ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.04.003
УДК 514.132, 514.774.8

А.А. Борисенко, Д.Д. Сухоребская

Физико-технический институт низких температур
им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков
E-mail: aborisenk@gmail.com, suhdaria0109@gmail.com

Классификация простых замкнутых геодезических на правильных тетраэдрах в пространстве Лобачевского

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А.А. Борисенко

На правильных тетраэдрах в пространстве Лобачевского дана полная классификация простых замкнутых геодезических. Найдена асимптотика числа простых замкнутых геодезических длины не больше L при L, стремящемся на бесконечность.

***Ключевые слова**: замкнутые геодезические, правильный тетраэдр, пространство Лобачевского.*

Геодезической называется локально кратчайшая кривая. Замкнутая геодезическая называется простой, если она не имеет точек самопересечений и не повторяет себя. В 1905 г. в связи с задачей трех тел А. Пуанкаре выдвинул гипотезу о существовании простой замкнутой геодезической на гладкой замкнутой выпуклой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. В 1929 г. Л. Люстерник и Л. Шнирельман показали, что на двумерном римановом многообразии, гомеоморфном сфере, существуют по крайней мере три простые замкнутые геодезические [1]. А в 1965 г. А. Фет доказал существование по крайней мере двух замкнутых геодезических на компактном римановом многообразии произвольной размерности [2].

Из работ Х. Хубера известно, что на полных замкнутых двумерных многообразиях постоянной отрицательной кривизны число замкнутых геодезических длины не больше L имеет порядок роста e^L/L [3]. И. Ривин [4] и М. Мирзахани [5] изучали рост $N(L)$ — числа простых замкнутых геодезических длины не больше L на поверхности постоянной отрицательной кривизны рода g с n каспами (бесконечно удаленными точками). В их работах показано, что асимптотика числа $N(L)$ имеет порядок $L^{6g-6+2n}$ при $L \to +\infty$.

Изучались также геодезические на негладких поверхностях. Из определения геодезической следует, что на выпуклых многогранниках геодезическая состоит из прямолинейных отрезков на гранях многогранника, образовывает равные углы с ребром на соседних гранях многогранника и не может проходить через вершину выпуклого многогранника.

Д. Фукс и К. Фукс дополнили и систематизировали результаты по замкнутым геодезическим на правильных многогранниках в трехмерном евклидовом пространстве [6, 7]. Известно, что на правильном тетраэдре в евклидовом пространстве любая замкнутая геодезическая не имеет точек самопересечения. В.Ю. Протасов в своей работе [8] описал простые замкнутые геодезические на произвольных тетраэдрах в евклидовом пространстве и дал оценку на их количество в зависимости от наибольшего отклонения от π суммы углов при вершинах тетраэдра.

Наша цель найти и описать все простые замкнутые геодезические на правильных тетраэдрах в трехмерном пространстве Лобачевского. Величину плоского угла грани тетраэдра обозначим через α. Известно, что $0 < \alpha < \pi/3$. Длина ребра тетраэдра равняется

$$a = \operatorname{arcch}\left(\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right).$$

Заметим, что в пространстве Лобачевского внутренняя геометрия правильного тетраэдра зависит от величины плоского угла грани тетраэдра, в то время как все правильные тетраэдры в евклидовом пространстве подобны. Также в евклидовом пространстве грани многогранника имеют нулевую гауссову кривизну, и вся кривизна многогранника сосредоточена только в его вершинах. В пространстве Лобачевского гауссова кривизна грани многогранника тождественно равна минус одному. Это значит, что кривизна многогранника в этом пространстве определяется не только вершинами, но и гранями. В связи с этим поведение замкнутых геодезических на правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского отличается от евклидового случая.

Теорема 1. *На каждом правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского для произвольной упорядоченной пары взаимно простых натуральных чисел (p, q) существует единственная, с точностью до изометрии тетраэдра, простая замкнутая геодезическая. Ими исчерпываются все простые замкнутые геодезические на правильных тетраэдрах в пространстве Лобачевского.*

Такая геодезическая имеет по p вершин на каждом из двух противоположных ребер тетраэдра, по q вершин на каждом из противоположных ребер другой пары и по $(p + q)$ вершин на оставшихся противоположных ребрах.

Замечание. Для каждой упорядоченной пары взаимно простых чисел (p, q) существует ровно три различных простых замкнутых геодезических типа (p, q) на правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского.

Теорема 2. *Пусть $N(L, \alpha)$ — число простых замкнутых геодезических длины не больше L на правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского с плоским углом грани α. Тогда существует функция $c(\alpha)$ такая, что*

$$N(L, \alpha) = c(\alpha)\, L^2 + O(L \ln L), \tag{1}$$

где

$$O(L\ln L) \leqslant C\, L \ln L, \text{ при } L \to +\infty, \text{ и } \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{3}} c(\alpha) = +\infty; \ \lim_{\alpha\to 0} c(\alpha) = \frac{27}{32\pi^2(\ln 3)^2}.$$

Если плоский угол грани правильного тетраэдра в пространстве Лобачевского стремится к нулю, то вершины тетраэдра стремятся на бесконечность. А тогда предельная поверхность является некомпактной поверхностью, гомеоморфной сфере с четырьмя каспами, с полной регулярной римановой метрикой постоянной отрицательной кривизны. В таком случае род этой поверхности равен нулю. Согласно результатам И. Ривина и М. Мирзахани на такой поверхности асимптотика числа простых замкнутых геодезических длины не больше L равна L^2 при $L \to +\infty$. Из теоремы 2 мы получили, что если α стремится к нулю, то число $N(L, \alpha)$ имеет порядок роста L^2 при $L \to +\infty$. Значит, наши результаты согласуются с результатами И. Ривина и М. Мирзахани.

Свойства простых замкнутых геодезических.

Лемма 1. *Пусть d — наименьшее из расстояний от вершин правильного тетраэдра в пространстве Лобачевского до простой замкнутой геодезической на нем. Тогда*

$$d > \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2\pi^3} + (\pi - 3\alpha)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^3} - (\pi - 3\alpha)^{3/2}}\right), \tag{2}$$

где α — плоский угол грани тетраэдра.

Геодезические будем называть *эквивалентными*, если они пересекают одни и те же ребра в одинаковом порядке на тетраэдре.

Лемма 2. *На правильном тетраэдре в евклидовом пространстве для каждой простой замкнутой геодезической существует эквивалентная ей геодезическая, проходящая через середины двух пар противоположных ребер.*

Следствие 1. *Развертка тетраэдра вдоль простой замкнутой геодезической состоит из четырех равных многоугольников, причем любые два соседние из них можно совместить поворотом на угол π относительно середины общего ребра.*

В пространстве Лобачевского имеет место аналог леммы 2. Верна

Лемма 3. *Простая замкнутая геодезическая на правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского проходит через середины двух пар противоположных ребер.*

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим простую замкнутую геодезическую γ' на правильном тетраэдре в евклидовом пространстве. В.Ю. Протасов показал, что каждой такой геодезической однозначно ставится в соответствие пара взаимно простых чисел (p, q) (*тип геодезической*) таких, что геодезическая имеет p вершин на каждом ребре одной пары противоположных ребер тетраэдра, по q вершин на ребрах другой пары противоположных ребер тетраэдра и по $(p + q)$ вершин на каждом ребре третьей пары противоположных ребер тетраэдра [8]. Будем считать, что γ' проходит через середины двух пар противоположных ребер тетраэдра. Рассмотрим развертку T' тетраэдра вдоль γ'. Углы при вершинах T' равны либо $\pi/3$, либо $2\pi/3$, либо π, либо $4\pi/3$. Возьмем теперь правильные треугольники на плоскости Лобачевского с плоским углом при вершине, равным α, и сложим их в том же порядке, в котором разворачивались грани тетраэдра вдоль γ' в евклидовом пространстве. Получим многоугольник T, который будет обладать теми же свойствами центральной симметрии, что и развертка в евклидовом пространстве (см. следствие 1), и соответствует некоторой развертке правильного тетраэдра в пространстве Лобачевского.

Если $0 < \alpha \leqslant \pi/4$, то многоугольник T будет выпуклым. Проведем внутри него прямолинейный отрезок, который соединяет середины тех же ребер, которые соответствуют серединам ребер для γ'. В силу построения полученный отрезок на T соответствует простой замкнутой геодезической γ типа (p, q) на правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского с плоским углом α при вершине грани.

Будем теперь увеличивать α, начиная с $\pi/4$. Многоугольник T уже не будет выпуклым. Пусть $\alpha_0 = \sup \alpha$, для которых построенный отрезок будет лежать внутри T. Тогда он будет соответствовать простой замкнутой геодезической γ на правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского. Из леммы 1 следует, что расстояние от этого отрезка до вершин многоугольника будет удовлетворять неравенству (2). Значит, существует α_1 такое, что $\alpha_1 > \alpha_0$, и отрезок γ тоже полностью лежит внутри многоугольника. Это противоречит максимальности α_0. Следовательно, $\alpha_0 = \pi/3$. Таким образом, для всех $0 < \alpha < \pi/3$ мы построили простую замкнутую геодезическую типа (p, q) на правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского.

Более того, ими исчерпываются все простые замкнутые геодезические на правильных тетраэдрах в пространстве Лобачевского, так как каждая такая геодезическая в пространстве Лобачевского эквивалентна некоторой простой замкнутой геодезической на правильном тетраэдре в евклидовом пространстве. Теорема 1 доказана.

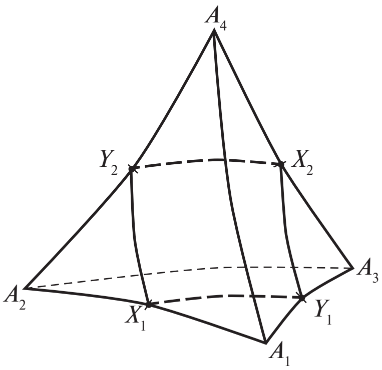
Доказательство теоремы 2. Вершину геодезической будем называть *узлом зацепления*, если она и две соседние к ней вершины геодезической лежат на ребрах, исходящих из одной вершины тетраэдра, и являются ближайшими к этой вершине тетраэдра вершинами геодезической. Используя результаты работы В.Ю. Протасова [8], можно доказать, что простая замкнутая геодезическая γ типа (p, q) на правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского устроена следующим образом: отрезки γ_1^1, γ_1^2 выходят из узла зацепления и лежат на соседних гранях, следующие за ними отрезки γ_i^1, γ_i^2 , $i = 2 \dots 2p + 2q-1$, лежат на одной грани тетраэдра и между ними нет других точек геодезической, и последние два отрезка γ_{2p+2q}^1, γ_{2p+2q}^2 сходятся во второй узел зацепления. Это позволяет оценить снизу длину простой замкнутой геодезической типа (p, q) на правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского через сумму $p + q$ и α. Из этой оценки следует

Лемма 5. *Для всех простых замкнутых геодезических типа (p, q) на правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского длины не больше L верна оценка*

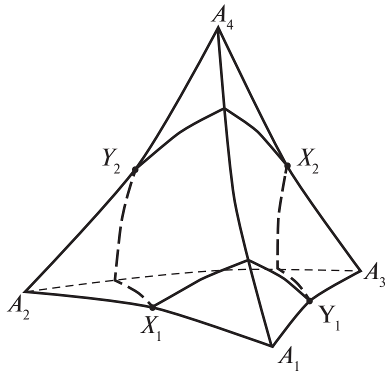
$$p+q \leqslant \frac{3}{4}\frac{L-2\ln\left(\dfrac{2\pi^3-(\pi-3\alpha)^3\left(1-\dfrac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)}{2\pi^3-(\pi-3\alpha)^3\left(1+\dfrac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)}\right)}{\ln\left(\dfrac{2\pi^3-(\pi-3\alpha)^3\left(1-\dfrac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)}{2\pi^3-(\pi-3\alpha)^3\left(1+\dfrac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)}\right)+\ln\left(\dfrac{3\pi-3\alpha}{\pi+3\alpha}\right)}+2. \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию $\psi(x)$, равную количеству различных упорядоченных пар взаимно простых натуральных чисел (p, q) таких, что $p + q \leqslant x$, где x — вещественное положительное число.

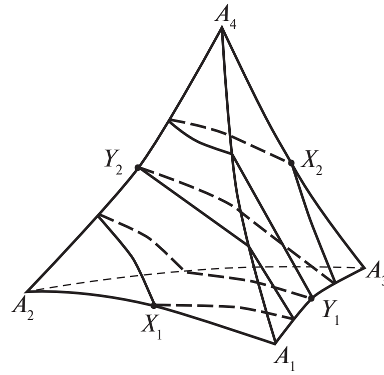
Лемма 6. $\psi(x) = \dfrac{3}{2\pi^2}x^2 + O(x\ln x)$, *где* $O(x \ln x) \leqslant C x \ln x$, *при* $x \to +\infty$.



Геодезическая типа (1,0)



Геодезическая типа (1,1)



Геодезическая типа (1,2)

Пусть $N(L, \alpha)$ — число простых замкнутых геодезических длины не больше L на правильном тетраэдре в пространстве Лобачевского с плоским углом грани α. Тогда из неравенства (3) получаем, что

$$N(L,\alpha) = 3\psi\left(\frac{3}{4}\frac{L - 2\ln\left(\dfrac{2\pi^3 - (\pi-3\alpha)^3\left(1-\dfrac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)}{2\pi^3 - (\pi-3\alpha)^3\left(1+\dfrac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)}\right)}{\ln\left(\dfrac{2\pi^3 - (\pi-3\alpha)^3\left(1-\dfrac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)}{2\pi^3 - (\pi-3\alpha)^3\left(1+\dfrac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)}\right) + \ln\left(\dfrac{3\pi-3\alpha}{\pi+3\alpha}\right)} + 2\right). \tag{4}$$

Применив лемму 6 к формуле (4), получим нужное равенство (1), где

$$c(\alpha) = \frac{27}{32\pi^2}\frac{1}{\left(\ln\left(\dfrac{2\pi^3 - (\pi-3\alpha)^3\left(1-\dfrac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)}{2\pi^3 - (\pi-3\alpha)^3\left(1+\dfrac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)}\right) + \ln\left(\dfrac{3\pi-3\alpha}{\pi+3\alpha}\right)\right)^2}.$$

Некоторые примеры простых замкнутых геодезических на правильных тетраэдрах в пространстве Лобачевского приведены на рисунке.

Авторы выражают благодарность В.А. Горькавому за полезные замечания.
Работа Д.Д. Сухоребской частично поддержана фондом им. Н.И. Ахиезера, 2018.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Lusternik L.A., Schnirelmann L.G. Sur le probleme de trois geodesique fermees sur les surfaces de genus zero. *C. R. Acad. Sci.* 1927. **189**. P. 269—271.
2. Фет А.И. О периодической задаче вариационного исчисления в целом. *Докл. АН СССР*. 1965. **160**, № 2. С. 287—289.
3. Huber H. Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen II. *Math. Ann.* 1961. **143**. P. 463—464.
4. Rivin I. Simple curves on surfaces. *Geometriae Dedicata*. 2001. **87**. P. 345—360.
5. Mirzakhani M. Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces. *Ann. Math.* 2008. **168**. P. 97—125.
6. Fuchs D., Fuchs E. Closed geodesics on regular polyhedra. *Mosc. Math. J.* 2007. **7**, № 2. P. 265—279.
7. Fuchs D. Geodesics on a regular dodecahedron. Preprints of Max Planck Institute for Mathematics. № 91. Bonn, 2009. 14 p. URL: http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/serien/e/mpi_mathematik/2010/2009_91.pdf
8. Протасов В.Ю. Замкнутые геодезические на поверхности симплекса. *Матем. сб.* 2007. **198**, № 2. С. 103—120.
9. Hardy G.H., Wright E.M. An introduction to the theory of numbers. Oxford: Oxford University Press, 1975. 438 p.

Поступило в редакцию 29.12.2018

REFERENCES

1. Lusternik, L. A. & Schnirelmann, L. G. (1927). On the problem of three closed geodesic on surfaces of genus zero. C. R. Acad. Sci., 189, pp. 269-271.
2. Fet, A. I. (1965). On a periodicity problem in the calculus of variations. Dokl. AN SSSR, 160, No. 2, pp. 287-289 (in Russian).
3. Huber, H. (1961). On the analytic theory hyperbolic spatial forms and motion groups II. Math. Ann., 143, pp. 463-464 (in German).
4. Rivin, I. (2001). Simple curves on surfaces. Geometriae Dedicata, 87, pp. 345-360.
5. Mirzakhani, M. (2008). Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces. Ann. Math., 168, pp. 97-125.
6. Fuchs, D. & Fuchs, E. (2007). Closed geodesics on regular polyhedra. Mosc. Math. J., 7, No. 2, pp. 265-279.
7. Fuchs, D. (2009). Geodesics on a regular dodecahedron. Preprints of Max Planck Institute for Mathematik, No. 91. Bonn. Retrieved from http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/serien/e/mpi_mathematik/2010/2009_91.pdf
8. Protasov, V. Yu. (2007). Closed geodesics on the surface of a simplex. Sb. Math., 198, No. 2, pp. 243-260.
9. Hardy, G. H. & Wright, E. M. (1975). An introduction to the theory of numbers. Oxford: Oxford University Press.

Received 29.12.2018

О.А. Борисенко, Д.Д. Сухоребська

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна
НАН України, Харків
E-mail: aborisenk@gmail.com, suhdaria0109@gmail.com

КЛАСИФІКАЦІЯ ПРОСТИХ ЗАМКНЕНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ НА ПРАВИЛЬНИХ ТЕТРАЕДРАХ У ПРОСТОРІ ЛОБАЧЕВСЬКОГО

На правильних тетраедрах у просторі Лобачевського дана повна класифікація усіх простих замкнених геодезичних. Знайдена асимптотика числа простих замкнених геодезичних довжини не більше L, коли L прагне на нескінченність.

Ключові слова: *замкнені геодезичні, правильний тетраедр, простір Лобачевського.*

A.A. Borisenko, D.D. Sukhorebska

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering
of the NAS of Ukraine, Kharkiv
E-mail: aborisenk@gmail.com, suhdaria0109@gmail.com

A CLASSIFICATION OF SIMPLE CLOSED GEODESICS
ON REGULAR TETRAHEDRA IN LOBACHEVSKY SPACE

The full classification of simple closed geodesics on regular tetrahedra in the hyperbolic space is described. The asymptotics of the number of simple closed geodesics of length not more than L, with L tending to infinity, is found.

Keywords: *closed geodesics, regular tetrahedra, Lobachevsky space.*