

Нехай, як і раніше, $\varphi \in \text{RO}$. За означенням, простір $H^\varphi(M^\circ)$ є поповненням лінійного многовиду $C^\infty(M)$ за нормою

$$\|u\|_{\varphi, M^\circ} = \left(\sum_{j=1}^l \|(\chi_j u) \circ \pi_j\|_{\varphi, \mathbf{R}_+^n}^2 + \sum_{j=l+1}^{l+l_0} \|(\chi_j u) \circ \pi_j\|_{\varphi, \mathbf{R}^n}^2 \right)^{1/2}.$$

Тут, звісно, $(\chi_j u) \circ \pi_j$ позначає функцію $(\chi_j u)(\pi_j(x))$ аргументу $x \in \mathbf{R}_+^n$ або $x \in \mathbf{R}^n$. Цей простір гільбертів і сепарабельний відносно вказаної норми.

Теорема 1. *Гільбертів простір $H^\varphi(M^\circ)$, де $\varphi \in \text{RO}$, не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору атласу многовиду M і відповідного розбиття одиниці на M .*

Клас просторів $\{H^\varphi(M^\circ) : \varphi \in \text{RO}\}$ називаємо розширеною соболевською шкалою на M° . Якщо $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbf{R}$, то $H^\varphi(M^\circ)$ стає гільбертовим простором Соболева порядку s , який позначаємо через $H^{(s)}(M^\circ)$. У випадку, коли функція φ правильно змінна на нескінченності за Й. Караматою, простір $H^\varphi(M^\circ)$ уведено і досліджено в [13, п. 3]. Якщо M° — евклідова область Ω (обмежена з межею класу C^∞), то $H^\varphi(M^\circ) = H^\varphi(\Omega)$ з точністю до еквівалентності норм. У цьому випадку розширена соболевська шкала досліджена в [8] (навіть для областей з ліпшіцевою межею).

Кожний простір $H^\varphi(M^\circ)$ неперервно вкладається у лінійний топологічний простір усіх продовжуваних розподілів на M° . Тому ці простори можна порівнювати.

Теорема 2. *Нехай $\varphi_0, \varphi_1 \in \text{RO}$. Вкладення $H^{\varphi_1}(M^\circ) \subset H^{\varphi_0}(M^\circ)$ виконується тоді і тільки тоді, коли функція φ_0/φ_1 обмежена в околі нескінченності. У цьому випадку вкладення неперервне. Воно компактно тоді і тільки тоді, коли $\varphi_0(t)/\varphi_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.*

З теореми 2 випливає, що для довільних дійсних чисел s_0 і s_1 , які задовольняють (1), виконуються неперервні вкладення $H^{(s_1)}(M^\circ) \subset H^\varphi(M^\circ) \subset H^{(s_0)}(M^\circ)$. Ці вкладення компактні, якщо $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $s_1 > \sigma_1(\varphi)$.

Обговоримо зв'язок простору $H^\varphi(M^\circ)$ з його аналогом на ∂M ; тут $n \geq 2$. Зауважимо, що ∂M — замкнений нескінченно гладкий многовид вимірності $n-1$. Простір $H^\eta(\partial M)$, де $\eta \in \mathbf{RO}$, уведено і досліджено в [6] (див. також [5, п. 2.4.2]). Він є поповненням лінійного многовиду $C^\infty(\partial M)$ за нормою

$$\|h\|_{\eta, \partial M} = \left(\sum_{j=1}^l \|(\chi_j h)(\pi_j(\cdot, 0))\|_{\eta, \mathbf{R}^{n-1}}^2 \right)^{1/2}.$$

Простір $H^\eta(\partial M)$ гільбертів та сепарабельний відносно цієї норми і з точністю до еквівалентності норм не залежить від вибору локальних карт $\pi_j(\cdot, 0): \mathbf{R}^{n-1} \leftrightarrow M_j \cap \partial M$, які покривають многовид ∂M , та відповідного розбиття одиниці на ∂M [6, с. 32].

Теорема 3. Нехай $\varphi \in \mathbf{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > 1/2$. Тоді відображення $R: u \mapsto u|_{\partial M}$, де $u \in C^\infty(M)$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора сліду $R: H^\varphi(M^\circ) \rightarrow H^{\varphi\rho^{-1/2}}(\partial M)$. Цей оператор сюр'єктивний і має обмежений лінійний правий обернений оператор $S: H^{\varphi\rho^{-1/2}}(\partial M) \rightarrow H^\varphi(M^\circ)$ такий, що відображення S не залежить від φ .

Тут і далі використано функціональний параметр $\rho(t) := t$ аргументу $t \geq 1$. Отже, $\varphi\rho^{-1/2}$ позначає функцію $\varphi(t)t^{-1/2}$ аргументу t .

З теореми 3 випливає, що простір $H^\eta(\partial M)$, де $\eta \in \mathbf{RO}$ і $\sigma_0(\eta) > 0$, складається зі слідів на ∂M усіх розподілів $u \in H^{\eta\rho^{1/2}}(M^\circ)$, а норма у цьому просторі еквівалентна нормі

$$\inf \left\{ \|u\|_{\eta\rho^{1/2}, M^\circ} : u \in H^{\eta\rho^{1/2}}(M^\circ), Ru = h \right\},$$

де $h \in H^\eta(\partial M)$.

2. Інтерполяційні властивості просторів Хермандера. Розширена соболевська шкала на M° складається (з точністю до еквівалентності норм) з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар соболевських просторів $H^{(s_0)}(M^\circ)$ і $H^{(s_1)}(M^\circ)$, де $s_0 < s_1$. Нагадаємо, що гільбертів простір X називають інтерполяційним для пари $[H_0, H_1]$ гільбертових просторів, другий з яких неперервно вкладений у перший, якщо задовольняються такі дві властивості: а) виконуються неперервні вкладення $H_1 \subset X \subset H_0$; б) як тільки який-небудь лінійний оператор T є обмеженим на H_0 і на H_1 , то він є також обмеженим на X . Зазначена інтерполяційна властивість цієї шкали впливає з такого результату:

Теорема 4. Нехай $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$ і $s_0 < s_1$. Гільбертів простір X є інтерполяційним для пари соболевських просторів $H^{(s_0)}(M^\circ)$ і $H^{(s_1)}(M^\circ)$ тоді і тільки тоді, коли $X = H^\varphi(M^\circ)$ з точністю до еквівалентності норм для деякого параметра $\varphi \in \mathbf{RO}$, який задовольняє умову (1).

Зауважимо тут, що умову (1) можна переформулювати за допомогою індексів Матушевської. А саме — вона еквівалентна такій парі умов: і) $s_0 \leq \sigma_0(\varphi)$, причому $s_0 < \sigma_0(\varphi)$, якщо в означенні $\sigma_0(\varphi)$ супремум не досягається; ii) $\sigma_1(\varphi) \leq s_1$, причому $\sigma_1(\varphi) < s_1$, якщо в означенні $\sigma_1(\varphi)$ інфімум не досягається.

Для застосувань просторів $H^\varphi(M^\circ)$ важливо, що вони отримуються інтерполяцією з функціональним параметром деяких пар гільбертових соболевських просторів на M° . У цьому зв'язку нагадаємо означення методу інтерполяції з функціональним параметром пар

гільбертових просторів, запропонованого Ч. Фояшом і Ж.-Л. Ліонсом [14]. У його викладі спираємося в основному на монографію [5, п. 1.1].

Нам достатньо обмежитися випадком регулярної пари $H := [H_0, H_1]$ сепарабельних гільбертових просторів. Її регулярність означає, що H_1 неперервно і щільно вкладено в H_0 . Для неї існує самоспряжений додатно визначений оператор J у гільбертовому просторі H_0 з областю визначення H_1 , який встановлює ізометричний ізоморфізм між гільбертовими просторами H_1 і H_0 . Цей оператор визначається за парою H однозначно.

Нехай вимірною за Борелем функція $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ обмежена на кожному відрізку $[a, b]$, де $0 < a < b < \infty$, і відокремлена від нуля на кожній множині $[r, \infty)$, де $r > 0$. Множину усіх таких функцій позначимо через \mathbf{B} . У гільбертовому просторі H_0 за допомогою спектральної теореми означений (взагалі кажучи, необмежений) оператор $\psi(J)$ як борелева функція ψ від самоспряженого оператора J . Позначимо через $[H_0, H_1]_\psi$ або коротко через H_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену нормою $\|u\|_{H_\psi} := \|\psi(J)u\|_{H_0}$, де $u \in H_\psi$. Простір H_ψ гільбертів і сепарабельний, до того ж виконується неперервне і щільне вклядення $H_\psi \subset H_0$.

Функцію ψ називають інтерполяційним параметром, якщо для довільних регулярних пар $H := [H_0, H_1]$ і $G := [G_0, G_1]$ гільбертових просторів та для довільного лінійного відображення T , заданого на H_0 , виконується така властивість: якщо при кожному $j \in \{0, 1\}$ звуження відображення T на простір H_j є обмеженим оператором $T : H_j \rightarrow G_j$, то і звуження відображення T на простір H_ψ є обмеженим оператором $T : H_\psi \rightarrow G_\psi$. Тоді кажуть, що простір H_ψ отримано інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари H . Функція $\psi \in \mathbf{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли існує вгнута функція $\psi_0 : (r, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ така, що обидві функції ψ/ψ_0 і ψ_0/ψ обмежені на (r, ∞) , де $r \gg 1$.

Теорема 5. Нехай $\varphi \in \text{RO}$, а дійсні числа $s_0 < s_1$ задовольняють умову (1). Означимо інтерполяційний параметр $\psi \in \mathbf{B}$ за формулами $\psi(\tau) := \tau^{-s_0/(s_1-s_0)} \varphi(\tau^{1/(s_1-s_0)})$, якщо $\tau \geq 1$, і $\psi(\tau) := \varphi(1)$, якщо $0 < \tau < 1$. Тоді

$$H^\varphi(M^\circ) = [H^{(s_0)}(M^\circ), H^{(s_1)}(M^\circ)]_\psi \text{ з еквівалентністю норм.}$$

Зауважимо, що будь-які числа $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $s_1 > \sigma_1(\varphi)$ задовольняють умову (1) стосовно $\varphi \in \text{RO}$.

Розширена соболевська шкала на M° замкнена відносно розглянутого методу інтерполяції з функціональним параметром.

Теорема 6. Нехай $\varphi_0, \varphi_1 \in \text{RO}$ і $\psi \in \mathbf{B}$. Припустимо, що функція φ_0 / φ_1 обмежена в околі нескінченності, а функція ψ є інтерполяційним параметром. Тоді

$$[H^{\varphi_0}(M^\circ), H^{\varphi_1}(M^\circ)]_\psi = H^\varphi(M^\circ) \text{ з еквівалентністю норм,}$$

де функція $\varphi(t) := \varphi_0(t)\psi(\varphi_1(t)/\varphi_0(t))$ аргументу $t \geq 1$ належить до класу RO .

У випадку, коли M° — евклідова область, теореми 4–6 доведено в [8].

3. Застосування. Розглянемо на M° еліптичну крайову задачу

$$Au = f \text{ на } M^\circ, \quad B_j u = g_j \text{ на } \partial M, \quad j = 1, \dots, q \tag{2}$$

(див., наприклад, [15, п. 1.2]). Тут A — лінійний диференціальний оператор на M довільного парного порядку $2q \geq 2$, а кожне B_j — крайовий лінійний диференціальний оператор на ∂M довільного порядку $m_j \geq 0$. Усі коефіцієнти цих операторів належать до класів $C^\infty(M)$ і $C^\infty(\partial M)$ відповідно. Покладемо $B := (B_1, \dots, B_q)$ і $m := \max\{m_1, \dots, m_q\}$.

Теорема 7. Нехай $\varphi \in \text{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. Тоді відображення $u \mapsto (Au, B_1u, \dots, B_qu)$, де $u \in C^\infty(M)$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора на парі гільбертових просторів

$$H^\varphi(M^\circ) \text{ і } H^{\varphi p - 2q}(M^\circ) \oplus \bigoplus_{j=1}^q H^{\varphi p - m_j - 1/2}(\partial M).$$

Цей оператор нетерів. Його ядро лежить в $C^\infty(M)$ і разом з індексом не залежить від φ .

Ця теорема виводиться із соболевського випадку (коли $\varphi(t) \equiv t^s$) за допомогою інтерполяційної теореми 5 та її аналогу для просторів Хермандера на ∂M .

Нехай U — відкрита (у топології на M) підмножина многовиду M , а $V := U \cap \partial M \neq \emptyset$. Позначимо через $H_{\text{loc}}^\varphi(U)$, де $\varphi \in \text{RO}$, лінійний простір усіх продовжуваних розподілів u на M° таких, що $\chi u \in H^\varphi(M^\circ)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(M)$, яка задовольняє умову $\text{supp } \chi \subset U$. Аналогічно позначимо через $H_{\text{loc}}^\eta(V)$, де $\eta \in \text{RO}$, лінійний простір усіх розподілів h на ∂M таких, що $\chi h \in H^\eta(\partial M)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\partial M)$, яка задовольняє умову $\text{supp } \chi \subset V$.

Теорема 8. Припустимо, що функція $u \in \bigcup_{s > m + 1/2} H^{(s)}(M)$ є розв'язком еліптичної крайової задачі (2), праві частини якої задовольняють умову

$$(f, g_1, \dots, g_q) \in H_{\text{loc}}^{\varphi p - 2q}(U) \times \prod_{j=1}^q H_{\text{loc}}^{\varphi p - m_j - 1/2}(V)$$

для деякого параметра $\varphi \in \text{RO}$ такого, що $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. Тоді $u \in H_{\text{loc}}^\varphi(U)$.

З цієї теореми і версії теореми вкладення Хермандера [1, с. 59] для простору $H^\varphi(M)$ випливає

Теорема 9. Нехай ціле число $p \geq 0$. Припустимо, що функція u задовольняє умову теореми 8, де

$$\int_1^\infty t^{2p+n-1} \varphi^{-2}(t) dt < \infty. \tag{3}$$

Тоді $u \in C^p(U)$. Умова (3) є точною.

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проектом Ф75/29007 Державного фонду фундаментальних досліджень.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва: Мир, 1965. 380 с.
2. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Москва: Мир, 1986. 456 с.

3. Jacob N. Pseudodifferential operators and Markov processes: In 3 vol. London: Imperial College Press., 2001, 2002, 2005.
4. Nicola F., Rodino L. Global Pseudodifferential Calculus on Euclidean spaces. Basel: Birkhäuser, 2010. x+306 p.
5. Mikhailets V.A., Murach A.A. Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin, Boston: De Gruyter, 2014. xii+297 p.
6. Михайлець В.А., Мурач А.А. Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2009. № 3. С. 13–19.
7. Михайлець В.А., Мурач А.А. Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы. *Укр. мат. журн.* 2013. **65**, № 3. С. 368–380.
8. Mikhailets V.A., Murach A.A. Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces. *Results Math.* 2015. **67**, № 1. P. 135–152.
9. Avakumović V.G. О jednom O-inverznom stavu. *Rad. Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti.* 1936. **254**. P. 167–186.
10. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Москва: Наука, 1985. 144 с.
11. Matuszewska W. On a generalization of regularly increasing functions. *Stud. Math.* 1964. **24**. P. 271–279.
12. Волевич Л.Р., Панеях Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. *Успехи мат. наук.* 1965. **20**, № 1. С. 3–74.
13. Михайлець В.А., Мурач А.А. Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II. *Укр. мат. журн.* 2006. **58**, № 3. С. 352–370.
14. Foias C., Lions J.-L. Sur certains théorèmes d'interpolation. *Acta Sci. Math. (Szeged)*. 1961. **22**, № 3–4. P. 269–282.
15. Agranovich M.S. Elliptic boundary problems. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Vol. 79. Partial differential equations, IX. Berlin: Springer, 1997. P. 1–144.

Надійшло до редакції 11.12.2018

REFERENCES

1. Hörmander, L. (1963). Linear partial differential operators. Berlin: Springer.
2. Hörmander, L. (1983). The analysis of linear partial differential operators. (Vol. 2). Differential operators with constant coefficients. Berlin: Springer.
3. Jacob, N. (2001, 2002, 2005). Pseudodifferential operators and Markov processes (in 3 vols). London: Imperial College Press.
4. Nicola, F. & Rodino, L. (2010). Global Pseudodifferential Calculus on Euclidean spaces. Basel: Birkhäuser.
5. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2014). Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin, Boston: De Gruyter.
6. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2009). Elliptic operators on a closed compact manifold. *Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr.*, No. 3, pp. 13-19 (in Russian).
7. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2013). Extended Sobolev scale and elliptic operators. *Ukr. Math. J.*, 65, No. 3, pp. 435-447.
8. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2015). Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces. *Results Math*, 67, No. 1, pp. 135-152.
9. Avakumović, V. G. (1936). О jednom O-inverznom stavu. *Rad. Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti*, 254, pp. 167-186.
10. Seneta, E. (1976). Regularly varying functions. Berlin: Springer.
11. Matuszewska, W. (1964). On a generalization of regularly increasing functions. *Studia Math.*, 24, pp. 271-279.
12. Volevich, L. R. & Paneah, B. P. (1965). Certain spaces of generalized functions and embedding theorems. *Russ. Math. Surv.*, 20, No. 1, pp. 1-73.
13. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2006). Refined scales of spaces, and elliptic boundary value problems. II. *Ukr. Math. J.*, 58, No. 3, pp. 398-417.
14. Foias, C. & Lions, J.-L. (1961). Sur certains théorèmes d'interpolation. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 22, No. 3-4, pp. 269-282.
15. Agranovich, M.S. (1997). Elliptic boundary problems. In *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* (Vol. 79). Partial differential equations, IX (pp. 1-144). Berlin: Springer.

Received 11.12.2018

Т.Н. Касиренко, А.А. Мурач, І.С. Чепурухіна

Інститут математики НАН України, Київ

E-mail: kasirenko@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua, Chepurukhina@gmail.com

ПРОСТРАНСТВА ХЕРМАНДЕРА НА МНОГООБРАЗИЯХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

Введена расширенная соболевская шкала на гладком компактном многообразии с краем. Ее образуют гильбертовы пространства Хермандера, для которых показателем регулярности служит радиальная функция, R_0 -меняющаяся на бесконечности по Авакумовичу. Эти пространства не зависят от выбора локальных карт на многообразии. Введенная шкала состоит из всех гильбертовых пространств, интерполяционных для пар гильбертовых пространств Соболева, получается интерполяцией с функциональным параметром этих пар и замкнута относительно этой интерполяции. В качестве применения введенной шкалы приведена теорема о нетеровости общей эллиптической краевой задачи на соответствующих пространствах Хермандера и найдены достаточные условия принадлежности ее обобщенных решений пространству $p \geq 0$ раз непрерывно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: пространство Хермандера, расширенная соболевская шкала, интерполяция пространств, интерполяционное пространство, эллиптическая краевая задача.

Т.М. Kasirenko, A.A. Murach, I.S. Chepurukhina

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: kasirenko@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua, Chepurukhina@gmail.com

HÖRMANDER SPACES ON MANIFOLDS, AND THEIR APPLICATION TO ELLIPTIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

We introduce an extended Sobolev scale on a smooth compact manifold with boundary. The scale is formed by inner-product Hörmander spaces, for which a radial function R_0 -varying in the sense of Avakumović serves as a regularity index. These spaces do not depend on a choice of local charts on the manifold. The scale consists of all Hilbert spaces that are interpolation ones for pairs of inner-product Sobolev spaces, is obtained by the interpolation with a function parameter of these pairs, and is closed with respect to this interpolation. As an application of the scale introduced, we give a theorem on the Fredholm property of a general elliptic boundary-value problem on appropriate Hörmander spaces and find sufficient conditions, under which its generalized solutions belong to the space of $p \geq 0$ times continuously differentiable functions.

Keywords: Hörmander space, extended Sobolev scale, interpolation between spaces, interpolation space, elliptic boundary-value problem.