

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.04.021>

УДК 539.3

**А.М. Багно**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: alexbag2016@gmail.com

## **О влиянии начальных напряжений на фазовые скорости акустических волн в сжимаемом упругом полупространстве, взаимодействующем со слоем вязкой жидкости**

*Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем*

*Рассматривается задача о распространении акустических волн в предварительно деформированном сжимаемом полупространстве, взаимодействующем со слоем вязкой сжимаемой жидкости. Исследование проводится на основе трехмерных линеаризованных уравнений теории упругости конечных деформаций для упругого полупространства и трехмерных линеаризованных уравнений Навье – Стокса для вязкой сжимаемой жидкости. Применяются постановка задачи и подход, основанные на использовании представлений общих решений линеаризованных уравнений для упругого тела и жидкости. Получено дисперсионное уравнение, описывающее распространение гармонических волн в гидроупругой системе. Построены дисперсионные кривые нормальных волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние начальных напряжений упругого полупространства и толщины слоя вязкой сжимаемой жидкости на фазовые скорости и коэффициенты затухания акустических волн. Показано, что влияние вязкости жидкости на параметры волнового процесса связано со свойствами локализации волн. Развитый подход и полученные результаты позволяют установить для волновых процессов пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций и классической теории упругости для твердого тела, а также модели идеальной жидкости. Числовые результаты представлены в виде графиков и дан их анализ.*

**Ключевые слова:** акустические волны, фазовая скорость, коэффициент затухания, сжимаемое упругое полупространство, слой вязкой сжимаемой жидкости, начальные напряжения.

В настоящей работе для анализа дисперсионных характеристик нормальных волн в упруго-жидкостной системе, состоящей из упругого полупространства и слоя жидкости, применяются модели, учитывающие начальные напряжения в твердом теле и вязкость жидкости. При исследовании используются трехмерные линеаризованные уравнения Навье–Стокса для жидкости и трехмерные линеаризованные уравнения теории упругости конечных деформаций для твердого тела. При этом предполагается, что жидкость является ньютоновской, находится в состоянии покоя и тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений линеаризованных уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и предварительно напряженного сжимаемого упругого тела, предложенные в работах [1–9].

© А.М. Багно, 2019

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из слоя вязкой сжимаемой жидкости и упругого сжимаемого полупространства, подверженного большим (конечным) начальным деформациям. Решение получим с привлечением трехмерных линеаризованных уравнений теории упругости при конечных деформациях для твердого тела и линеаризованных уравнений Навье—Стокса для жидкости, находящейся в состоянии покоя [1–9].

Далее рассмотрим такие динамические процессы в гидроупругой системе, при которых возникающие дополнительные деформации, т.е. возмущения деформаций значительно меньше начальных. Исследуем гармонические волновые процессы малой амплитуды. При этом принимается, что упругое тело находится в начальном напряженно-деформированном состоянии.

Предположим, что изотропное нелинейно-упругое твердое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, занимает объем  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-\infty < z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  и контактирует со слоем вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $Oz_3$ . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $Oz_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений гидроупругости при следующих граничных условиях:

$$\tilde{P}_1|_{z_2=0} = \tilde{Q}_1|_{z_2=0}; \tilde{P}_2|_{z_2=0} = \tilde{Q}_2|_{z_2=0}; \tilde{P}_1|_{z_2=h} = 0; \tilde{P}_2|_{z_2=h} = 0; \quad (1)$$

$$v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}; v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (2)$$

Здесь  $u_i$  — компоненты вектора смещений упругого тела  $\mathbf{u}$ ;  $v_i$  — составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$  относительно состояния покоя;  $\tilde{Q}_i$  и  $\tilde{P}_i$  — составляющие напряжений, соответственно, в упругом теле и жидкости.

Воспользуемся постановками задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями и вязкой жидкости, а также представлениями общих решений, предложенными в работах [1–9]. В случае однородного напряженно-деформированного состояния для плоского случая общие решения имеют вид [1–9]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные функции  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0;$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала упругого полупространства;  $\nu^*$  и  $\mu^*$  ( $\mu^* = -\frac{3}{2}\nu^*$ ) – кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $\lambda_i$  – удлинения упругого полупространства в направлениях координатных осей;  $a_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  – величины, определяемые из уравнений состояния и зависящие от вида упругого потенциала [6, 7, 10];  $\bar{\sigma}_{ii}^0$  ( $s_{ii}^0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0}{\lambda_i^2}$ ) – начальные напряжения.

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений гидроупругости определяем в классе бегущих волн

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (j = \overline{1,3}),$$

где  $k$  ( $k = \beta + i\gamma$ ) – волновое число;  $\gamma$  – коэффициент затухания волны;  $\omega$  – круговая частота;  $i^2 = -1$ .

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1), (2) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения этой системы, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{lm}(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h / c_s) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1,6}), \quad (3)$$

где  $c$  – фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h$  – толщина слоя жидкости;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) – скорость волны сдвига в материале упругого тела,  $\mu$  – модуль сдвига материала упругого тела.

Отметим, что полученное дисперсионное уравнение (3) не зависит от формы упругого потенциала. Оно является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [6–8, 11–13].

Отмеченные частные случаи учитывают наличие начальных деформаций в упругом полупространстве. Если принять  $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$ ,  $s_{ii}^0 = 0$ , то получим равенства для основательно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея и Стоунли–Шольте [14].

**Числовые результаты.** В дальнейшем дисперсионное уравнение (3) решаем численно. При этом расчеты проводим для двух гидроупругих систем. Первая состоит из оргстекла и воды. Она характеризуется следующими параметрами: упругое полупространство –  $\rho = 1160$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 3,96 \cdot 10^9$  Па,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9$  Па; слой жидкости –  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$ . Материал упругой составляющей этого

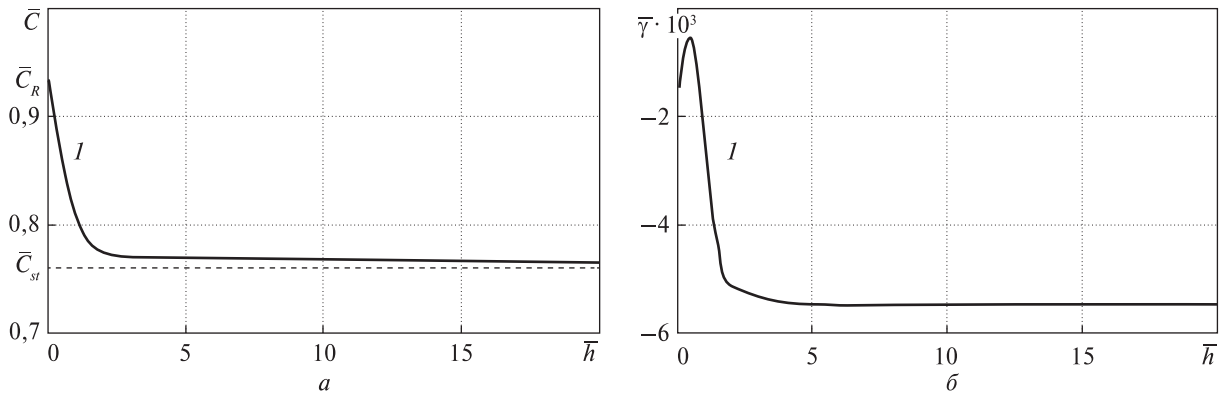


Рис. 1

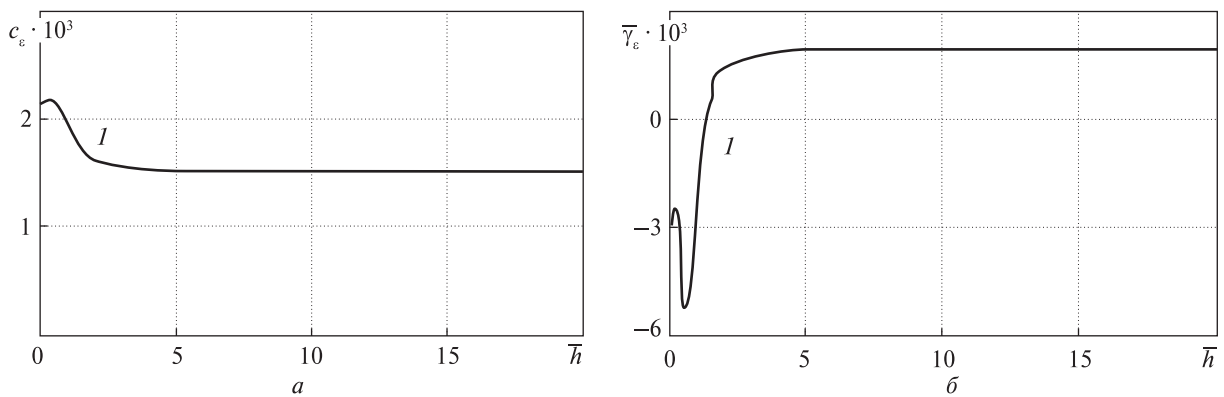


Рис. 2

волновода (оргстекло) относится к разряду жестких. Вторая система представляет собой волновод из стали марки 09Г2С и воды. При этом параметры выбираем такими: упругое тело —  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ; жидкость —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ ,  $\bar{a}_0 = 0,463021$ . Этот волновод характеризуется тем, что материал упругого тела (сталь) является более жестким, чем оргстекло.

В данной работе для оргстекла и стали использован простейший потенциал в форме Мурнагана, зависящий от трех алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина [3, 6, 7, 10]. Кроме того, учитывалось то обстоятельство, что оргстекло и сталь относятся к разряду жестких материалов, которые не допускают больших деформаций. Поэтому при рассмотрении конкретных примеров и численного решения уравнения (3) коэффициенты уравнений состояния  $a_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  определялись в рамках линейного акустического приближения [10].

Далее дисперсионное уравнение (3) решаем численно. Результаты вычислений в виде графиков представлены на рис. 1–4. При этом на рис. 1 и 2 приведены графики для упругого полупространства из оргстекла (менее жесткий материал) и воды ( $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$ ). Графики для упругого полупространства из стали марки 09Г2С (более жесткий материал) и воды ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) содержатся на рис. 3 и 4.

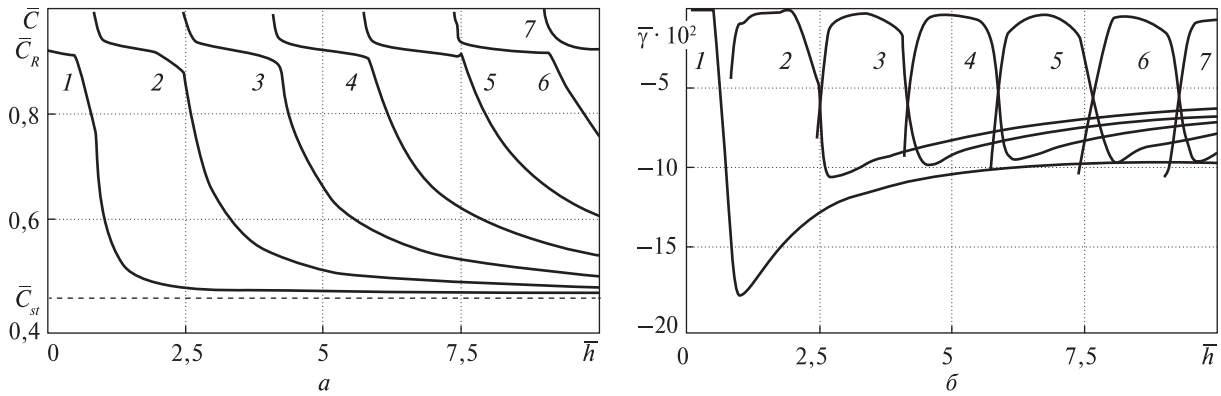


Рис. 3

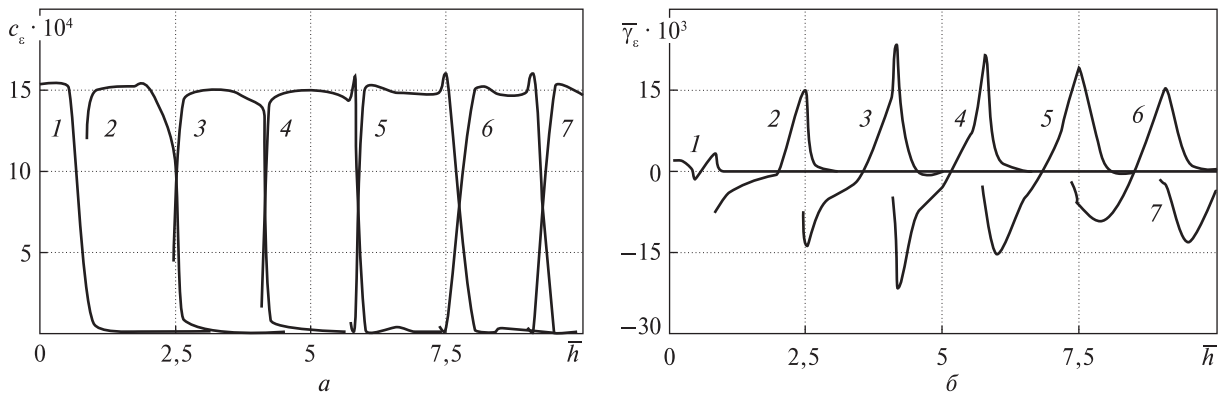


Рис. 4

На рис. 1, а и 3, а изображены дисперсионные кривые для гидроупругих волноводов, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины слоя жидкости  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ) при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . На этих рисунках для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первых мод при возрастании толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  ( $\bar{h} \rightarrow \infty$ ).

На рис. 1, б и 3, б приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\gamma} = \gamma/k_s$ ,  $k_s$  – волновое число волны сдвига в материале упругого полупространства) от безразмерной величины толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  и  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

Характер влияния предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на скорости нормальных волн в упруго-жидкостных системах иллюстрируют рис. 2, а, 4, а, на которых представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей  $c_\epsilon$  [ $c_\epsilon = (c_\sigma - c)/c$ ,  $c_\sigma$  – фазовая скорость мод в системе с предварительно напряженным полупространством,  $c$  – фазовая скорость нормальных волн при отсутствии начальных деформаций в упругом полупространстве] от толщины жидкого слоя (частоты)  $\bar{h}$ .

Характер влияния предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на коэффициенты затухания мод в упругом полупространстве, взаимодействующем со слоем вязкой жидкости, иллюстрируют рис. 2, б и 4, б, на которых представлены зависимости относительных из-

менений величин коэффициентов затухания мод  $\gamma_\varepsilon$  ( $\gamma_\varepsilon = (\gamma_\sigma - \gamma)/\gamma$ ,  $\gamma_\sigma$  — коэффициенты затухания мод в гидроупругой системе, упругое полупространство которой подвержено начальным деформациям,  $\gamma$  — коэффициенты затухания мод в гидроупругой системе при отсутствии начальных деформаций) от безразмерной величины толщины слоя вязкой жидкости  $\bar{h}$  для первых семи мод.

**Анализ числовых результатов.** Из графика, представленного на рис. 1, а, следует, что скорость поверхностной волны в упругом полупространстве из оргстекла (менее жесткий материал), взаимодействующем со слоем воды, изменяется от скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933557$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,769121$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы оргстекло – вода таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 1,152595$ ) больше скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933557$ ). Учитывая результаты, полученные в работе [15], в данной гидроупругой системе это приводит к тому, что в коротковолновой части спектра мода 1 (волна типа Стоунли), распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактных областях как жидкости, так и упругого полупространства. При этом глубина проникания ее в упругое тело значительно больше глубины проникания в жидкость.

Графики, приведенные на рис. 1, показывают, что с увеличением толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  влияние вязкой жидкости проявляется сильнее. При этом возрастает абсолютное значение коэффициента затухания  $\bar{\gamma}$  и уменьшается величина фазовой скорости поверхностной волны (волна типа Стоунли). Это обусловлено тем, что движения этой волны, распространяющейся вдоль границы раздела сред, локализуются в приконтактных областях жидкости и упругого полупространства, где влияние вязкости значительнее.

Начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ), как следует из графика на рис. 2, а, приводит к повышению фазовой скорости поверхностной волны во всем интервале частот. Наибольшее влияние предварительные деформации оказывают на скорость волны в окрестности частоты зарождения  $\bar{h}_{кр}$ .

На рис. 3, а приведены дисперсионные кривые для системы упругое полупространство из стали (более жесткий материал) — слой воды. Как видно из графиков, фазовая скорость первой моды изменяется от скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923007$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,461819$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . Скорости мод высокого порядка с увеличением толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  стремятся к скорости волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ). Отметим, что при  $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923007$ , как показано в работе [15], в гидроупругой системе с идеальной жидкостью это приводит к тому, что в коротковолновой части спектра глубина проникновения низшей моды (волна типа Стоунли) в жидкий слой больше глубины проникновения в упругое полупространство. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактной области жидкого слоя. Моды высокого порядка с ростом частоты также локализуются в жидком слое. При этом движения в модах высокого порядка при  $\bar{h} \rightarrow \infty$  смещаются от поверхностей слоя жидкости в его толщу. В случае вязкого жидкого слоя уменьшается глубина проникновения моды 1 в жидкость [15]. При этом глубина ее проникновения в упругое тело практически не изменяется. Это приводит к концентрации волновых движений этой моды в приконтактной области жидкости. С этим связано влияние вязкой жидкости на параметры низшей моды во

всем частотном диапазоне. На характеристики мод высокого порядка, распространяющихся в толще жидкого слоя, проявление вязкости с ростом частоты уменьшается (см. рис. 3, б).

Из графиков, приведенных на рис. 4, а, следует, что начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) оказывает влияние на фазовые скорости всех мод, в основном, в окрестности критических частот  $\bar{h}_{кр}$ . Далее с ростом толщины слоя жидкости  $\bar{h}$  оно значительно ослабевает.

**Критерий существования нормальных волн в гидроупругих волноводах.** Анализ дисперсионных уравнений, проведенные дополнительно расчеты и полученные в настоящей работе числовые результаты позволяют установить критерий существования квазилэмбовских мод в упруго-жидкостных волноводах.

В системе, компонентами которой является упругое полупространство и слой жидкости, таким критерием может служить соотношение между скоростью волны звука в жидком слое  $\bar{a}_0$  и скоростью волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ . При  $\bar{a}_0 > \bar{c}_s$ , как видно из графика (см. рис. 1, а), в гидроупругой системе оргстекло – вода ( $\bar{a}_0 = 1,152595 > \bar{c}_s = 1$ ) распространяется лишь одна поверхностная волна, скорость которой изменяется от скорости волны Рэля  $\bar{c}_R$  (при  $\bar{h} \rightarrow 0$ ) до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  (при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ ). В случае выполнения условия  $\bar{a}_0 < \bar{c}_s$  в гидроупругом волноводе распространяется множество квазилэмбовских мод. При этом, как следует из графиков на рис. 3, а, в системе сталь – вода при  $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_s = 1$  на частотном интервале изменения  $\bar{h}$  от 0 до 10 генерируется и распространяется семь мод. При этом скорость первой моды изменяется от скорости волны Рэля  $\bar{c}_R$  при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . Скорости мод высокого порядка при частотах зарождения  $\bar{h}_{кр}$  равны скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$  и далее с возрастанием толщины жидкого слоя  $\bar{h}$  ( $\bar{h} \rightarrow \infty$ ) стремятся к скорости волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$ .

**Влияние начальных напряжений на волны в гидроупругих волноводах.** В системе, состоящей из жидкого слоя и упругого полупространства, начальные напряжения обуславливают изменение частот зарождения волн и смещение их дисперсионных кривых. Как видно из графиков (см. рис. 2, а и 4, а), начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) смещает критические частоты и дисперсионные кривые в высокочастотную часть спектра. Это приводит к повышению величин фазовых скоростей всех волн. При этом начальное растяжение оказывает значительное влияние на величины фазовых скоростей низших мод, в основном, в окрестности частот их зарождения. Различия в закономерностях воздействия предварительных деформаций на скорости первых мод в гидроупругих системах при  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$  и  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$  связаны с локализацией этих мод в разных средах. При  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$  поверхностная волна распространяется как в жидкости, так и в упругом теле. Это обусловлено влиянием начальных напряжений на эту волну во всем частотном спектре. При  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ , как уже упоминалось ранее, с ростом частоты мода 1 локализуется в приконтактной области жидкого слоя. Поэтому упругое тело и начальные напряжения не имеют значительного влияния на величину фазовой скорости этой моды (см. рис. 4, а).

В случае многомодового волновода (рис. 4, а) наибольшее влияние начальные напряжения оказывают на фазовые скорости мод высокого порядка в окрестности критических частот  $\bar{h}_{кр}$ . Характерное уменьшение влияния начальных напряжений на скорости мод высокого порядка при увеличении толщины слоя жидкости (частоты) вызвано тем, что при  $\bar{h} \rightarrow \infty$  движения в модах высокого порядка, начиная со второй (см. рис. 4, а), смещаются от

поверхностей слоя жидкости в его толщу. Этим объясняется незначительное влияние упругого полупространства и начальных напряжений на фазовые скорости, а также дисперсию этих мод в коротковолновой части частотного спектра.

С увеличением толщины жидкого слоя для всех мод характерно уменьшение влияния начального растяжения упругого полупространства на их фазовые скорости и коэффициенты затухания. Вместе с тем для всех мод существуют жидкие слои определенной толщины и определенные частоты, для которых предварительное растяжение не оказывает влияния на их коэффициенты затухания. Как видно из графиков рис. 4, б, ряд квазилэмбовских мод, возникающих в жидкости, имеет несколько таких частот. Кроме того, из графиков, представленных на рис. 4, а и 4, б, следует, что для ряда мод существуют области частот, где начальное растяжение упругого полупространства обуславливает как повышение величин фазовых скоростей и коэффициентов затухания этих мод, так и их понижение.

Таким образом, анализ показывает, что в упруго-жидкостной системе из менее жесткого материала в высокочастотной части спектра поверхностная волна проникает в упругое полупространство. При этом приповерхностная область упругого полупространства формирует волновод, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

В гидроупругой системе с упругим полупространством из более жесткого материала как низшая поверхностная мода, так и моды высокого порядка проникают в жидкий слой и распространяются, преимущественно, в нем. При этом жидкий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

Предложенный подход и полученные результаты позволяют для волновых процессов установить пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций, классической теории упругости, а также модели идеальной жидкости.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Guz A.N. Compressible, viscous fluid dynamics (review). Part 1. *Int. Appl. Mech.* 2000. **36**, № 1. P. 14–39.
2. Guz A.N. The dynamics of a compressible viscous liquid (review). II. *Int. Appl. Mech.* 2000. **36**, № 3. P. 281–302.
3. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *Int. Appl. Mech.* 2002. **38**, № 1. P. 23–59.
4. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2009. 428 p.
5. Guz A. N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1980. **16**, № 3. P. 175–190.
6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. 2 тома. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 2 536 с.
7. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: 2 части. Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ., 2016.
8. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
9. Гузь А.Н. Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ. RU, 2017. 244 с.
10. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. Киев: Наук. думка, 1977. 152 с.
11. Bagno A.M., Guz A.N. Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey). *Int. Appl. Mech.* 1997. **33**, № 6. P. 435–463.
12. Guz A. N., Zhuk A. P., Bagno A. M. Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, № 5. P. 449–507.



13. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями. *Прикл. механика*. 1980. **16**, № 1. С. 113–116.
14. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.
15. Гузь А.Н., Багно А.М. Об акустических волнах в слое вязкой жидкости, взаимодействующем с упругим полупространством. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 6. С. 40–48. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.40>

Поступило в редакцию 21.03.2018

## REFERENCES

1. Guz, A. N. (2000). Compressible, viscous fluid dynamics (review). Part 1. *Int. Appl. Mech.*, 36, No. 1, pp. 14–39.
2. Guz, A. N. (2000). The dynamics of a compressible viscous liquid (review). II. *Int. Appl. Mech.*, 36, No. 3, pp. 281–302.
3. Guz, A. N. (2002). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *Int. Appl. Mech.*, 38, No. 1, pp. 23–59.
4. Guz, A. N. (2009). Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publ.
5. Guz, A. N. (1980). Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 16, No. 3, pp. 175–190.
6. Guz, A. N. (1986). Elastic waves in bodies with initial stresses. 2 vols. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
7. Guz, A. N. (2016). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. 2 parts. Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ. (in Russian).
8. Guz, A. N. (1998). Dynamics of compressible viscous fluid. Kiev: A.C.K. (in Russian).
9. Guz, A. N. (2017). Introduction to dynamics of compressible viscous fluid. Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ. RU (in Russian).
10. Guz, A. N., Makhort, F. G. & Guscha, O. I. (1977). Introduction in acoustoelasticity. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
11. Bagno, A. M. & Guz, A. N. (1997). Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey). *Int. Appl. Mech.*, 33, No. 6, pp. 435–463.
12. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Bagno, A. M. (2016). Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 5, pp. 449–507.
13. Zhuk, A. P. (1980). Stoneley wave in a medium with initial stresses. *J. Appl. Mech.*, 16, No. 1, pp. 113–116 (in Russian).
14. Viktorov, I. A. (1981). Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka (in Russian).
15. Guz, A. N. & Bagno, A. M. (2018). On the acoustic waves in a layer of viscous fluid interacting with the elastic half-space. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr.*, No. 6, pp. 40–48 (in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.40>

Received 21.03.2018

*О.М. Багно*

Институт механики ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

## ПРО ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА ФАЗОВІ ШВИДКОСТІ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ У СТИСЛИВОМУ ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРИ, ЩО ВЗАЄМОДІЄ З ШАРОМ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

Розглянуто задачу про поширення акустичних хвиль у попередньо деформованому стисливому півпросторі, що взаємодіє з шаром в'язкої стисливої рідини. Дослідження проведено на основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для пружного півпростору та тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для в'язкої стисливої рідини. Застосовано постановку задачі та підхід, засновані на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружного тіла та рідини. Отримано дисперсійне рівняння, яке описує поширення гармонічних хвиль у гідропруж-

ній системі. Побудовано дисперсійні криві нормальних хвиль в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив початкових напружень пружного півпростору та товщини шару в'язкої стисливої рідини на фазові швидкості й коефіцієнти загасання акустичних хвиль. Показано, що вплив в'язкості рідини на параметри хвильового процесу пов'язаний з властивостями локалізації хвиль. Розвинутий підхід і отримані результати дозволяють встановити для хвильових процесів межі застосування моделей, заснованих на різних варіантах теорії малих початкових деформацій та класичній теорії пружності для твердого тіла, а також моделі ідеальної рідини. Числові результати представлені у вигляді графіків і дано їх аналіз.

**Ключові слова:** акустичні хвилі, фазова швидкість, коефіцієнт загасання, стисливий пружний півпростір, шар в'язкої стисливої рідини, початкові напруження.

О.М. Вагно

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: alexbag2016@gmail.com

ON THE INFLUENCE OF INITIAL STRESSES ON THE PHASE VELOCITIES  
OF ACOUSTIC WAVES IN THE COMPRESSIBLE ELASTIC HALF-SPACE  
INTERACTING WITH THE LAYER OF A VISCOUS FLUID

The problem of acoustic wave propagation in the predeformed compressible elastic half-space that interacts with the layer of a viscous compressible fluid is considered. The study is based on the three-dimensional linearized equations of the theory of elasticity of finite deformations for the elastic half-space and the three-dimensional linearized Navier—Stokes equations for a viscous compressible fluid. The problem formulation and the approach based on the representations of general solutions of the linearized equations for elastic solid and fluid are applied. A dispersion equation, which describes the propagation of harmonic waves in a hydroelastic system, is obtained. The dispersion curves for normal waves for a wide range of frequencies are constructed. The effect of initial stresses of the elastic half-space and the thickness of the layer of a viscous compressible fluid on the phase velocities and attenuation coefficients of acoustic waves are analyzed. It is shown that the influence of the viscosity of a fluid on the wave process parameters is associated with the localization properties of waves. An approach developed and the results obtained for the wave processes make it possible to establish the limits of applicability of the models based on different versions of the theory of small initial deformations and of the classical elasticity theory for a solid body, as well the model of an ideal fluid. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

**Keywords:** acoustic waves, phase velocity, attenuation coefficient, compressible elastic half-space, layer of a viscous compressible fluid, initial stresses.