ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.029
УДК 539.3

В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Є.Д. Бєлов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: vfmeish@gmail.com

До постановки динамічних задач теорії дискретно поздовжньо підкріплених конічних оболонок в неортогональній системі координат

Представлено членом-кореспондентом НАН України І.С. Чернишенком

Розглянуто постановку динамічних задач поздовжньо підкріплених конічних оболонок еліптичного поперечного перерізу при впливі на них розподіленого навантаження. Наведено рівняння коливань підкріпленої конічної оболонки в неортогональній системі координат. Використано варіант теорії оболонок та стержнів С.П. Тимошенка.

Ключові слова: *конічна оболонка, еліптичний переріз, теорія оболонок та стержнів С.П. Тимошенка.*

Розглядається постановка задачі динамічного деформування дискретно підкріпленої конічної оболонки еліптичного перерізу при розподіленому внутрішньому навантаженні. Рівняння серединної поверхні оболонки в параметричному вигляді задаються згідно зі співвідношенням:

$$X = k_1 x^1 \cos x^2, \quad Y = x^1 \sin x^2, \quad Z = k_2 x^1, \tag{1}$$

де X, Y, Z — декартова система координат; x^1, x^2 — координати на серединній поверхні оболонки; $k_1 = a/b$, $k_2 = c/b$; a, b — параметри еліптичності основи конуса; c — висота конуса.

Рівняння (1) визначають коефіцієнти першої та другої квадратичної форми серединної поверхні оболонки, що розглядається, за формулами

$$a_{ij} = \frac{\partial X}{\partial x^i}\frac{\partial X}{\partial x^j} + \frac{\partial Y}{\partial x^i}\frac{\partial Y}{\partial x^j} + \frac{\partial Z}{\partial x^i}\frac{\partial Z}{\partial x^j} \quad (i, j = 1, 2);$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x^i}\frac{\partial Z}{\partial x^j} - \frac{\partial Z}{\partial x^i}\frac{\partial Y}{\partial x^j}\right)\frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x^i}\frac{\partial X}{\partial x^j} - \frac{\partial X}{\partial x^i}\frac{\partial Z}{\partial x^j}\right)\frac{\partial^2 Y}{\partial x^i \partial x^j} + \right. \tag{2}$$

$$\left. + \left(\frac{\partial X}{\partial x^i}\frac{\partial Y}{\partial x^j} - \frac{\partial Y}{\partial x^i}\frac{\partial X}{\partial x^j}\right)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^i \partial x^j}\right].$$

При цьому згідно з (1),

$$a_{11} = k_1^2 \cos^2 x^2 + \sin^2 x^2 + k_2^2; \quad a_{22} = (x^1)^2 (k_1^2 \sin^2 x^2 + \cos^2 x^2);$$
$$a_{12} = 0{,}5x^1(1-k_1^2)\sin 2x^2; \quad b_{11} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = k_1 k_2 (x^1)^2/\sqrt{g},$$

де g — фундаментальний визначник метричного тензора, що визначається $g = a_{11}a_{22} - a_{11}^2$.

Для опису динамічної поведінки конічних оболонок приймається лінійний варіант уточненої теорії тонких оболонок в рамках моделі С.П. Тимошенка [1, 2]. Закон розподілення переміщень по товщині оболонки приймається у вигляді

$$u_1^z = u_1(x^1, x^2, t) + z\varphi_1(x^1, x^2, t),$$
$$u_2^z = u_2(x^1, x^2, t) + z\varphi_2(x^1, x^2, t), \quad u_3^z = u_3(x^1, x^2, t); \tag{3}$$

$$u^{1z} = u^1(x^1, x^2, t) + z\varphi^1(x^1, x^2, t),$$
$$u^{2z} = u^2(x^1, x^2, t) + z\varphi^2(x^1, x^2, t). \tag{4}$$

У співвідношеннях (3) та (4) величини з нижніми індексами відповідають коваріантним компонентам узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки $\bar{U}_1 = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$, а величини з верхніми індексами — контрваріантним компонентам узагальненого вектора переміщень $\bar{U}^1 = (u^1, u^2, u^3, \varphi^1, \varphi^2)$ [2].

Поздовжнє i-е ребро розглядається як одновимірна система, яка характеризується лінією центра ваги поперечного перерізу ребра. Рівняння лінії центра ваги поперечного перерізу i-го поздовжнього ребра в параметричному вигляді задаються як частковий випадок співвідношень (1) при фіксованому значенні змінної x^2, тобто

$$x_i = k_1 x^1 \cos x_i^2, \quad y_i = x^1 \cos x_i^2, \quad z_i = k_2 x^1. \tag{5}$$

Згідно з рівняннями (2) маємо

$$a_{11i} = k_1^2(\cos x_i^2)^2 + (\sin x_i^2)^2 + k_2^2.$$

Для опису динамічної поведінки i-го поздовжнього ребра приймається лінійний варіант теорії стержнів в рамках моделі С.П. Тимошенка [1]. Тобто, лінія центра ваги поперечного перерізу i-го ребра характеризується двома векторами:

$$\bar{U}_{1i} = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}) \text{ та } \bar{U}_i^1 = (u_i^1, u_i^2, u_i^3, \varphi_i^1, \varphi_i^2).$$

В подальшому покладається, що ребро жорстко з'єднане з оболонкою. При цьому умови контакту i-те ребро — оболонка мають вигляд [1]:

$$u_{1i}(x^1) = u_1(x^1, x_i^2) \pm h_i\varphi_1(x^1, x_i^2), \quad u_{2i}(x^1) = u_2(x^1, x_i^2) \pm h_i\phi_2(x^1, x_i^2),$$
$$u_{3i}(x^1) = u_3(x^1, x_i^2), \quad \varphi_{1i}(x^1) = \varphi_1(x^1, x_i^2), \quad \varphi_{2i}(x^1) = \varphi_2(x^1, x_i^2); \tag{6}$$

$$u_i^1(x^1) = u^1(x^1, x_i^2) \pm h_i\varphi^1(x^1, x_i^2), \; u_i^2(x^1) = u^2(x^1, x_i^2) \pm h_i\varphi^2(x^1, x_i^2),$$
$$u_i^3(x^1) = u^3(x^1, x_i^2)\; \varphi_i^1(x^1) = \varphi^1(x^1, x_i^2), \quad \varphi_{i\,2i}^2(x^1) = \varphi^2(x^1, x_i^2). \tag{7}$$

В співвідношеннях (6) та (7) $h_i = 0{,}5(h + h_{pi})$; h_{pi} — висота i-го ребра; знаки "$\pm$" відповідають випадкам зовнішнього та внутрішнього підкріплень відповідно.

Для виведення рівнянь коливань конічних оболонок застосовується варіаційний принцип Гамільтона—Остроградського

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta \Pi + \delta A)\, dt = 0, \qquad \Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{I} \Pi_i, \quad K = K_0 + \sum_{i=1}^{I} K_i, \tag{8}$$

де Π_0, Π_i — потенціальна енергія гладкої оболонки та i-го ребра; K_0, K_i — відповідні кінетичні енергії; A — робота зовнішніх сил.

Вирази для потенціальної та кінетичної енергії задаються такими формулами:

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \iint_{\sigma} (T^{11}\varepsilon_{11} + T^{22}\varepsilon_{22} + 2T^{12}\varepsilon_{12} + 2T^{13}\varepsilon_{13} + 2T^{23}\varepsilon_{23} + M^{11}\kappa_{11} + M^{22}\kappa_{22} + 2M^{12}\kappa_{12})\, d\Omega,$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_{L_i} (T_i^{11}\varepsilon_{11i} + T_i^{12}\varepsilon_{12i} + T_i^{11}\varepsilon_{11i} + M_i^{11}\kappa_{11i} + M_i^{12}\kappa_{12i})\, dL_i,$$

$$K = \frac{\rho h}{2} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t}\frac{\partial u^3}{\partial t} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\frac{\partial \phi^1}{\partial t} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial \phi_2}{\partial t}\frac{\partial \phi^2}{\partial t}\right) d\Omega,$$

$$K_i = \frac{\rho_i}{2} \int_{L_i} \left[F_i \left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial t}\frac{\partial u_1^i}{\partial t} + \frac{\partial u_{2i}}{\partial t}\frac{\partial u_2^i}{\partial t} + \frac{\partial u_{3i}}{\partial t}\frac{\partial u_3^i}{\partial t} \right) + I_{1i}\frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial t}\frac{\partial \varphi_i^1}{\partial t} + I_{2i}\frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial t}\frac{\partial \varphi_i^2}{\partial t} \right] dL_i,$$

$$d\Omega = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2, \quad dL_i = a_{11i}\, dx^1.$$

Після стандартних перетворень у функціоналі (8) отримаємо дві групи рівнянь коливань вихідної неоднорідної конструкції в загальному вигляді:

рівняння коливань власно гладкої конічної оболонки

$$\begin{aligned} &\rho h \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_i T^{ij} - b_i^j T^{i3} + P^i \quad (i, j = 1, 2); \\ &\rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \nabla_i T^{i3} + b_{ij} T^{ij} + P_3; \\ &\rho I \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2} = \nabla_i M^{ij} - T^{i3} + m^i; \end{aligned} \tag{9}$$

рівняння коливань i-го підкріплюючого ребра

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_i^{1j}}{\partial x^1} + [T^{2j}]_i = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^j}{\partial t^2} \quad (j = \overline{1,3}), \\ &\frac{\partial M_i^{1j}}{\partial x^1} + [M^{2j}]_i - T_i^{13}\delta_{1j} = \rho_i I_i \frac{\partial^2 \varphi_i^j}{\partial t^2} \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \tag{10}$$

У формулах (9) індексами 1 та 2 позначені змінні по координатах x^1, x^2; $u^1, u^2, u_3, \varphi^1, \varphi^2$ — контраваріантні компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки; T^{ij}, T^{i3}, M^{ij} — контраваріантні компоненти тензорів зусиль та моментів; P^i, P_3, m^i — компоненти зусиль на поверхні оболонки; ∇_i — контраваріантна похідна; ρ — густина матеріалу оболонки; h — товщина оболонки; $I = h^3/12$; δ_{1j} — символ Кронекера.

У формулах (10) $\underset{i}{u}^1, \underset{i}{u}^2, \underset{i}{u}^3, \underset{i}{\varphi}^1, \underset{i}{\varphi}^2$ — контраваріантні компоненти узагальненого вектора переміщень лінії центра ваги поперечного перерізу i-го ребра; T_i^{1j}, M_i^{1j} — контраваріантні компоненти тензорів зусиль — моментів для i-го ребра; ρ_i — густина матеріалу i-го ребра; F_i, I_i — геометричні параметри; позначення типу $[T^{2j}]_i, [M^{2j}]_i$ відповідають сумарній дії величин зусиль гладкої оболонки на i-й дискретний елемент.

У розгорнутому вигляді, згідно з [3], рівняння коливань (9) в дивергентній формі записуються [4] так:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}T^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}T^{12}) + \Gamma^1_{11}T^{11} + 2\Gamma^1_{21}T^{12} + \\
&+\Gamma^1_{22}T^{22} - b^1_1T^{1n} - b^1_2T^{2n} = \rho h\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2};\\[2ex]
&\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}T^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}T^{22}) + \Gamma^2_{11}T^{11} + 2\Gamma^2_{12}T^{12} + \\
&+\Gamma^2_{22}T^{22} - b^2_1T^{13} - b^2_2T^{22} + q^2 = \rho h\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2};\\[2ex]
&\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}T^{13}) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}T^{23}) + b_{11}T^{11} + b_{12}T^{12} + \\
&+b_{21}T^{12} + b_{22}T^{22} + q^3 = \rho h\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};\\[2ex]
&\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}M^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}M^{12}) + \Gamma^1_{11}M^{11} + 2\Gamma^1_{21}M^{12} + \\
&+\Gamma^2_{22}M^{22} - T^{13} = \rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial t^2};\\[2ex]
&\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}M^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}M^{22}) + \Gamma^2_{11}M^{11} + 2\Gamma^2_{12}M^{12} + \\
&+\Gamma^2_{22}M^{22} - T^{23} = \rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

У співвідношеннях (11) величини Γ^k_{ij} являють собою коефіцієнти символів Крістоффеля другого роду [3].

Рівняння (10) в розгорнутому вигляді записуємо так [1]:

$$\frac{\partial T_i^{11}}{\partial x^1}+[T^{21}]_i=\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial T_i^{12}}{\partial x^1}+[T^{22}]_i=\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_i^2}{\partial t^2},\quad \frac{\partial T_i^{13}}{\partial x^1}+[T^{23}]_i=\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_i^3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_i^{11}}{\partial x^1}+T_i^{13}+[M^{21}]_i=\rho_i I_{1i}\frac{\partial^2 \varphi_i^1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial M_i^{12}}{\partial x^1}+[M^{22}]_i=\rho_i I_{2i}\frac{\partial^2 \varphi_i^2}{\partial t^2}. \qquad (12)$$

До рівнянь коливань неоднорідної підкріпленої оболонки (11), (12) додаються відповідні граничні та початкові умови, які випливають з варіаційного принципу стаціонарності (8).

Зокрема, для випадку вільного краю маємо:

$$\left. T^{11}+\sum_{i=1}^{I} T_i^{11}\right|_{x^2=x_i^2}=0,\quad \left. T^{12}+\sum_{i=1}^{I} T_i^{12}\right|_{x^2=x_i^2}=0,$$

$$\left. T^{13}+\sum_{i=1}^{I} T_i^{13}\right|_{x^2=x_i^2}=0,\quad \left. M^{11}+\sum_{i=1}^{I} (M_i^{11}\pm h_i T_i^{11})\right|_{x^2=x_i^2}=0,$$

$$\left. M^{12}+\sum_{i=1}^{I} (M_i^{12}\pm h_i T_i^{12})\right|_{x^2=x_i^2}=0.$$

Таким чином, в даній роботі наведено постановку задач динаміки поздовжньо підкріплених конічних оболонок еліптичного перерізу в неортогональній системі координат.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. Киев: Изд.-полиграф. центр “Киев. ун-т”, 2012. 541 с.
2. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. К.З. Галимов (ред.). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 212 с.
3. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями в механике. Киев: Наук. думка, 1972. 148 с.
4. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Бєлов Є.Д. Динаміка конічних оболонок еліптичного перерізу при нестаціонарних навантаженнях. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 1. С. 29–33. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.029

Надійшло до редакції 15.01.2019

REFERENCES

1. Golovko, K. G., Lugovoi, P. Z. & Meish, V. F. (2012). Dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loads. Kyiv: Publ. Center “Kyiv University” (in Russian).
2. The theory of shells with allowance for transverse shear. Galimova K.Z. (Ed.). (1977). Kazan: Publ. house of Kazan Univ. (in Russian).
3. Kilchevsky, N. A. (1972).Fundamentals of tensor calculus with applications in mechanics. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).

4. Meish, V. F., Meish, Yu. A. & Belov, Ye. D. (2018). The dynamics of conical shells of the elliptic section at nonstationary loads. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 1, pp. 29-33. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.029

Received 15.01.2019

В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Е.Д. Белов
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: vfmeish@gmail.com

К ПОСТАНОВКЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ
ДИСКРЕТНО ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК В НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрена постановка задач динамического поведения продольно подкрепленной конической оболочки эллиптического сечения при воздействии на нее распределенной нагрузки. Приводятся уравнения колебаний подкрепленной конической оболочки в неортогональной системе координат. Используется вариант теории оболочек и стержней С.П. Тимошенко.

Ключевые слова: *коническая оболочка, эллиптическое сечение, теория оболочек и стержней С.П. Тимошенко.*

V.F. Meish, Yu.A. Meish, Ye.D. Belov
S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: vfmeish@gmail.com

TO THE STATEMENT OF DYNAMIC PROBLEMS OF THE THEORY
OF DISCRETE LONGITUDINALLY REINFORCED CONICAL SHELLS
IN A NONORTHOGONAL CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM

The paper deals with the problem of the dynamic behavior of a longitudinally reinforced conical shells with elliptic cross-section under the action of a distributed load. The equations of oscillations of the reinforced conical shell in a nonorthogonal coordinate system are given. A variant of the theory of shells and rods by S.P. Timoshenko is used.

Keywords: *conical shell, elliptic cross-section, Timoshenko theory of shells and rods.*