

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.06.025>

УДК 539.421

М.Ф. Селіванов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: mfs@ukr.net

Крайова тріщина із зоною зчеплення в ортотропному тілі

Представлено членом-кореспондентом НАН України В.М. Назаренком

Побудовані інтегральні рівняння задачі про переміщення берегів крайової тріщини в ортотропному тілі та запропоновано методологію їх розв'язання. Методологія проілюстрована визначенням коефіцієнта інтенсивності напружень, який порівняно з відомими в літературі результатами. Побудовані інтерполяційні раціональні функції для отриманої залежності коефіцієнта інтенсивності від параметра ортотропії. Задача про крайову тріщину в ортотропній півплощині також розв'язана в рамках моделі зони зчеплення з нелінійним законом зчеплення—відриву.

Ключові слова: крайова тріщина, тріщина в ортотропному тілі, коефіцієнт інтенсивності напружень, вплив ортотропії, модель зони зчеплення.

Наявність анізотропії механічних властивостей у композитах, армованих односпрямованими волокнами, призводить до залежності від співвідношення між пружними модулями не тільки розкриття крайової тріщини, а й коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН). Перші теоретичні дослідження залежності КІН від ортотропії проведено в [1], де встановлено, що КІН є функцією двох характеристик

$$k^{-2} = \frac{E_{22}}{E_{11}}, \quad m = \frac{E_{11}}{G_{12}} - 2\nu_{12}.$$

В [2] було зроблено висновок про залежність КІН тільки від характеристики ортотропії

$$\rho = \frac{\sqrt{E_{11}E_{22}}}{2G_{12}} - \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}} \quad (1)$$

і за результатами [1] побудовано наближену формулу для його визначення:

$$K_I = Y(\rho)\sigma_\infty\sqrt{\pi\delta}, \quad Y(\rho) = 1,12 - 0,011(\rho - 1), \quad \rho < 1 < 8,$$

де σ_∞ — величина зовнішнього навантаження; δ — довжина тріщини. Таким чином, КІН крайової тріщини в ортотропному тілі не перевищує його значення у випадку ізотропії механічних властивостей.

© М.Ф. Селіванов, 2019

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 6

25

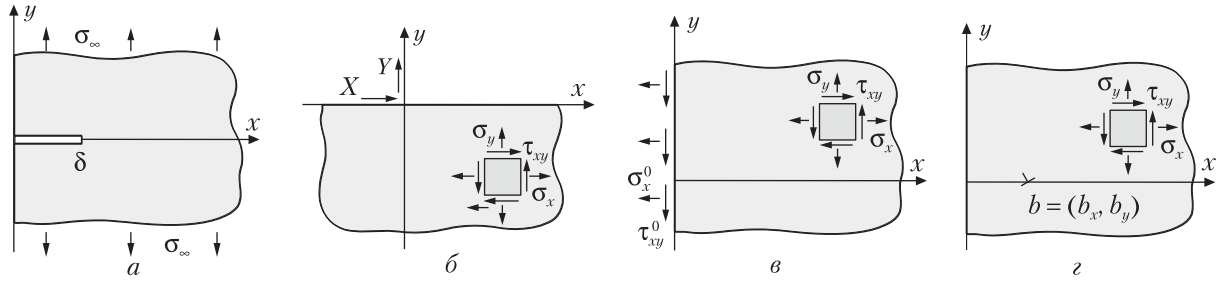


Рис. 1

В даній роботі за допомогою методології розв'язання задачі, проілюстрованої в [3] для крайової тріщини в ізотропній напівнескінченній площині, побудовано розв'язок для випадку ортотропії. Результати обчислення КІН порівняно з результатами [1], уточнено залежність КІН від параметра ортотропії, а також на основі методології, запропонованої та проілюстрованої в [4, 6, 5], отримано розв'язки аналогічної задачі в рамках моделі зони зчеплення.

Розглянемо тріщину, розташовану вздовж нормалі до границі напівнескінченної ортотропної площини, одна з осей ортотропії збігається з напрямком цієї нормалі (рис. 1, а). Виберемо систему координат так, щоб вісь x збігалась з лінією тріщини, а вісь y відповідала границі півплощини. За заданими на відріжку $y = 0, x \in (0, \delta)$ напруженнями необхідно знайти розкриття берегів тріщини за умови зв'язаності напружень і розкриття. Розв'язання першої частини задачі (знаходження розкриття за заданими напруженнями) складається з трьох етапів ([3], 155):

1) знаходиться напруження $\sigma_y(x, 0)$ і $\tau_{xy}(x, 0)$, що виникають внаслідок прикладання на границі неушкодженої півплощини напружень $\sigma_y^0(y)$ і $\tau_{xy}^0(y)$;

2) знаходиться напруження $\sigma_y^b(0, y)$ і $\tau_{xy}^b(0, y)$, що виникають внаслідок прикладання дислокації $b = (b_x, b_y)$ в точці $(t, 0)$ ($0 < t < \delta$);

3) у вираз для $\sigma_y(x, 0)$ і $\tau_{xy}(x, 0)$ замість $\sigma_y^0(y)$ і $\tau_{xy}^0(y)$ підставляються $-\sigma_y^b(0, y)$ і $-\tau_{xy}^b(0, y)$. Отриманий вираз необхідно скласти з виразом для напружень, що виникають вздовж осі x за умови наявності дислокації b , та прирівняти до заданого напруження на лінії розташування тріщини.

Таким чином отримуються сингулярні інтегральні рівняння відносно похідної від розкриття; ці рівняння розв'язуються методом колокації [7].

Друга частина задачі (врахування зв'язаності напружень та розкриття) розв'язується ітеративним методом, запропонованим і проілюстрованим для тріщини у нескінченній ізотропній площині [4, 6] та півплощині [5].

Напруження в ортотропній площині визначаються двома комплексними потенціалами:

$$\sigma_x = 2\text{Re}\{\mu_1^2\Phi_1(z_1) + \mu_2^2\Phi_2(z_2)\}, \quad \sigma_y = 2\text{Re}\{\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)\},$$

$$\tau_{xy} = -2\text{Re}\{\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)\},$$

де $z_1 = x + \mu_1 y$, $z_2 = x + \mu_2 y$. У випадку, коли напрямок осей ортотропії збігається з напрямком координатних осей, зв'язок деформацій з напруженнями має форму

$$\varepsilon_x = s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y, \quad \varepsilon_y = s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y, \quad \gamma_{xy} = s_{66}\tau_{xy},$$

де характеристики піддатливості — $s_{11} = 1/E_{11}$, $s_{12} = -\nu_{12}/E_{11}$, $s_{22} = 1/E_{22}$, $s_{66} = 1/G_{12}$ — задовольняють характеристичне рівняння

$$\mu^4 + m\mu^2 + k^2 = 0, \quad k^2 = \frac{s_{22}}{s_{11}}, \quad m = \frac{2s_{12} + s_{66}}{s_{11}},$$

причому випадок $m > 2k$ відповідає усім відомим композитам, внаслідок чого корені цього рівняння є уявними: $\mu_1 = i\beta_1$ і $\mu_2 = i\beta_2$ (вважатиме, що $0 < \beta_1 < \beta_2$).

Дія зосередженої сили (X, Y), прикладеної до границі півплощини, в точці що відповідає початку координат (рис. 1, б), описується за допомогою потенціалів

$$\Phi_1(z_1) = \frac{-X - \mu_2 Y}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)z_1}, \quad \Phi_2(z_2) = \frac{X + \mu_1 Y}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)z_2}.$$

Напруження в точці (x, y) півплощини

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = -\frac{n(Xx + kYy)}{\pi \prod_{k=1}^2 (x^2 + \beta_k^2 y^2)} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \end{pmatrix}, \quad n = \beta_1 + \beta_2 = \sqrt{m + 2k}. \quad (2)$$

Підставимо $X = \sigma_x^0(\eta)d\eta$ та $Y = \tau_{xy}^0(\eta)d\eta$ в (2), обираючи знаки відповідно до рис. 1, в, та проінтегруємо:

$$\sigma_y(x, y) = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_x^0(\eta)x + k\tau_{xy}^0(\eta)(y - \eta)}{\prod_{k=1}^2 (x^2 + \beta_k^2 (y - \eta)^2)} (y - \eta)^2 d\eta,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_x^0(\eta)x + k\tau_{xy}^0(\eta)(y - \eta)}{\prod_{k=1}^2 (x^2 + \beta_k^2 (y - \eta)^2)} x(y - \eta) d\eta.$$

При $y = 0$ отримаємо

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_x^0(\eta)x - k\tau_{xy}^0(\eta)\eta}{\prod_{k=1}^2 (x^2 + \beta_k^2 \eta^2)} \eta^2 d\eta,$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = -\frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_x^0(\eta)x - k\tau_{xy}^0(\eta)\eta}{\prod_{k=1}^2 (x^2 + \beta_k^2 \eta^2)} x\eta d\eta. \quad (3)$$

Напружений стан, обумовлений наявністю дислокації $b = (b_x, b_y)$ в точці (x_0, y_0) (рис. 1, з), визначається потенціалами

$$\Phi_k(z_k) = \frac{A_k}{z_k - z_k^0}, \quad z_k^0 = x_0 + \mu_k y_0, \quad A_k = \frac{\mu_k b_x - b_y}{2\pi i s_{11} \bar{\mu}_k}, \quad k = 1, 2.$$

Для обраних напрямків осей ортотропії

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_1 &= (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \bar{\mu}_1)(\mu_1 - \bar{\mu}_2) = -2i\beta_1(\beta_1^2 - \beta_2^2), \\ \bar{\mu}_2 &= (\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_2) = -2i\beta_2(\beta_2^2 - \beta_1^2). \end{aligned}$$

Напруження, обумовлені дією дислокації

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -ky'[(m+k)x'^2 + k^2y'^2] & kx'(x'^2 - ky'^2) \\ ky'(x'^2 - ky'^2) & x'(x'^2 + (m+k)y'^2) \\ kx'(x'^2 - ky'^2) & ky'(x'^2 - ky'^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \pi L \prod_{k=1}^2 (x'^2 + \beta_k^2 y'^2), \quad L = 2s_{11}nk,$$

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0.$$

Напруження вздовж осей y та x , що виникають внаслідок наявності дислокації $b = (b_x, b_y)$ в точці $(t, 0)$, запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^b(0, y) \\ \tau_{xy}^b(0, y) \end{pmatrix} = -\frac{k}{\Delta} \begin{pmatrix} y[(m+k)t^2 + k^2y^2] & t(t^2 - ky^2) \\ t(t^2 - ky^2) & -y(t^2 - ky^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{b_y}{\pi L(x-t)}, \quad \tau_{xy}(x, 0) = \frac{kb_x}{\pi L(x-t)}$$

відповідно.

Підставляючи $-\sigma_x^b(0, \eta)$ і $-\tau_{xy}^b(0, \eta)$ замість $\sigma_x^0(\eta)$ і $\tau_{xy}^0(\eta)$ в (3) і інтегруючи, отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) &= \frac{b_y}{\pi L} h(x, t), \quad \tau_{xy}(x, 0) = \frac{kb_x}{\pi L} h(x, t), \\ h(x, t) &= \sum_{k=1}^3 \frac{a_k}{t + b_k x}, \quad a = \frac{1}{(1-\varsigma)^2} (2\varsigma^2, 2, -(1+\varsigma)^2), \quad b = \left(\varsigma, \frac{1}{\varsigma}, 1 \right), \quad \varsigma = \frac{\beta_1}{\beta_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Функцію h також можна подати у формі

$$h(x, t) = \frac{\varsigma(t^2 - x^2) - (1+\varsigma)^2 xt}{(\varsigma t + x)(t + \varsigma x)(t + x)}.$$

Таким чином, ядро інтегрального рівняння, що дає розв'язок задачі, залежить від єдиного параметра ортотропії ζ . Цей параметр можна подати через часто вживану в літературі характеристику ρ :

$$\zeta^2 = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 1}}{\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}}, \quad \rho = \frac{m}{2k} = \frac{n^2}{2k} - 1, \quad (6)$$

вираз для ρ через пружні модулі наведено в (1). Зазначимо, що цей модуль не зміниться, якщо напрямки головних осей ортотропії поміняти місцями.

Складаючи вирази для відповідних напружень в (4) і (5), отримаємо

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{1}{\pi L} K(x, t) b_y, \quad \tau_{xy}(x, 0) = -\frac{k}{\pi L} K(x, t) b_x, \quad (7)$$

$$K(x, t) = \frac{1}{t - x} - h(x, t). \quad (8)$$

Замінюючи в (7) b_y і b_x на $\varphi(t)dt$ і $\psi(t)dt$ відповідно, інтегруючи і прирівнюючи отримані напруження $\sigma_y(x, 0)$ і $\tau_{xy}(x, 0)$ до напружень на лінії розташування тріщини в тілі без тріщини $\tilde{\sigma}(x)$ і $\tilde{\tau}(x)$, взятим зі знаком “-”, отримаємо сингулярні інтегральні рівняння

$$\frac{1}{\pi L} \int_0^\delta K(x, t) \varphi(t) dt = \tilde{\sigma}(x), \quad \frac{k}{\pi L} \int_0^\delta K(x, t) \psi(t) dt = \tilde{\tau}(x). \quad (9)$$

Хід розв'язання рівнянь (9) висвітлимо для першого рівняння.

Вертикальне розкриття берегів тріщини можна визначити у вигляді

$$\Delta(x) = \int_x^\delta \varphi(t) dt.$$

Будемо використовувати метод колокації [5]. Невідому функцію $\varphi(t)$ знайдемо у вигляді добутку вагової функції $\omega(t)$, обраної за результатами [8], і кусково-лінійної функції $g(t)$:

$$g(t) = g_k q_k(t) + g_{k+1} [1 - q_k(t)], \quad t \in (t_k, t_{k+1}),$$

$$g_k = g(t_k), \quad q_k(t) = (t_{k+1} - t) / \Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Виконаємо в (9) заміну змінних $t = \delta t'$, $x = \delta x'$ ($0 \leq t', x' \leq 1$), перепозначимо $g(\delta t') / (L\sigma_{\max})$, $\omega(\delta t')$ і $\tilde{\sigma}(\delta x') / \sigma_{\max}$ через $g(t')$, $\omega(t')$ і $\tilde{\sigma}(x')$ відповідно, а потім t' і x' через t і x відповідно. Перше рівняння в (9) набуде вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 K(x, t) \omega(t) g(t) dt = \tilde{\sigma}(x), \quad 0 < x < 1, \quad (10)$$

розкриття —

$$\Delta(x) = L\sigma_{\max} \int_x^1 \omega(t) g(t) dt.$$

Ліву частину в (10) подамо у вигляді

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N g_k J_k(x),$$

де

$$\begin{aligned} J_1(x) &= T_1'(x) - Q_1(x), \quad J_n(x) = -T_{N-1}'(x), \\ J_k(x) &= T_k'(x) - T_{k-1}'(x), \quad k = 2, \dots, N-1; \\ Q_k(x) &= Q(x, t_k), \quad T_k'(x) = \frac{T_{k+1}(x) - T_k(x)}{\Delta t_k}, \quad T_k(x) = T(x, t_k); \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= \hat{Q}(x, t) - \check{Q}(x, t), \\ \hat{Q}(x, t) &= \int \frac{w(t)}{t-x} dt = w(x) \ln \left| \frac{w(t) - w(x)}{w(t) + w(x)} \right|, \\ \check{Q}(x, t) &= \int h(x, t) w(t) dt = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{Q}(-b_i x, t), \end{aligned} \tag{12}$$

$$w(t) = (1-t)^{-12}.$$

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \hat{T}(x, t) - \check{T}(x, t), \\ \hat{T}(x, t) &= \int \hat{Q}(x, t) dt = (t-x) \hat{Q}(x, t) + 2w^{-1}(t), \\ \check{T}(x, t) &= \int \check{Q}(x, t) dt = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{T}(-b_i x, t). \end{aligned}$$

Вибір щільності сітки за допомогою параметра N здійснюється згідно з необхідною точністю обчислень.

Обидві складові (див. (12)) функції $Q_1(x)$ з (11) при $x=0$ є сингулярними, але, використовуючи асимптотичні властивості, покладемо

$$Q_1(0) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \ln \zeta^2.$$

В правій границі інтервалу

$$Q_1(1) = -2 + \check{Q}(1, 0).$$

При обчисленні функції $T(x, t)$ використано асимптотики

$$\hat{T}(t, t) = 2w^{-1}(t), \quad \hat{T}(1, t) = 4w^{-1}(t).$$

Обмеженість функцій $Q_1(x)$ та $T_k(x)$ забезпечує обмеженість $J_k(x)$.

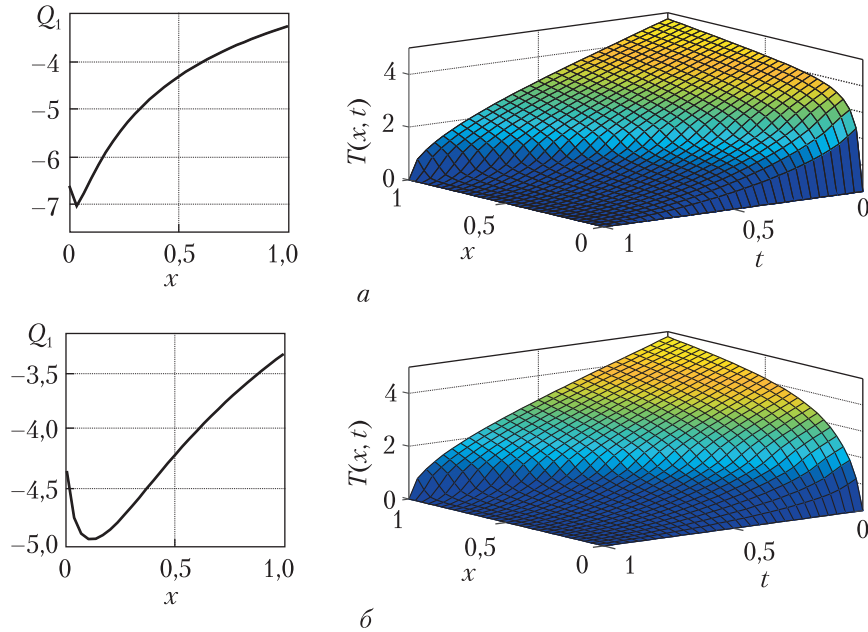


Рис. 2

Функції $Q_1(x)$ та $T(x, t)$ для двох параметрів ортотропії $\zeta=0,05$ (а) та $\zeta=0,35$ (б) проілюстровані на рис. 2. Для малих значень ζ необхідно використовувати щільніше сітку. У всіх наведених нижче числових прикладах $N = 50$.

У функцій h можна розділити пружні та геометричні характеристики, розклавши її за параметром ортотропії ζ ($0 < \zeta < 1$) в околі одиниці, яка відповідає випадку ізотропії матеріалу:

$$h(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho)^k h_k(x, t), \tag{13}$$

$$h_0(x, t) = \frac{t^2 - 4tx - x^2}{(t+x)^3}, \quad h_1(x, t) = 0,$$

$$h_2(x, t) = \frac{2t^2x(x-t)}{(t+x)^5}, \quad h_3(x, t) = \frac{2t^2x(t^2-x^2)}{(t+x)^6}.$$

Такий розклад є важливим, коли необхідно розділити пружні та геометричні параметри задачі, наприклад, при дослідженні повільного зростання тріщини за рахунок в'язкопружних властивостей композита [9].

КІН визначається наступним чином

$$K_I = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{2\pi\delta(x-1)} \sigma_y(x),$$

де напруження на лінії тріщини

$$\sigma_y(x) = -\frac{\sigma_{\infty}}{\pi} \int_0^1 K(x, t) \omega(t) g(t) dt. \tag{14}$$

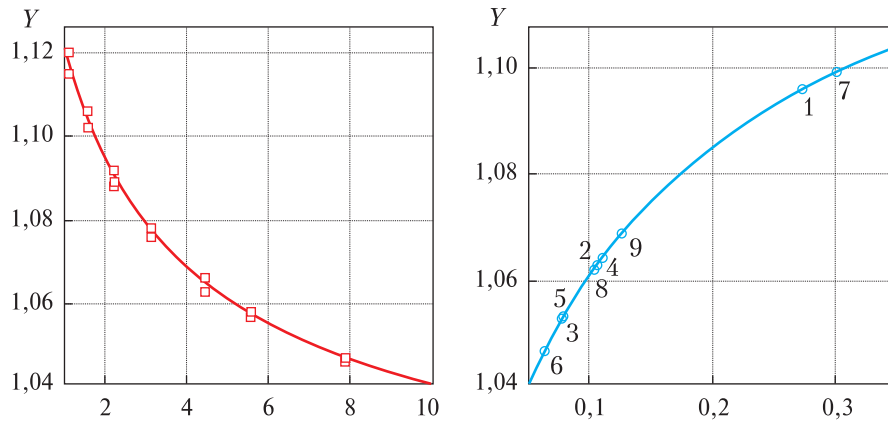


Рис. 3

Тільки перший доданок в $K(x, t)$ (див. (8)) дає сингулярність після інтегрування. Враховуючи, що

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t-x} dt = -\frac{2}{\sqrt{x-1}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x-1}},$$

отримаємо

$$K_I = Y(\rho) \sigma_\infty \sqrt{\pi \delta},$$

де $Y = \sqrt{2} g_n$, $g_n = g(1)$, функція g – розв’язок рівняння (10) при $\tilde{\sigma}(x) = 1$.

Перевіримо результати визначення КІН за допомогою запропонованої методики з відомими в літературі результатами. Суцільна крива на рис. 3, а відповідає КІН, визначеному методикою даної роботи, квадратики – результати [1]. Зазначимо, що лише 16 з 84 наведених в цій роботі значень характеристики Y відповідають значенням параметра ортотропії ρ з інтервалу (1, 10). Поряд із аналогічною залежністю від параметра ρ на рис. 3, б наведені значення Y для декількох композитів з епоксидною матрицею і зазначеними типами волокон з характеристиками ортотропії із таблиці [10, 11]. Інтерполяційні криві для Y побудуємо у дробово-раціональній формі:

№	Волокно	E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}	ζ	ρ	κ	κ_2
1	E-glass	45	12	5,5	0,28	0,2730	1,968	3,502	6,781
2	Aramid	76	5,5	2,1	0,34	0,1059	4,776	3,526	13,11
3	Boron	210	19	4,8	0,25	0,0773	6,505	4,250	14,13
4	SM Carbon(PAN)	145	10	4,1	0,25	0,1106	4,578	3,423	13,04
5	UHM Carbon(PAN)	310	9	4,1	0,20	0,0785	6,407	3,178	18,65
6	UHM Carbon(pitch)	480	9	4,1	0,25	0,0629	7,981	3,137	22,91
7	S-glass	55	16	7,6	0,26	0,3010	1,811	3,438	6,458
8	Kevlar	80	5,5	2,1	0,31	0,1028	4,913	3,522	13,43
9	HMGraphite	230	6,6	4,8	0,25	0,1265	4,016	2,607	15,39

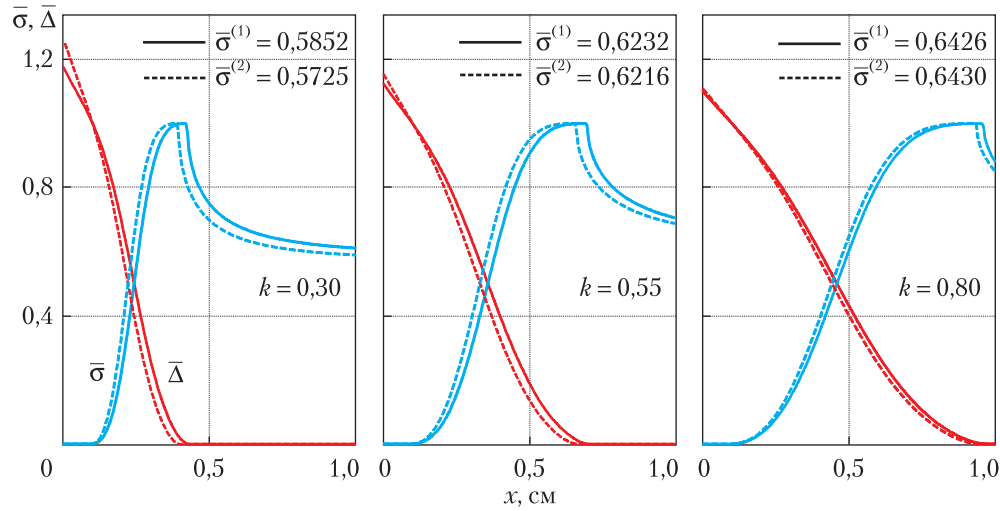


Рис. 4

$$Y(\rho) = \frac{1,012\rho + 2,691}{\rho + 2,304}, \quad 1 < \rho < 10,$$

$$Y(\rho) = \frac{57,56\zeta + 10,62}{\zeta^2 + 49,29\zeta + 10,5}, \quad 0,05 < \zeta < 1.$$

Розв'язок задачі в рамках моделі зони зчеплення дає інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\beta K(x, t) \varphi(t) dt &= L\tilde{\sigma}(x), \quad 0 < x < \beta, \\ \tilde{\sigma}(x) &= \sigma_\infty - T[\Delta(x)]H(x - \lambda), \quad \Delta(x) = \int_x^\beta \varphi(t) dt, \\ \Delta'(\beta) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\sigma = T(\Delta)$ – закон зчеплення–відриву; β – вершина зони зчеплення, що визначається умовою плавності змикання берегів (остання умова в (15)); H – функція Гевісайда. Після переходу до безрозмірних змінних та заміни $f(t) = \varphi(\beta t) / (L\sigma_{\max})$ перепишемо (15) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^1 K(x, t) f(t) dt &= \bar{\sigma}_\infty - \bar{T}[\bar{\Delta}(x)]H(x - \lambda/\beta), \quad 0 < x < 1, \\ \bar{\Delta}(x) &= \kappa \cdot \frac{\delta}{\ell} \int_x^1 f(t) dt, \end{aligned}$$

де

$$\kappa = \frac{2n}{k}, \quad \ell = \frac{E_{22}\phi}{c\sigma_{\max}^2}, \quad c = \frac{\phi}{\Delta_{\max}\sigma_{\max}}, \quad \bar{\sigma}_\infty = \frac{\sigma_\infty}{\sigma_{\max}},$$

ϕ – енергія руйнування; σ_{\max} – міцність зчеплення; δ – довжина інтервалу, на якому розв'язується задача ($\delta > \beta$); ℓ – характерний розмір зчеплення, стала c визначається фор-

мою закону зчеплення–відриву. Величина k обчислена для композитів, характеристики яких наведені в таблиці, проілюстрована в цій самій таблиці разом з k_2 , яка відповідає випадку, коли E_{11} і E_{22} міняються місцями.

На рис. 4 проілюстровано розв’язок задачі для трьох значень параметра k . Двома іншими параметрами, в які входять пружні сталі, обрані ℓ і n . Параметр ортотропії ρ , присутній у виразі для ядра K , визначається через n і k згідно з (6). Хоча задача містить два незалежних пружних параметри, L і ζ , введення параметра ℓ дозволяє об’єднати дві характеристики тріщиностійкості σ_{\max} і ϕ . Точні (суцільні криві) та наближені розв’язки (пунктирні криві), відносні напруження $\bar{\sigma}$, відриви $\bar{\Delta}$ і відповідні граничні рівні навантаження $\bar{\sigma}_{\infty}$, отримані за $\lambda = 0,1$ см, $\delta = 1$ см, $\ell = 2,3$ см, $n = 2$. Для побудови числових розв’язків використано зв’язок між відносними зчепленням та відривом у поліноміальній формі $\bar{T}(\bar{\Delta}) = (1 + 2\bar{\Delta})(1 - \bar{\Delta})^2$. Наближений розв’язок відповідає врахуванню лише першого доданку в (13). Таким чином, розбіжність між точним і наближеним розв’язком ілюструє вплив параметра ζ , який є єдиним параметром ортотропії, від якого залежить КІН.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Sweeney J. The stress intensity for an edge crack in a semi-infinite orthotropic body. *Int. J. Fract.* 1988. **37**. P. 233–241.
2. Suo Z. Delamination specimens for orthotropic materials. *J. Appl. Mech.* 1990. **57**. P. 627–634.
3. Broberg K.B. Cracks and fracture. London: Academic Press, 1999.
4. Камінський А.О., Селіванов М.Ф., Черноіван Ю.О. Вплив довжини зчеплення на рівень критичного навантаження для тіла з тріщиною нормального відриву. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 8. С. 36–44. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.08.036>
5. Селіванов М.Ф. Крайова тріщина із зоною зчеплення. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 3. С. 46–54. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.046>
6. Селіванов М.Ф., Черноіван Ю.О. Модель зони зчеплення з нерівномірним законом зчеплення–відриву для системи декількох колінеарних тріщин. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 9. С. 35–41. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.035>
7. Erdogan F, Gupta G.D., Cook T.S. Solution of singular integral equations. In Sih G.C. (ed.), *Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of Fracture*. 1973. **1**. P. 368–425.
8. Savruk M.P., Madenci E., Shkarayev S. Singular integral equations of the second kind with generalized Cauchy-type kernels and variable coefficients. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1999. **45**. P. 1457–1470.
9. Селіванов М.Ф. Квазістатичні задачі механіки руйнування пружних та в’язкопружних тіл для моделей тріщин з зонами зчеплення: дис. д-ра. фіз.-мат. наук : 01.02.04. Київ, 2017. 322 с.
10. Gerstle F.P. Composites. In: Encyclopedia of Polymer Science and Engineering, New York: Wiley, 1991.
11. Zweben C. Composite materials. In: Kutz M. (ed.), *Mechanical Engineers’ Handbook*. New York: Wiley, 2015.

Надійшло до редакції 23.01.2019

REFERENCES

1. Sweeney, J. (1988). The stress intensity for an edge crack in a semi-infinite orthotropic body. *Int. J. Fract.*, **37**, pp. 233-241.
2. Suo, Z. (1990). Delamination specimens for orthotropic materials. *J. Appl. Mech.*, **57**, pp. 627-634.
3. Broberg, K. B. (1999). *Cracks and fracture*, London: Academic Press.
4. Kaminsky, A. A., Selivanov, M. F. & Chornoivan, Yu. O. (2018). Cohesive zone length influence on the critical load for a body with mode I crack. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 8, pp. 36-44 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.08.036>

5. Selivanov, M. F. (2019). An edge crack with cohesive zone. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 3, pp. 46-54 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.046>
6. Selivanov, M.F. & Chornoivan, Yu. O. (2018). The cohesive zone model with a non-uniform traction-separation law for a system of several collinear cracks *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 9, pp. 35-41 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.035>
7. Erdogan, F., Gupta, G.D. & Cook, T. S. (1973). Solution of singular integral equations. In: Sih, G.C. (ed.), *Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of Fracture*, 1, pp. 368-425.
8. Savruk, M. P., Madenci, E. & Shkarayev, S. (1999). Singular integral equations of the second kind with generalized Cauchy-type kernels and variable coefficients. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1999, 45, pp. 1457-470.
9. Selivanov, M. F. *Quasi-static problems of fracture mechanics for elastic and viscoelastic bodies in the framework of cohesive zone models: dr. sci. in physics and mathematics. Kyiv, 2017. 322 p.* (in Ukrainian)
10. Gerstle, F. P. (1991). *Composites*. In: *Encyclopedia of Polymer Science and Engineering*, Wiley, New York.
11. Zweben, C. (2015). *Composite materials*. In: Kutz M. (ed.), *Mechanical Engineers' Handbook*, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc.

Received 23.01.2019

М.Ф. Селиванов

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: mfs@ukr.net

КРАЕВАЯ ТРЕЩИНА С ЗОНОЙ СЦЕПЛЕНИЯ В ОРТОТРОПНОМ ТЕЛЕ

В работе построены интегральные уравнения задачи о перемещении берегов краевой трещины в ортотропном теле и предложена методология их решения. Методология проиллюстрирована определением коэффициента интенсивности напряжений, для которого проведены сравнения с известными в литературе результатами. Построены интерполяционные рациональные функции для полученной зависимости коэффициента интенсивности от параметра ортотропии. Задача о краевой трещине в ортотропной полуплоскости также решена в рамках модели зоны сцепления с нелинейным законом сцепления–отрыва.

Ключевые слова: *краевая трещина, трещина в ортотропном теле, коэффициент интенсивности напряжений, влияние ортотропии, модель зоны сцепления.*

M.F. Selivanov

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: mfs@ukr.net

AN EDGE CRACK WITH COHESIVE ZONE IN THE ORTHOTROPIC BODY

The integral equations for the problem on displacements of an edge crack in the orthotropic body and a technique of their solving are presented. The technique is exemplified by finding the stress intensity factor, which is compared with the results known from the literature. Fit rational functions are built for the obtained dependence of the stress intensity factor on the parameter of orthotropy. The problem on an edge crack in an orthotropic half-plane is also solved in the frame of a cohesive zone model with non-uniform traction–separation law.

Keywords: *edge crack, crack in the orthotropic body, stress intensity factor, influence of orthotropy, cohesive zone model.*