

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.046>

УДК 539.421

**М.Ф.Селіванов**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: mfs@ukr.net

## Крайова тріщина із зоною зчеплення

*Представлено членом-кореспондентом НАН України В.М. Назаренком*

*Дана робота сфокусована на крайовій тріщині в напівнескінченній площині, що розтягується рівномірно розподіленим напруженням на значному віддаленні від тріщини в напрямку нормалі до її площини. Побудовано ітеративну процедуру розв'язання задачі в рамках моделі зони зчеплення з нерівномірним законом зчеплення-відриву, яка дозволила задовольнити умову плавності змикання берегів. На кожній ітерації сингулярне інтегральне рівняння з узагальненим ядром Коші розв'язується методом колокації без регуляризації. Числовий приклад побудовано в умовах граничного стану для степеневого закону зчеплення-відриву із ділянкою зміцнення.*

**Ключові слова:** *крайова тріщина, модель зони зчеплення, інтегральне рівняння з узагальненим ядром Коші, умова плавності змикання берегів тріщини.*

Розв'язанню задачі про крайову тріщину Дагдейла у напівнескінченній площині присвячена значна кількість публікацій [1–5]. У зазначених роботах значну увагу приділено визначенню довжини зони зчеплення, яка є внутрішнім параметром моделі. В [6] для крайової тріщини враховано залежність зчеплення від координати. Досліджень, що враховують заданий зв'язок між зчепленням та відривом у випадку крайової тріщини в літературі виявити не вдалось. В даній роботі числово-аналітична техніка розв'язання задач механіки тріщин в рамках моделі зони зчеплення, що запропонована в роботах автора [7, 8] для випадку тріщин у нескінченній ізотропній площині, поширена на випадок півплощини.

Розв'язок задачі про крайову тріщину (рис. 1), перпендикулярну границі півплощини, має вигляд ([9], с. 155)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} K(\xi, \tau) \varphi(\tau) d\tau = L \tilde{\sigma}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \delta, \quad (1)$$

де  $\delta$  – довжина тріщини;  $\tilde{\sigma}(x)$  – напруження на лінії розташування тріщини в тілі без тріщини;  $L = (\kappa + 1) / (2\mu)$  – пружна стала ( $\kappa$  – стала Колосова;  $\mu$  – модуль зсуву),

$$K(\xi, \tau) = \frac{1}{\tau - \xi} + h(\xi, \tau), \quad h(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^3 \frac{C_i(\xi)}{(\tau + \xi)^i}, \quad C(\xi) = \{-1, 6\xi, -4\xi^2\}.$$

© М.Ф.Селіванов, 2019

Розв'язок рівняння (1) будемо шукати методом колокації [10]. Невідому функцію  $\varphi(x)$  знайдемо у вигляді добутку кусково-лінійної функції  $g(x)$  та вагової функції  $w(t)$ , обраної за результатами [11]:

$$g(t) = g_k q_k(t) + g_{k+1} [1 - q_k(t)], \quad t \in (t_k, t_{k+1}),$$

$$g_k = g(t_k), \quad q_k(t) = (t_{k+1} - t) / \Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Виконаємо заміну змінних

$$\tau = \delta t, \quad \xi = \delta x, \quad 0 \leq t, \quad x \leq 1$$

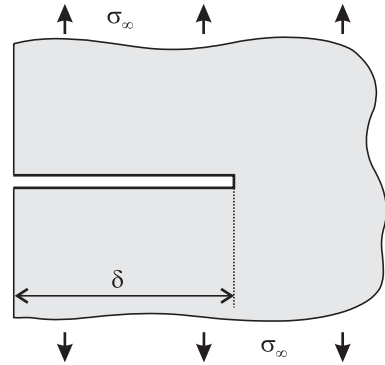


Рис. 1

в (1) і перепозначимо  $g(\delta t)$  через  $g(t)$  і  $\tilde{\sigma}(\delta t)$  через  $\tilde{\sigma}(t)$ . Інтеграл в (1) подамо у вигляді

$$\int_0^1 K(x, t) w(t) g(t) dt = \sum_{k=1}^n g_k J_k(x),$$

де

$$J_1(x) = T_1'(x) - Q_1(x), \quad J_n(x) = -T_{n-1}'(x),$$

$$J_k(x) = T_k'(x) - T_{k-1}'(x), \quad k = 2, \dots, n-1; \tag{2}$$

$$Q_k(x) = Q(x, t_k), \quad T_k'(x) = \frac{T_{k+1}(x) - T_k(x)}{\Delta t_k}, \quad T_k(x) = T(x, t_k); \tag{3}$$

$$Q(x, t) = \hat{Q}(x, t) + \tilde{Q}(x, t),$$

$$\hat{Q}(x, t) = \int \frac{w(t)}{t-x} dt = w(x) \ln \left| \frac{w(t) - w(x)}{w(t) + w(x)} \right|, \tag{4}$$

$$\tilde{Q}(x, t) = \int h(x, t) w(t) dt = \sum_{i=1}^3 P_i(x) I_i(x, t),$$

$w(t) = (1-t)^{-1/2}$ . Функції  $I_i(x, t) = \int w(t) / (t+x)^i dt$  після інтегрування набувають вигляду

$$I_1(x, t) = v(x) \ln \left| \frac{w(t) - v(x)}{w(t) + v(x)} \right|, \quad v(x) = (1+x)^{-1/2},$$

$$I_2(x, t) = v^2(x) \left[ \frac{1}{2} I_1(x, t) - H_1(x, t) \right], \quad H_1(x, t) = \frac{w(t)}{t+x},$$

$$I_3(x, t) = v^2(x) \left[ \frac{3}{4} I_2(x, t) - \frac{1}{2} H_2(x, t) \right], \quad H_2(x, t) = \frac{H_1(x, t)}{t+x}.$$

Випишемо другу визначальну функцію співвідношень (3):

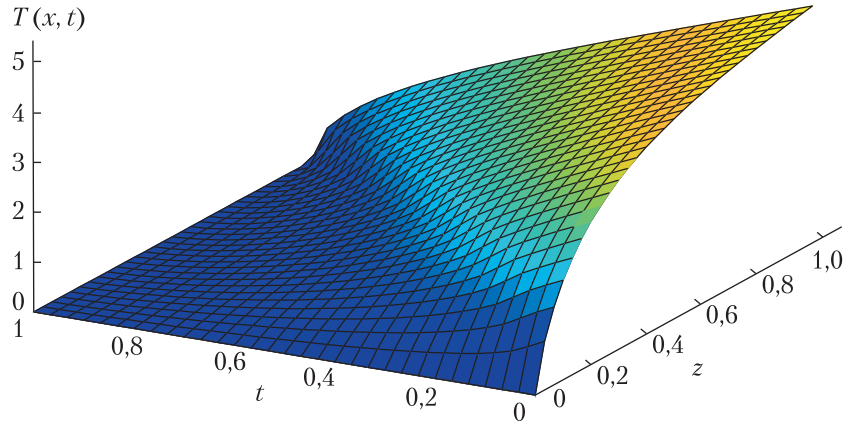


Рис. 2

$$T(x, t) = \hat{T}(x, t) + \check{T}(x, t),$$

$$\hat{T}(x, t) = \int \hat{Q}(x, t) dt = (t-x)\hat{Q}(x, t) + 2w^{-1}(t),$$

$$\check{T}(x, t) = \int \check{Q}(x, t) dt = \sum_{i=1}^3 P_i(x) \check{I}_i(x, t).$$

Функції  $\check{I}_i(x, t) = \int I_i(x, t) dt$  після інтегрування мають вигляд

$$\check{I}_1(x, t) = (t+x)I_1(x, t) + 2w^{-1}(t),$$

$$\check{I}_2(x, t) = v^2(x) \left[ \frac{1}{2} \check{I}_1(x, t) - \check{H}_1(x, t) \right], \quad \check{H}_1(x, t) = v^{-2}(x)I_1(x, t) + 2w^{-1}(t),$$

$$\check{I}_3(x, t) = v^2(x) \left[ \frac{3}{4} \check{I}_2(x, t) - \frac{1}{2} \check{H}_2(x, t) \right], \quad \check{H}_2(x, t) = -\frac{1}{2}I_1(x, t) - H_1(x, t).$$

Окремо випишемо функцію з (2)

$$Q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \ln \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1}{(x+1)^2} \left( \frac{x^2+2x-2}{2\sqrt{1+x}} \ln \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} - 4-x \right),$$

обидві складові якої (див. (4)) при  $x=0$  є сингулярними, але, використовуючи асимптотичні властивості, знайдемо

$$Q_1(0) = -4, \quad Q_1(1) = -\frac{13}{4} - \frac{\sqrt{2}}{16} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \approx -3,4.$$

На рис. 2 зображена функція  $T(x, t)$ , при обчисленні якої використано

$$\hat{T}(t, t) = 2\sqrt{1-t}, \quad \hat{T}(1, t) = 4\sqrt{1-t}.$$

Обмеженість функцій  $Q_1(x)$  та  $T_k(x)$  забезпечує обмеженість  $J_k(x)$ .

Дискретизація рівняння (1) представленням невідомої функції  $g$  у кусково-лінійній формі, дає

$$Jg = \mathbf{b}, \tag{5}$$

$$J = [j_{mk}], \quad m, k = 1, \dots, n, \quad j_{mk} = \frac{1}{\pi} J_k(x_m),$$

$$\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_n\}^T, \quad \mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_n\}^T, \quad b_m = \delta L \tilde{\sigma}(x_m),$$

де  $g_k$  – значення функції  $g$  у вузлах сітки.

Числова реалізація методики для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень у випадку  $\tilde{\sigma}(x) = \sigma_\infty$  дає  $\bar{K}_I = \sqrt{2} \cdot g(1) = 1,12146$  при  $n = 11$  ( $\bar{K}_I = K_I / (\sigma_\infty \sqrt{\pi \delta})$ ). Точне значення КІН цієї задачі  $\bar{K}_I = 1,12152$  ([9], с. 169). Таким чином, помилка склала  $5,5 \cdot 10^{-5}$ . В числових розрахунках обираємо рівномірно розташовані квадратурні точки  $t_k$ , які збігаються з точками колокації  $x_m$ .

Розкриття тріщини

$$\Delta(x) = \delta L \int_x^1 \omega(t) g(t) dt$$

після дискретизації приймає вигляд

$$\Delta(\mathbf{x}) = \delta L \cdot V \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}^T,$$

$$V = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_{n-1} & N_n \\ 0 & G'_2 - R_2 & N_3 & \dots & N_{n-1} & N_n \\ 0 & 0 & G'_3 - R_3 & \dots & N_{n-1} & N_n \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G'_{n-1} - R_{n-1} & N_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$N_1 = G'_1 - R_1, \quad N_n = R_n - G'_{n-1}, \quad N_k = G'_k - G'_{k-1} \quad (k = 2, \dots, n-1),$$

$$R_k = R(t_k), \quad G_k = G(t_k), \quad G'_k = (G_{k+1} - G_k) / \Delta t_k, \tag{7}$$

$$R(t) = \int \omega(t) dt, \quad G(t) = \int R(t) dt.$$

Розглянемо рівняння (1) у формі

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\beta K(x, t) \varphi(t) dt = L[\sigma_\infty - \sigma(x)], \quad \sigma(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \lambda \\ T[\Delta(x)], & \lambda \leq x < \beta \end{cases} \tag{8}$$

яке доповнимо умовою плавності змикання берегів

$$\Delta'(\beta) = 0. \tag{9}$$

Рівняння (8) та (9) визначають напружено-деформований стан крайової тріщини із зонами зчеплення (рис. 3, а). Функція  $T(\Delta)$  описує закон зчеплення-відриву (ЗЗВ).

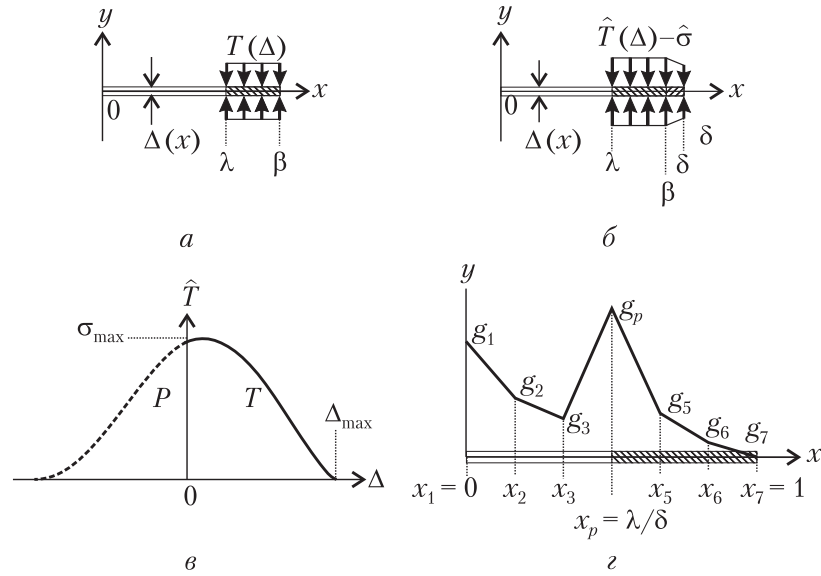


Рис. 3

ження вершини зони зчеплення  $\beta$  наперед невідоме і визначається в ході розв'язання задачі умовою (9).

При дослідженні стану граничної рівноваги у визначальну систему додається рівняння

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{\max}. \tag{10}$$

Розглянемо модифіковану постановку (рис. 3, б), яка дозволить не розв'язувати систему нелінійних рівнянь відносно довжин зчеплення. Напруження зчеплення подамо у вигляді

$$\sigma(x) = \hat{T}[\Delta(x)] - \hat{\sigma}(x), \quad \lambda \leq x \leq \delta, \tag{11}$$

де

$$\hat{T}(\Delta) = \begin{cases} T(\Delta), & \Delta \leq 0, \\ P(\Delta), & \Delta < 0 \end{cases} \tag{12}$$

— подовжене на від'ємний відрив зчеплення (рис. 3, в);  $\hat{\sigma}(x)$  — допоміжне напруження, яке визначається умовою  $\Delta(x) \geq 0$ . Запропонована методика не дає точного значення для довжини зчеплення, але забезпечує вимогу плавності змикання берегів і достатньо точно дозволяє визначати параметри граничного стану [12].

Розв'язок задачі із зчепленням у формі (11), функцію  $g(x)$  шукатимемо для  $0 \leq x \leq \delta$ ; цей проміжок має напевне містити заздалегідь невідоме положення вершини зон зчеплення. Розв'язок поставленої задачі дається інтегральним рівнянням (1). Для докритичного стану розв'язок задачі визначається системою інтегрального рівняння та нерівності

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^1 K(x, t) \omega(t) g(t) dt &= \sigma_{\infty} - \hat{T}[\delta L \int_x^1 \omega(t) g(t) dt] + \hat{\sigma}(x), \\ \int_x^1 \omega(t) g(t) dt &\geq 0. \end{aligned} \tag{13}$$

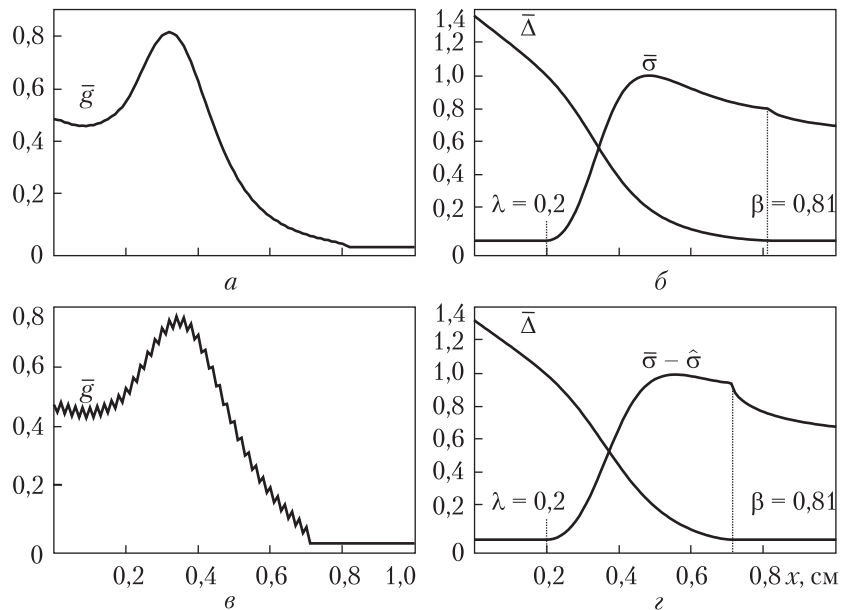


Рис. 4

Знайдемо розв’язок задачі для стану граничної рівноваги. Дискретизація системи (13), в яку включимо умову (10), дасть

$$J\mathbf{g} = \sigma_{\infty} - \hat{T}(\delta LV\mathbf{g}) + \hat{\sigma}, \quad V\mathbf{g} \geq 0, \quad \delta LV_p \mathbf{g} = \Delta_{\max}, \quad (14)$$

елементи вектора-рядка  $\mathbf{V}_p$  є елементами  $p$ -го рядка матриці  $V$ ;  $\mathbf{0}$  – вектор-стовпець нулів. Точка колокації  $x_p$  відповідає положенню фізичної вершини тріщини (рис. 3,  $z$ ). Елементами вектора-стовпця є  $\hat{\sigma}(x_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Опишемо ітеративну процедуру розв’язання системи (14). Згідно з (12), до визначимо функцію  $T$  для від’ємних значень аргументу:

$$P(\Delta) = \begin{cases} 0, & \Delta < -1, \\ P_3(\Delta), & -1 \leq \Delta < 0, \end{cases}$$

коефіцієнти полінома  $P_3$  можна визначити з умов  $P_3(0) = T(0)$ ,  $P_3'(0) = T'(0)$ ,  $P_3(-1) = P_3'(-1) = 0$ .

Введемо дві множини індексів  $S$  і  $M$ . Перший набір індексів відповідає точкам колокації  $x_s$ , що задовольняють умову  $0 \leq x_s < \beta$ , другий – всім іншим точкам колокації. На першому кроці ітеративної процедури можна покласти

$$S = \{s : x_s < \lambda + \ell\}, \quad \ell = \frac{\pi}{8} \frac{E\phi}{\sigma_{\max}^2},$$

де  $\phi$  та  $\sigma_{\max}$  – енергія руйнування та міцність зчеплення відповідно.

Розв’яжемо систему

$$J_s \mathbf{g} = \sigma_{\infty}^* - \hat{T}(\delta LV_s \mathbf{g}), \quad \mathbf{V}_m \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad \delta LV_p \mathbf{g} = \Delta_{\max}, \quad (15)$$

$s \in S, m \in M$ . Елементи векторів-рядків  $\mathbf{J}_k$  та  $\mathbf{V}_k$  — це елементи  $k$ -го рядка відповідної матриці. Визначальна система (15) є нелінійною але її матриця Якобі обчислюється достатньо легко, якщо легко можна знайти похідну функції  $\hat{T}$ .

Обчислимо  $\mathbf{g}$  і параметр граничного навантаження  $\sigma_\infty^*$  з (15) та оцінімо елементи вектора допоміжного напруження, яке унеможливило від'ємний відрив,

$$\hat{\sigma} = \mathbf{J}\mathbf{g} - \sigma_\infty + \hat{T}(\delta L V \mathbf{g}).$$

Перепозначимо  $S = \{s : \hat{\sigma}_s \geq 0\}$  і продовжимо ітеративну процедуру, доки всі елементи  $\hat{\sigma}$  не стануть невід'ємними.

У числовому прикладі використаємо ЗЗВ із ділянкою зміцнення

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = (\bar{\sigma}_l \bar{\Delta} + \bar{\sigma}_n)(1 - \bar{\Delta})^2, \quad \Delta_{\max} = \frac{12\phi}{\sigma_{\max}(\bar{\sigma}_l + 4\bar{\sigma}_n)}, \quad (16)$$

$\bar{T} = T / \sigma_{\max}$ ;  $\bar{\Delta} = \Delta / \Delta_{\max}$  — нормовані зчеплення та відрив відповідно, перший параметр форми  $\bar{\sigma}_n$  визначає рівень зчеплення при нульовому відриві, другий параметр форми  $\bar{\sigma}_l$  визначається співвідношенням  $\max\{\bar{T}(\bar{\Delta})\} = 1$ , яке для закону (16) набуває вигляду

$$\frac{4}{27} \bar{\sigma}_l \left(1 + \frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\sigma}_l}\right)^3 = 1.$$

Поліном, що описує закон для від'ємних відривів  $P_3(\bar{\Delta}) = (\bar{\sigma}_l - 4\bar{\sigma}_n)\bar{\Delta}^3 + (2\bar{\sigma}_l - 7\bar{\sigma}_n)\bar{\Delta}^2 + (\bar{\sigma}_l - 2\bar{\sigma}_n)\bar{\Delta} + \bar{\sigma}_n$ .

На рис. 4, а, б проілюстровано розв'язок задачі при вказаних вихідних параметрах. Значення  $\beta$  відповідає найменшій  $x_l$ , такий що  $\bar{g}_l = 0$ . Критичне значення зовнішнього навантаження  $\sigma_\infty^* = 0,619\sigma_{\max}$ . Наведена безрозмірна щільність розкриття  $\bar{g}(x) = g(x) / (L\sigma_{\max})$  (а), відносні зчеплення  $\bar{\sigma}(x) = \{\hat{T}[\Delta(x)] - \hat{\sigma}(x)\} / \sigma_{\max}$  та відрив  $\bar{\Delta}(x)$  (б) при  $\delta = 1$  см,  $\bar{\sigma}_n = 0,8$ ,  $\bar{\sigma}_l = 3,8109$ ,  $E = 40$  ГПа,  $\phi = 200$  Н/м,  $\sigma_{\max} = 35$  МПа,  $n = 101$  (параметр дискретизації).

Таким чином, в роботі побудовано та проілюстровано числово-аналітичний метод теорії тріщин в рамках моделі зони зчеплення для випадку крайової тріщини. В основу методу покладено ітеративну процедуру, на кожному кроці якої інтегральне рівняння з узагальненим ядром Коші розв'язується методом колокації без регуляризації. Квадратурні формули побудовано з урахуванням стаціонарної сингулярності зазначеного ядра. Отримано числовий розв'язок, що відповідає умові граничної рівноваги. Розв'язок побудовано для ЗЗВ, згідно з яким граничному відриву відповідає нульове зчеплення. Це дозволило отримати неперервну силову функцію (праву частину сингулярного рівняння, що асоціюється із граничними умовами). У випадку дослідження докритичного стану або навіть граничного стану із більшим початковим зчепленням ( $\bar{\sigma}_n > 0,8$ ) представлена методика дає розв'язок  $g(x)$  з осциляцією. На рис. 4, в, г наведено безрозмірну щільність розкриття (в), відносні зчеплення та відрив (г) при  $\bar{\sigma}_n = 0,95$  та інших значеннях вихідних параметрів, використаних для отримання результатів на рис. 4, а, б. Для знаходження фізично коректного розв'язку необхідна регуляризація вихідного інтегрального рівняння, що може бути предметом подальших досліджень.

## ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ferdjani H., Abdelmoula R. Propagation of a Dugdale crack at the edge of a half plane. *Continuum Mech. Thermodyn.* 2017. doi: <https://doi.org/10.1007/s00161-017-0594-6>
2. Petroski H. Dugdale plastic zone sizes for edge cracks. *Int. J. Fract.* 1979. **15**, № 3. P. 217–230.
3. Bowie O., Tracy P. On the solution of the Dugdale model. *Eng. Fract. Mech.* 1978. **10**. P. 249–256.
4. Tada H., Paris P.C., Irwin, G. The stress analysis of cracks. Handbook. Hellertown, Pennsylvania: Del Research Corporation, 1973.
5. Howard I., Otter N. On the elastic–plastic deformation of a sheet containing an edge crack. *J. Mec. Phys. Solids.* 1975. **23**. P. 139–149.
6. Wang S., Dempsey J.P. A cohesive edge crack. *Eng. Fract. Mech.* 2011. **78**. P. 1353–1373.
7. Селіванов М.Ф. Визначення безпечної довжини тріщини та розподілу сил зчеплення в рамках моделі тріщини з зоною передруйнування. *Допов. Нац. акад. наук України.* 2014. № 11. С. 58–65.
8. Selivanov M.F., Chornoivan Yu.A. A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications. *Int. J. Fract.* 2018. **212**, No 1. P. 113–121.
9. Broberg K.B. Cracks and fracture., London: Academic Press. 1999.
10. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. Numerical solution of singular integral equations. *Methods of analysis and solutions of crack problems: Sih G.C. (Ed.).* Dordrecht: Springer, 1973. P. 368–425. (Mechanics of Fracture; Vol. 1).
11. Savruk M.P., Madenci E., Shkarayev S. Singular integral equations of the second kind with generalized Cauchy-type kernels and variable coefficients. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1999. **45**. P. 1457–1470.
12. Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О. Порівняння алгоритмів визначення переміщень берегів тріщини зчеплення. *Допов. Нац. акад. наук України.* 2017. № 7. С. 29–36. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.029>

Надійшло до редакції 23.01.2019

## REFERENCES

1. Ferdjani, H. & Abdelmoula, R. (2017). Propagation of a Dugdale crack at the edge of a half plane. *Continuum Mech. Thermodyn.* doi: <https://doi.org/10.1007/s00161-017-0594-6>
2. Petroski, H. (1979). Dugdale plastic zone sizes for edge cracks. *Int. J. Fract.*, 15, pp. 217-230.
3. Bowie, O. & Tracy, P. (1978). On the solution of the Dugdale model. *Eng. Fract. Mech.*, 10, pp. 249-256.
4. Tada, H., Paris, P. C. & Irwin, G. (1973). *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Hellertown, Pennsylvania: Del Research Corporation.
5. Howar, I. & Otter, N. J. (1975). On the elastic–plastic deformation of a sheet containing an edge crack. *J. Mec. Phys. Solids*, 23, pp. 139-149.
6. Wang, S. & Dempsey, J. P. (2011). A cohesive edge crack. *Eng. Fract. Mech.*, 78, pp. 1353-1373.
7. Selivanov, M. F. (2014). Determination of the safe crack length and cohesive traction distribution using the model of a crack with prefacture zone. *Dopov. Nac. acad.nauk Ukr.*, No. 11, pp. 58-65 (in Ukrainian).
8. Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. A. (2018). A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications. *Int. J. Fract.*, 212, pp. 113–121.
9. Broberg, K. B. (1999). *Cracks and fracture*. London: Academic Press.
10. Erdogan, F., Gupta, G. D. & Cook, T. S. (1973). Numerical solution of singular integral equations. In Sih, G.C. (Ed.). *Methods of analysis and solutions of crack problems* (pp. 368-425). *Mechanics of Fracture*, Vol. 1. Dordrecht: Springer.
11. Savruk, M. P., Madenci, E. & Shkarayev, S. (1999). Singular integral equations of the second kind with generalized Cauchy-type kernels and variable coefficients. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 45, pp. 1457-1470.
12. Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. A. (2017). Comparison of the crack opening displacement determination algorithms for a cohesive crack. *Dopov. Nac. acad.nauk Ukr.*, No. 7, pp. 29-36 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.07.029>

Received 23.01.2019



М.Ф. Селиванов

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев  
E-mail: mfs@ukr.net

#### КРАЕВАЯ ТРЕЩИНА С ЗОНОЙ СЦЕПЛЕНИЯ

Данная работа сфокусирована на краевой трещине в полубесконечной плоскости, которая растягивается равномерно распределенным напряжением на значительном удалении от трещины в направлении нормали к ее плоскости. Построено итеративную процедуру решения задачи в рамках модели зоны сцепления с неравномерным законом сцепления–отрыва, которая позволила удовлетворить условие плавности смыкания берегов. На каждой итерации сингулярное интегральное уравнение с обобщенным ядром Коши решается методом коллокации без регуляризации. Числовой пример построен в условиях предельного состояния для степенного закона сцепления–отрыва с участком упрочнения.

**Ключевые слова:** краевая трещина, модель зоны сцепления, интегральное уравнение с обобщенным ядром Коши, условие плавности смыкания берегов трещины.

M.F. Selivanov

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: mfs@ukr.net

#### AN EDGE CRACK WITH COHESIVE ZONE

The present paper is focused on an edge crack in a half-infinite plane under tension by uniform remote stresses normal to the crack plane. An iterative procedure is built to solve the problem in the frame of the cohesive zone model with a non-uniform traction–separation law. The procedure allows one to account for the condition of smooth crack closure. At each iteration, the singular integral equation with generalized Cauchy kernel is solved by the collocation method without regularization. The numerical example is built meeting the limiting equilibrium condition for the power traction–separation law with a hardening segment.

**Keywords:** edge crack, cohesive zone model, integral equation with generalized Cauchy kernel, condition of smooth crack closure.