

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.06.019>

УДК 539.3

В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Є.Д. Белов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: vfmeish@gmail.com

До побудови чисельного алгоритму розв'язку динамічних задач теорії дискретно підкріплених конічних оболонок в неортогональній системі координат

Представлено членом-кореспондентом НАН України І.С. Чернишенком

Розглянуто побудову чисельного алгоритму розв'язання динамічних задач дискретно підкріплених конічних оболонок еліптичного поперечного перерізу при розподілених навантаженнях. Наведено рівняння коливань підкріпленої конічної оболонки в неортогональній системі координат з використанням варіанта теорії оболонок та стержнів в рамках гіпотез С.П. Тимошенка та відповідний чисельний алгоритм розв'язання задач.

Ключові слова: конічна оболонка, еліптичний переріз, теорія оболонок та стержнів С.П. Тимошенка, чисельний алгоритм.

Постановка задачі. Розглядається постановка задачі динамічного деформування дискретно підкріпленої конічної оболонки еліптичного перерізу при розподіленому внутрішньому навантаженні [1]. Для опису динамічної поведінки конічних оболонок приймається лінійний варіант уточненої теорії тонких оболонок в рамках моделі С.П. Тимошенка [2, 3]. Поздовжнє i -те ребро розглядається як одновимірна система, яка характеризується лінією центра ваги поперечного перерізу ребра. Для опису динамічної поведінки i -го поздовжнього ребра приймається лінійний варіант теорії стержнів в рамках моделі С.П. Тимошенка [2]. Тобто, лінія центра ваги поперечного перерізу i -го ребра характеризується двома векторами:

$$\bar{U}_{1i} = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}) \text{ та } \bar{U}_i^1 = (u_i^1, u_i^2, u_i^3, \varphi_i^1, \varphi_i^2).$$

В подальшому покладається, що ребро жорстко з'єднане з оболонкою. При цьому, умови контакту i -те ребро — оболонка приймаються згідно з [2]. В результаті отримуємо дві групи рівнянь коливань вихідної неоднорідної конструкції в загальному вигляді:

рівняння коливань власно гладкої конічної оболонки

© В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Є.Д. Белов, 2019

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 6

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} &= \nabla_i T^{ij} - b_i^j T^{i3} + P^i \quad (i, j = 1, 2); \\ \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= \nabla_i T^{i3} + b_{ij} T^{ij} + P_3; \quad \rho I \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2} = \nabla_i M^{ij} - T^{i3} + m^i; \end{aligned} \quad (1)$$

рівняння коливань i -го підкріплюючого ребра

$$\frac{\partial T_i^{1j}}{\partial x^1} + [T^{2j}]_i = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^j}{\partial t^2} \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \frac{\partial M_i^{1j}}{\partial x^1} + [M^{2j}]_i - T_i^{13} \delta_{1j} = \rho_i I_i \frac{\partial^2 \varphi_i^j}{\partial t^2} \quad (j = 1, 2). \quad (2)$$

В формулах (1) індексами 1, 2 позначені змінні по координатах x^1, x^2 : $u^1, u^2, u_3, \varphi^1, \varphi^2$ — контрваріантні компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки; T^{ij}, T^{i3}, M^{ij} — контрваріантні компоненти тензорів зусиль та моментів; P^i, P_3, m^i, m^i — компоненти зусиль на поверхні оболонки; ∇_i — контрваріантна похідна; ρ — густина матеріалу оболонки; h — товщина оболонки; $I = h^3 / 12$; δ_{ij} — символ Кронекера. В формулах (2) позначення типу $[T^{2j}]_i, [M^{2j}]_i$ відповідають сумарній дії величин зусиль гладкої оболонки на i -й дискретний елемент.

В розгорнутому вигляді, згідно з [3], рівняння коливань (1) в дивергентній формі записуються [1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{12}) + \Gamma_{11}^1 T^{11} + 2\Gamma_{21}^1 T^{12} + \Gamma_{22}^1 T^{22} - b_1^1 T^{13} - b_2^1 T^{23} &= \rho h \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{22}) + \Gamma_{11}^2 T^{11} + 2\Gamma_{12}^2 T^{12} + \Gamma_{22}^2 T^{22} - b_1^2 T^{13} - b_2^2 T^{23} &= \rho h \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{13}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{23}) + b_{11} T^{11} + b_{12} T^{12} + b_{21} T^{12} + b_{22} T^{22} + p^3 &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad (3) \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{12}) + \Gamma_{11}^1 M^{11} + 2\Gamma_{21}^1 M^{12} + \Gamma_{22}^1 M^{22} - T^{13} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{22}) + \Gamma_{11}^2 M^{11} + 2\Gamma_{12}^2 M^{12} + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{23} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Рівняння (2) в розгорнутому вигляді мають вигляд [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i^{11}}{\partial x^1} + [T^{21}]_i &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_i^{12}}{\partial x^1} + [T^{22}]_i = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_i^{13}}{\partial x^1} + [T^{23}]_i = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_i^{11}}{\partial x^1} + T_i^{13} + [M^{21}]_i &= \rho_i I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_i^1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_i^{12}}{\partial x^1} + [M^{22}]_i = \rho_i I_{2i} \frac{\partial^2 \varphi_i^2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Чисельний алгоритм розв'язання задачі. Для побудови чисельного алгоритму використовується інтегро-інтерполяційний підхід побудови скінченно-різницевого схем по про-

сторових координатах x^1, x^2 та явній різницевій апроксимації по часовій координаті t [2]. Розглянемо побудову різницевих рівнянь. Рівняння системи (3) інтегруємо по області

$$\Omega_1 = \{x_{l-1/2}^1 \leq x^1 \leq x_{l+1/2}^1, x_{m-1/2}^2 \leq x^2 \leq x_{m+1/2}^2\} \text{ при } t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}.$$

При цьому маємо:

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{12}) + \Gamma_{11}^1 T^{11} + \right. \\ & \left. + 2\Gamma_{21}^1 T^{12} + \Gamma_{22}^1 T^{22} - b_1^1 T^{13} - b_2^1 T^{23} \right] d\Omega_1 dt = \int \int \int_{\Omega_1} \left[\rho h \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt; \\ & \int \int \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{22}) + \Gamma_{11}^2 T^{11} + 2\Gamma_{12}^2 T^{12} + \right. \\ & \left. + \Gamma_{22}^2 T^{22} - b_1^2 T^{13} - b_2^2 T^{23} \right] d\Omega_1 dt = \int \int \int_{\Omega_1} \rho h \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} d\Omega_1 dt; \\ & \int \int \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} T^{13}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} T^{23}) + b_{11} T^{11} + b_{12} T^{12} + \right. \\ & \left. + b_{21} T^{12} + b_{22} T^{22} + p^3 \right] d\Omega_1 dt = \int \int \int_{\Omega_1} \rho h \frac{\partial^2 u^3}{\partial t^2} d\Omega_1 dt; \\ & \int \int \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{11}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{12}) + \Gamma_{11}^1 M^{11} + 2\Gamma_{21}^1 M^{12} + \right. \\ & \left. + \Gamma_{22}^1 M^{22} - T^{13} \right] d\Omega_1 dt = \int \int \int_{\Omega_1} \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi^1}{\partial t^2} d\Omega_1 dt; \\ & \int \int \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} M^{12}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} M^{22}) + \Gamma_{11}^2 M^{11} + 2\Gamma_{12}^2 M^{12} + \right. \\ & \left. + \Gamma_{22}^2 M^{22} - T^{23} \right] d\Omega_1 dt = \int \int \int_{\Omega_1} \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial t^2} d\Omega_1 dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Різницевий аналог рівнянь (5) має вигляд:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[(\sqrt{g} T^{11})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} T^{11})_{l-1/2,m}^n \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^2} \left[(\sqrt{g} T^{12})_{l,m+1/2}^n - (\sqrt{g} T^{12})_{l,m-1/2}^n \right] + \\
 & + (\Gamma_{11}^1 T^{11})_{l,m}^n + 2(\Gamma_{21}^1 T^{12})_{l,m}^n + (\Gamma_{22}^1 T^{22})_{l,m}^n - (b_1^1 T^{13})_{l,m}^n - (b_2^1 T^{23})_{l,m}^n = \rho h (u_{l,m}^1)_{\bar{t}}; \\
 & \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[(\sqrt{g} T^{12})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} T^{12})_{l-1/2,m}^n \right] + \\
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^2} \left[(\sqrt{g} T^{22})_{l,m+1/2}^n - (\sqrt{g} T^{22})_{l,m-1/2}^n \right] + \\
 & + (\Gamma_{11}^2 T^{11})_{l,m}^n + 2(\Gamma_{12}^2 T^{12})_{l,m}^n + (\Gamma_{22}^2 T^{22})_{l,m}^n - (b_1^2 T^{13})_{l,m}^n - (b_2^2 T^{23})_{l,m}^n = \rho h (u_{l,m}^2)_{\bar{t}}; \\
 & \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[(\sqrt{g} T^{13})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} T^{13})_{l-1/2,m}^n \right] + \\
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^2} \left[(\sqrt{g} T^{23})_{l,m+1/2}^n - (\sqrt{g} T^{23})_{l,m-1/2}^n \right] + \\
 & + (b_{11}^1 T^{11})_{l,m}^n + (b_{12}^1 T^{11})_{l,m}^n + (b_{21}^1 T^{12})_{l,m}^n + (b_{22}^1 T^{22})_{l,m}^n + p_{3l,m}^n = \rho h (u_{l,m}^3)_{\bar{t}}; \\
 & \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[(\sqrt{g} M^{11})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} M^{11})_{l-1/2,m}^n \right] + \\
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^2} \left[(\sqrt{g} M^{12})_{l,m+1/2}^n - (\sqrt{g} M^{12})_{l,m-1/2}^n \right] + \\
 & + (\Gamma_{22}^1 M^{11})_{l,m}^n + 2(\Gamma_{21}^1 M^{12})_{l,m}^n + (\Gamma_{22}^1 M^{22})_{l,m}^n - (T^{13})_{l,m}^n = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{l,m}^1)_{\bar{t}}; \\
 & \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^1} \left[(\sqrt{g} M^{12})_{l+1/2,m}^n - (\sqrt{g} M^{11})_{l-1/2,m}^n \right] + \\
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right)_{l,m} \frac{1}{\Delta x^2} \left[(\sqrt{g} M^{22})_{l,m+1/2}^n - (\sqrt{g} M^{22})_{l,m-1/2}^n \right] + \\
 & + (\Gamma_{11}^2 M^{11})_{l,m}^n + 2(\Gamma_{12}^2 M^{12})_{l,m}^n + (\Gamma_{22}^2 M^{22})_{l,m}^n - (T^{23})_{l,m}^n = \rho h (\varphi_{l,m}^2)_{\bar{t}}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

У випадку інтегрування по області $\Omega_{li} = \{x_{i-1/2}^1 \leq x^1 \leq x_{i+1/2}^1\}$ при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ для i -го підкріплюючого ребра можемо записати:

$$\begin{aligned}
 \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial T_i^{11}}{\partial x^1} + [T^{21}]_i \right] d\Omega_{1i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{1i}} \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt; \\
 \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial T_i^{12}}{\partial x^1} + [T^{22}]_i \right] d\Omega_{1i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{1i}} \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^2}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt; \\
 \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial T_i^{13}}{\partial x^1} + [T^{23}]_i \right] d\Omega_{1i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{1i}} \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_i^3}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt; \\
 \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial M_i^{11}}{\partial x^1} + T_i^{13} + [M^{21}]_i \right] d\Omega_{1i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{1i}} \rho_i I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_i^1}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt; \\
 \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial M_i^{12}}{\partial x^1} + [M^{22}]_i \right] d\Omega_{1i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{1i}} \rho_i I_{2i} \frac{\partial^2 \varphi_i^2}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Різницевий аналог рівнянь (7) має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta x^1} [(T_i^{11})_{l+1/2}^n - (T_i^{11})_{l-1/2}^n] + [T^{21}]_{i,l}^n &= \rho_i F_i [(u_i^1)_l^n]_{\bar{t}}; \\
 \frac{1}{\Delta x^1} [(T_i^{12})_{l+1/2}^n - (T_i^{12})_{l-1/2}^n] + [T^{22}]_{i,l}^n &= \rho_i F_i [(u_i^2)_l^n]_{\bar{t}}; \\
 \frac{1}{\Delta x^1} [(T_i^{13})_{l+1/2}^n - (T_i^{13})_{l-1/2}^n] + [T^{23}]_{i,l}^n &= \rho_i F_i [(u_i^3)_l^n]_{\bar{t}}; \\
 \frac{1}{\Delta x^1} [(M_i^{11})_{l+1/2}^n - (M_i^{11})_{l-1/2}^n] + \frac{1}{2} [(T_i^{13})_{l+1/2}^n + (T_i^{13})_{l-1/2}^n] + [T^{23}]_{i,l}^n &= \rho_i I_{1i} [(\varphi_i^1)_l^n]_{\bar{t}}; \\
 \frac{1}{\Delta x^1} [(M_i^{12})_{l+1/2}^n - (M_i^{12})_{l-1/2}^n] + [M^{22}]_{i,l}^n &= \rho_i I_{2i} [(\varphi_i^2)_l^n]_{\bar{t}}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Таким чином, в даній роботі наведено постановку та чисельний алгоритм розв'язку задач динаміки дискретно підкріплених конічних оболонок еліптичного перерізу в неортогональній системі координат.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Белов Є.Д. Динаміка конічних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 1. С. 29–33. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.029>
2. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. Киев: Изд.-полиграф. центр “Киев. ун-т”, 2012. 541 с.
3. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. К.З. Галимов (Ред.) Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 212 с.
4. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями в механике. Киев: Наук. думка, 1972. 148 с.

Надійшло до редакції 27.02.2019

REFERENCES

1. Meish, V. F., Meish, Yu. A., Belov, Ye. D. (2018). The dynamics of conical shells of the elliptic section at nonstationary loads. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 1. pp. 29-33 (Ukrainaan). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.029>
2. Golovko, K. G., Lugovoi, P. Z. & Meish, V. F. (2012). Dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loads. Publ. Centre "Kyiv University" (in Russian).
3. The theory of shells with allowance for transverse shear. Galimov, K.Z. (Ed.) (1977). Kazan: Publ. House of Kazan. Univ. (in Russian).
4. Kilchevsky, N. A. (1972). Fundamentals of tensor calculus with applications in mechanics. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).

Received 27.02.2019

В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Е.Д. Белов

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: vfmeish@gmail.com

К ПОСТРОЕНИЮ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК В НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассматривается построение численного алгоритма решения динамических задач дискретно подкрепленных конических оболочек эллиптического поперечного сечения при действии на нее распределенной нагрузки. Приведены уравнения колебаний подкрепленной конической оболочки в неортогональной системе координат и соответствующий численный алгоритм решения задач. Используется вариант теории оболочек и стержней С.П. Тимошенко.

Ключевые слова: коническая оболочка, эллиптическое сечение, теория оболочек и стержней С.П. Тимошенко, численный алгоритм.

Meish V.F., Meish Yu.A., Belov Ye.D.

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: vfmeish@gmail.com

TO THE CONSTRUCTION OF A NUMERICAL ALGORITHM FOR SOLVING
THE DYNAMIC PROBLEMS OF THE THEORY OF DISCRETELY REINFORCED
CONIC SHELLS IN A NONORTHOGONAL COORDINATE SYSTEM

The paper deals with the construction of a numerical algorithm for solving the dynamic problems of discretely supported conic shells of an elliptic cross-section under the action of a distributed load on it. The equations of vibrations of a supported conic shell in a nonorthogonal coordinate system and the corresponding numerical algorithm for solving the problems are given. The variant of the theory of shells and rods by the Timoshenko type is used.

Keywords: conic shell, elliptic section, Timoshenko theory of shells and rods, numerical algorithm.