

---

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.07.026>

УДК 539.3

**А.Н. Гузь, А.М. Багно**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: alexbag2016@gmail.com

## **О влиянии конечных начальных деформаций на фазовые скорости квазилэмбовских волн в несжимаемом упругом слое, контактирующем с полупространством вязкой сжимаемой жидкости**

*Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем*

*Рассматривается задача о распространении квазилэмбовских волн в предварительно деформированном несжимаемом упругом слое, взаимодействующем с полупространством вязкой сжимаемой жидкости. Исследование проводится на основе трехмерных линеаризованных уравнений теории упругости конечных деформаций для несжимаемого упругого слоя и трехмерных линеаризованных уравнений Навье — Стокса для полупространства вязкой сжимаемой жидкости. Применяются постановка задачи и подход, основанные на использовании представлений общих решений линеаризованных уравнений для упругого тела и жидкости. Получено дисперсионное уравнение, описывающее распространение нормальных волн в гидроупругой системе. Построены дисперсионные кривые квазилэмбовских волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние конечных начальных деформаций в упругом слое, толщины упругого слоя и полупространства сжимаемой вязкой жидкости на фазовые скорости, коэффициенты затухания и дисперсию квазилэмбовских мод. Показано, что влияние начальных деформаций упругого слоя на параметры волнового процесса связано со свойствами локализации волн. Развитый подход и полученные результаты позволяют установить для волновых процессов пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций, классической теории упругости для твердых тел, а также модели идеальной жидкости. Численные результаты представлены в виде графиков и дан их анализ.*

**Ключевые слова:** дисперсия волн, квазилэмбовские моды, несжимаемый упругий слой, полупространство вязкой сжимаемой жидкости, начальные деформации.

Широкое использование волн Лэмба в приложениях на практике, а также в теоретических исследованиях обусловило значительный рост числа публикаций. В большинстве из них приведены результаты, полученные с использованием подхода, основанного на применении классической теории упругости и гидродинамики идеальной жидкости. Обзор работ и анализ результатов, изложенных в них, содержатся в [1, 2]. Вместе с тем ряд факторов, присущих реальным средам и оказывающих существенное влияние на волновой процесс, не может быть охвачен этим подходом. Поэтому для исследования закономерностей распро-

© А.Н. Гузь, А.М. Багно, 2019

странения волн Лэмба возникла необходимость применения математических моделей, более полно отражающих поведение реальных упругих и жидких сред. К числу таких моделей относится модель, построенная на основании применения трехмерных линейаризованных уравнений [3–7], она позволяет учесть как начальные деформации упругого тела, так и вязкость и сжимаемость жидкой среды. Кроме того, эта модель применима также к высокоэластичным резиноподобным несжимаемым материалам, допускающим большие начальные деформации и обладающим пониженной сдвиговой жесткостью, на поведение которых вязкая сжимаемая жидкость может оказывать значительное влияние. Проведение исследований в рамках такого подхода вызвано тем, что в элементах различных реальных конструкций практически всегда имеются начальные напряжения. Они возникают, например, в результате технологических операций при изготовлении или их создают целенаправленно, исходя из конструктивных соображений. Этим объясняется определенный теоретический и практический интерес исследования влияния начальных напряжений на распространение квазилэмбовских волн в системе несжимаемый упругий слой — полупространство вязкой сжимаемой жидкости. Заметим, что применение указанной модели к сжимаемым жестким материалам (органическое стекло, сталь) [2–4, 8–10] позволило подробно исследовать, а также получить качественную и количественную информации о влиянии малых начальных деформаций на волновой процесс в них.

В настоящей работе для анализа дисперсионных характеристик квазилэмбовских мод в упруго-жидкостной системе, состоящей из упругого слоя и полупространства жидкости, применяются модели, учитывающие начальные напряжения в твердом теле, а также вязкость и сжимаемость жидкой среды. При исследовании используются трехмерные линейаризованные уравнения Навье—Стокса для жидкости и трехмерные линейаризованные уравнения теории упругости конечных деформаций для твердого тела. При этом предполагается, что жидкость является ньютоновской, находится в состоянии покоя и тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений линейаризованных уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и предварительно напряженного несжимаемого упругого тела, предложенные в работах [3–7].

**Постановка задачи.** Рассмотрим такие динамические процессы в гидроупругой системе, при которых возникающие дополнительные деформации, т.е. возмущения деформаций значительно меньше начальных. Исследуем гармонические волновые процессы малой амплитуды.

Далее предположим, что изотропное нелинейно-упругое твердое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, занимает объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  и контактирует с полупространством вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-\infty < z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $Oz_3$ . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $Oz_1z_2$ . Следовательно, задача сводится к решению системы линейаризованных уравнений гидроупругости при следующих граничных условиях:

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = \tilde{P}_1|_{z_2=0}; \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \tilde{Q}_1|_{z_2=h} = 0; \tilde{Q}_2|_{z_2=h} = 0; \quad (1)$$

$$v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (2)$$

Воспользуемся постановками задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями и вязкой жидкости, а также представлениями общих решений, предложенными в работах [3–7]. В дальнейшем исследуются волновые процессы в предварительно деформированных несжимаемых упругих телах, взаимодействующих с вязкой жидкостью, начальное состояние которых однородно. В случае однородного напряженно-деформированного состояния для плоского случая общие решения имеют вид [3–7]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \chi_1;$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 [\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12})] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные функции  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2\lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \chi_1 = 0; \quad q_i = \lambda_i^{-1}; \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1;$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{4v^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0; \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - v^* \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Выше приняты следующие обозначения:  $\tilde{Q}_i$  и  $\tilde{P}_i$  – составляющие напряжений, соответственно, в упругом теле и жидкости;  $u_i$  – компоненты вектора смещений упругого тела  $\mathbf{u}$ ;  $v_i$  – составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$ ;  $\lambda_i$  – удлинения упругого слоя в направлениях координатных осей;  $a_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  – величины, определяемые из уравнений состояния и зависящие от вида упругого потенциала [3, 4, 8, 11];  $s_{ii}^0$  – начальные напряжения;  $\rho$  – плотность материала упругого слоя;  $\rho_0$  и  $a_0$  – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $v^*$  и  $\mu^*$  – кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости.

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений определяем в классе бегущих волн

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (j = \overline{1, 3}),$$

где  $k$  ( $k = \beta + i\gamma$ ) — волновое число;  $\gamma$  — коэффициент затухания волны;  $\omega$  — круговая частота;  $i^2 = -1$ .

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма — Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1), (2) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения этой системы, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \| e_{lm}(c, \gamma, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h/c_s) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 6}), \quad (3)$$

где  $c$  — фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h$  — толщина упругого слоя;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) — скорость волны сдвига в материале упругого тела;  $\mu$  — модуль сдвига материала упругого тела.

Отметим, что полученное дисперсионное уравнение (3) не зависит от формы упругого потенциала. Оно является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1, 2–4, 8–10]. В частности, если  $a_0$  устремить к бесконечности, то (3) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия упругого слоя с несжимаемой вязкой жидкостью. При  $\rho_0 = 0$  равенство (3) перейдет в уравнение для определения скоростей волн Лэмба [2–4, 8]. В случае, если  $\rho_0 \neq 0$ ,  $h \rightarrow \infty$  и  $\mu^* = 0$  равенство перейдет в соотношение, определяющее фазовую скорость волны Стоунли [3, 4, 10]. Если устремить  $h \rightarrow \infty$  и положить  $\rho_0 = 0$ , то из соотношения (3) получим уравнение для определения скоростей волн Рэля [3, 4, 9].

Указанные частные случаи учитывают наличие начальных деформаций в упругом слое. Кроме того, модели, основанные на различных вариантах теории малых начальных деформаций, на уравнениях приближенных прикладных двумерных теорий как для предварительно напряженных, так и для тел без начальных деформаций, на линейных соотношениях классической теории упругости, являются частными случаями, рассматриваемого в работе, и следуют из него при введении дополнительных упрощающих предположений. Задачи, которые были рассмотрены в рамках модели, учитывающей начальные напряжения, приведены в [2–5, 7–10]. Если положить  $s_{ii}^0 = 0$  ( $\lambda_1 = 1$ ), то получим равенства для основательно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэля, Лэмба и Стоунли—Шольте [1].

**Числовые результаты.** В дальнейшем дисперсионное уравнение (3) решаем численно. При этом расчеты проводим для гидроупругой системы, состоящей из реального упругого тела и жидкости. В качестве материала для упругого слоя выбираем высокоэластичную

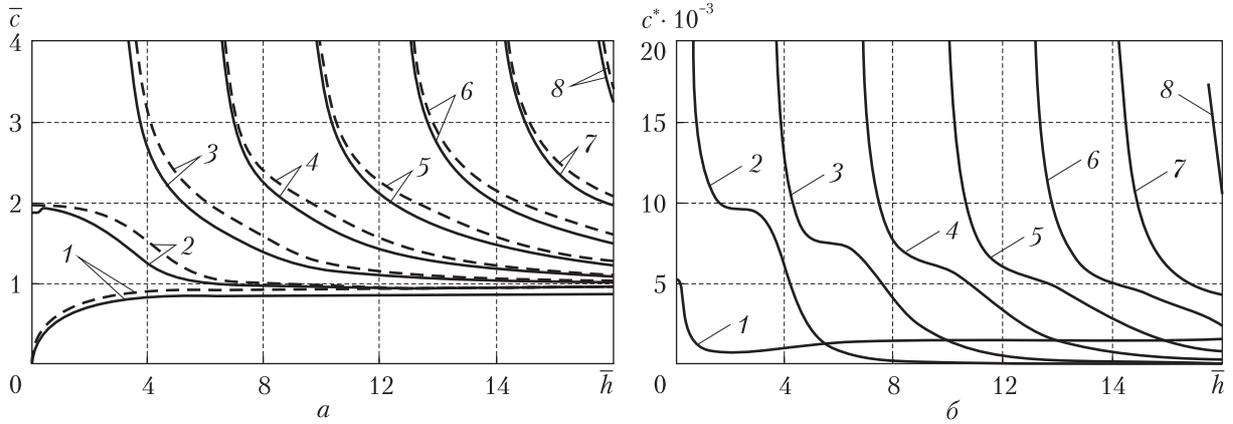


Рис. 1

резину, упругие свойства которой описываются упругим потенциалом Трелоара. При этом механические параметры гидроупругой системы выбираем следующими: упругий слой: —  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ; полупространство жидкости —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$ . У этого волновода материал упругого тела (резина) является податливым и мягким. Кроме того, при решении предполагалось, что начальное напряженное состояние удовлетворяло соотношениям  $s_{11}^0 \neq 0$ ,  $s_{22}^0 = 0$ . Как показано в работе [11], при такой загрузке нет аналогии между задачами в линеаризованной и линейной постановках. Поэтому результаты для тел с начальными напряжениями не могут быть получены из решений соответствующих линейных задач.

Заметим, что уравнение (3) выведено без каких-либо дополнительных требований к виду функции упругого потенциала, поэтому оно имеет место для упругих потенциалов произвольной формы.

Далее дисперсионное уравнение (3) решаем численно. Результаты вычислений представлены в виде графиков на рис. 1–2.

Графики на рис. 1 иллюстрируют влияние вязкой жидкости на волновые характеристики гидроупругой системы. При этом на рис. 1, а изображены дисперсионные кривые, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ) при  $\bar{\mu}^* = 0,001$  и отсутствии начальных напряжений ( $\lambda_1 = 1$ ). При этом сплошные линии соответствуют гидроупругой системе. Штриховыми линиями обозначены дисперсионные кривые для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью.

Характер влияния вязкости жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) на скорости мод в гидроупругой системе иллюстрируют графики на рис. 1, б, на которых представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей мод  $c^*$  ( $c^* = (c_i - c_v)/c_i$ ,  $c_i$  — фазовая скорость нормальных волн в гидроупругой системе с идеальной жидкостью,  $c_v$  — фазовая скорость мод в системе с вязкой жидкостью) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$ .

Характер влияния предварительного сжатия ( $\lambda_1 = 0,8$ ) на фазовые скорости квазилэмбовских волн в упруго-жидкостной системе иллюстрируют графики на рис. 2, а. При этом сплошные линии соответствуют гидроупругой системе с упругим слоем, подвергнутому на-

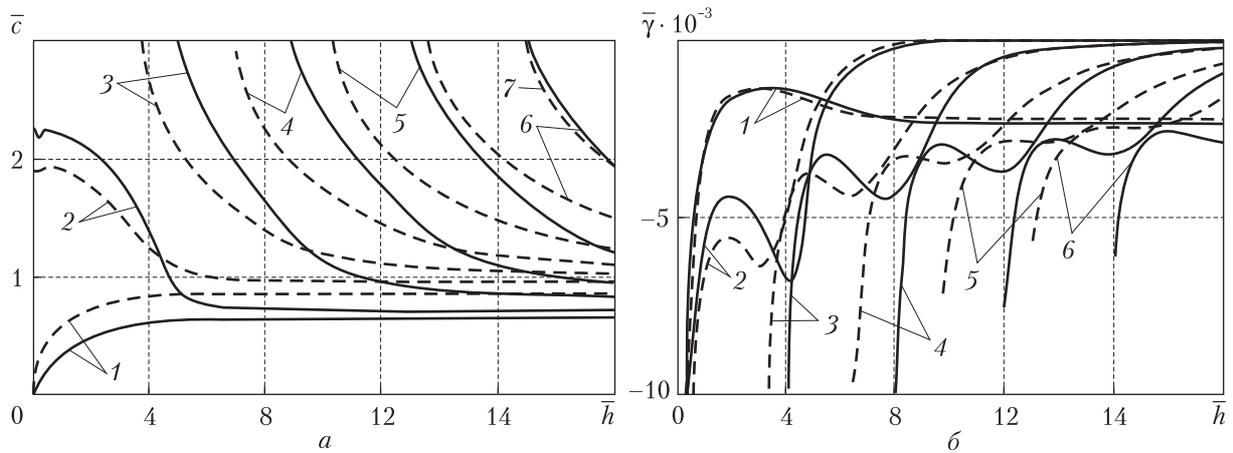


Рис. 2

начальному сжатию ( $\lambda_1 = 0,8$ ). Штриховыми линиями обозначены дисперсионные кривые для ненапряженного упругого слоя ( $\lambda_1 = 1$ ).

На рис. 2, б приведены зависимости безразмерных значений коэффициентов затухания мод  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\gamma} = \gamma/k_s$ ,  $k_s$  – волновое число волны сдвига в материале упругого слоя) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . На этом рисунке сплошные линии соответствуют гидроупругой системе с упругим слоем, подвергнутому начальному сжатию ( $\lambda_1 = 0,8$ ). Штриховыми линиями обозначены дисперсионные кривые для ненапряженного упругого слоя ( $\lambda_1 = 1$ ).

**Анализ числовых результатов.** Из графиков, представленных на рис. 1, а, следует, что для чисто упругого волновода (штриховые линии) скорости первой (нулевой антисимметричной) и второй (нулевой симметричной) мод Лэмба, распространяющихся вдоль нижней и верхней свободных поверхностей слоя, с ростом толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  стремятся к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$ . При этом первая мода стремится к скорости поверхностной волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9553303$ ) снизу, а скорость второй моды – соответственно, к  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9553303$ ) сверху. В гидроупругом волноводе (сплошные линии) при росте толщины упругого слоя  $\bar{h}$  скорость первой моды, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,857938$ ). Относительно поведения этой моды в высокочастотной части спектра необходимо отметить следующее. Как известно [12], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом нами случае механические параметры гидроупругой системы: упругий слой (податливый материал) – вода таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 46,153442$ ) больше скорости квазиэлевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955317$ ). Согласно анализу кинематических характеристик поверхностных волн [12] это приводит к тому, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1, являющейся волной типа Стоунли, в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется, преимущественно, в приконтактных областях

как упругого слоя, так и жидкости. Мода 2 распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Скорость ее стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955317$ ) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ . При этом с увеличением толщины, как известно [1], в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, то есть движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще.

Из графиков, представленных на рис. 1, б и 2, б, непосредственно следует, что влияние вязкой жидкости на параметры волнового процесса наибольшее в окрестности частот зарождения квазилэмбовских мод. С увеличением толщины упругого слоя воздействие вязкости на значения фазовых скоростей всех мод (кроме первой) уменьшается. Анализ рис. 2, а и 2, б показывает, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения квазилэмбовских мод и смещение их дисперсионных кривых. Нетрудно видеть, что начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) обуславливает сдвиг критических частот и дисперсионных кривых (сплошные линии) в коротковолновую часть спектра.

Из рис. 2, б, следует, что начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) приводит к смещению кривых (сплошные линии), отражающих зависимости коэффициентов затухания мод от толщины, в коротковолновую часть спектра. Как уже упоминалось, движения в модах, распространяющихся в упругом слое, начиная с третьей, с возрастанием толщины удаляются от его поверхностей и локализуются в его толще. Следствием этого является уменьшение влияния вязкости жидкости на эти моды в коротковолновой части спектра. При этом значения коэффициентов затухания высших мод с ростом толщины независимо от предварительных деформаций стремятся к нулю. Этим также объясняется уменьшение влияния начальных деформаций на их коэффициенты затухания.

**Локализация низших мод в гидроупругом волноводе.** Проведенный выше анализ показывает, что в упруго-жидкостной системе с упругим слоем из податливого материала при  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$  низшая мода проникает в твердое тело и так же, как и моды высокого порядка, распространяется в упругом слое. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

**Влияние вязкости жидкости на фазовые скорости и дисперсию квазилэмбовских мод в гидроупругом волноводе.** Графики, приведенные на рис. 1, б и 2, б, отражают особенности взаимодействия волновых движений в упругом слое с вязким жидким полупространством. Как уже упоминалось, движения в модах, распространяющихся в упругом слое, начиная с третьей, с возрастанием толщины удаляются от поверхностей и локализуются в его толще. Это является основным фактором, приводящим к ослаблению влияния вязкости жидкости на фазовые скорости и к уменьшению значений коэффициентов затухания этих мод. В противоположность модам высокого порядка движения в моде 1 с возрастанием толщины устремляются к границе раздела сред. Мода 1 становится квазиповерхностной волной типа Стоунли. Этим объясняется характер влияния вязкости жидкости, проявляющийся в уменьшении величин фазовых скоростей и увеличением коэффициентов затухания этой моды. Движения в квазиповерхностной моде 2 (волна типа Рэлея) с ростом толщины, распространяясь в упругом слое, устремляются к свободной поверхности слоя. Этим обусловлено

уменьшение влияния вязкости жидкости на кинематические характеристики этой моды в высокочастотной части спектра.

Кроме того, анализ также показывает, что в тех точках мод, где преобладающими являются движения (сдвиговые смещения) на границе раздела сред, влияние вязкости наибольшее и коэффициенты затухания, а также относительные изменения величин фазовых скоростей принимают максимальное значение. В точках волны с малыми поверхностными сдвиговыми смещениями соответственно и влияние вязкости наименьшее. Как видно из рис. 1, б, вязкость жидкого полупространства вызывает изменение критических частот мод и смещение их дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра. Это приводит к значительному изменению фазовых скоростей мод в окрестности величин толщин, при которых они зарождаются. Для системы с податливым упругим слоем, рассматриваемым в работе, имеет место соотношение  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ . В этом случае (см. рис. 1, б) идеальная жидкость не препятствует энергетическому обмену между поверхностями податливого упругого слоя, что способствует возникновению в гидроупругой системе квазилэмбовских волн, распространяющихся без демпфирования. При взаимодействии упругого слоя из податливого материала с вязким жидким полупространством (рис. 2, б) в гидроупругой системе возникают квазилэмбовские волны, распространяющиеся с затуханием.

**Особенности влияния конечных начальных деформаций на свойства квазилэмбовских волн в гидроупругом волноводе.** Как показано в работе [8], в упругом слое, невзаимодействующем с жидкостью, начальные растяжения вызывают изменение частот зарождения мод и смещение их дисперсионных кривых. Это приводит к тому, что в окрестности критических частот величины фазовых скоростей мод Лэмба в предварительно деформированном слое могут быть как меньше, так и больше фазовых скоростей соответствующих мод в теле без начальных напряжений. Этим обусловлено появление в спектре упругого волновода частот (толщин), при которых начальные напряжения не влияют на фазовые скорости ряда нормальных волн Лэмба. Отметим, что эта, качественно новая закономерность, отсутствующая в случае распространения волн в неограниченных и полуограниченных телах, впервые была обнаружена и описана в работе [8] для сжимаемого упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью.

Из графиков, приведенных на рис. 2, а, для гидроупругой системы с несжимаемым упругим слоем (податливый материал) следует, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения квазилэмбовских мод и смещение их дисперсионных кривых. Как уже отмечалось, начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) приводит к сдвигу критических частот, дисперсионных кривых (сплошные линии на рис. 2, а) и кривых зависимостей коэффициентов затухания (сплошные линии на рис. 2, б) в коротковолновую часть спектра. Из графиков этого рисунка также видно, что сплошные и штриховые линии, отвечающие дисперсионным кривым ряда мод, пересекаются. Это свидетельствует о том, что для всех квазилэмбовских мод, кроме первой, существуют упругие слои определенных толщин  $\bar{h}$ , при которых фазовые скорости  $\bar{c}$  не зависят от начального сжатия ( $\lambda_1 = 0,8$ ). По-видимому, эта закономерность, как уже отмечалось ранее, впервые выявленная для сжимаемых тел и описанная в работе [8], имеет более общий характер и присуща частотным спектрам упругих волноводов не только из разных материалов (сжимаемые и несжимаемые), но и гидроупругим волноводам. Из графиков рис. 2, б также видно, что для мод 1–5 существуют толщи-

ны упругого слоя, при которых величины коэффициентов затухания этих мод не зависят от начального сжатия. Как ранее указывалось, в этой упруго-жидкостной системе низшие моды проникают в твердое тело и так же, как и моды высокого порядка, распространяются в упругом слое. Этим объясняется влияние начальных напряжений на фазовые скорости всех мод.

Таким образом, анализ показывает, что в упруго-жидкостной системе резина (податливый материал) — вода при  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$  в высокочастотной части спектра низшая мода частично проникает в твердое тело и так же, как и моды высокого порядка, распространяется в упругом слое. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

Предложенный подход и полученные результаты позволяют для волновых процессов установить пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций, классической теории упругости, а также модели идеальной жидкости.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.
2. Guz A. N., Zhuk A. P., Bagno A. M. Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, № 5. С. 449–507.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: 2 части. Saarbrücken: LAP, 2016.
4. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
5. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. 428 p.
6. Гузь А.Н. Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. Saarbrücken: LAP, 2017. 244 с.
7. Guz A. N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1980. **16**, № 3. С. 175–190.
8. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1976. 104 с.
9. Babich S.Y., Guz A.N., Zhuk A.P. Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1979. **15**, № 4. С. 277–291.
10. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями. *Прикл. механика*. 1980. **16**, № 1. С. 113–116.
11. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 272 с.
12. Волькенштейн М.М., Левин В.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела. *Акуст. журн.* 1988. **34**, № 4. С. 608–615.

Поступило в редакцию 04.05.2018

#### REFERENCES

1. Viktorov, I. A. (1981). Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Bagno, A. M. (2016). Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.*, 52, No 5, pp. 449-507.
3. Guz, A. N. (2016). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. 2 parts. Saarbrücken: LAP (in Russian).
4. Guz, A. N. (1998). Dynamics of compressible viscous fluid. Kyiv: A.C.K. (in Russian).
5. Guz, A. N. (2009). Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
6. Guz, A. N. (2017). Introduction to dynamics of compressible viscous fluid. Saarbrücken: LAP (in Russian).
7. Guz, A. N. (1980). Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 16, No. 3, pp. 175-190.
8. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Makhort, F. G. (1976). Waves in layer with initial stresses. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
9. Babich, S. Y., Guz, A. N. & Zhuk, A. P. (1979). Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 15, No. 4, pp. 277-291.
10. Zhuk, A. P. (1980). Stoneley wave in a medium with initial stresses. *J. Appl. Mech.*, 16, No. 1, pp. 113-116 (in Russian).

11. Guz, A. N. (1973). Stability of elastic bodies under finite deformations. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
12. Volkenstein, M. M. & Levin, V. M. (1988). Structure of Stoneley wave on the boundary of a viscous liquid and a solid. *Acoustic J.*, 34, No. 4, pp. 608-615 (in Russian).

Received 04.05.2018

О.М. Гузь, О.М. Багно

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

#### ПРО ВПЛИВ СКІНЧЕННИХ ПОЧАТКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ НА ФАЗОВІ ШВИДКОСТІ КВАЗІЛЕМБОВСЬКИХ ХВИЛЬ У НЕСТИСЛИВОМУ ПРУЖНОМУ ШАРІ, ЩО КОНТАКТУЄ З ПІВПРОСТОРОМ В'ЯЗКОЇ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ

Розглянуто задачу про поширення квазілембовських хвиль у попередньо деформованому нестисливому пружному шарі, що взаємодіє з півпростором в'язкої стисливої рідини. Дослідження проведено на основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінчених деформацій для нестисливого пружного шару та тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є—Стокса для півпростору стисливої в'язкої рідини. Застосовано постановку задачі та підхід, засновані на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружного тіла та рідини. Отримано дисперсійне рівняння, яке описує поширення нормальних хвиль у гідропружній системі. Побудовано дисперсійні криві квазілембовських хвиль в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив скінчених початкових деформацій в пружному шарі, товщини пружного шару та півпростору стисливої в'язкої рідини на фазові швидкості, коефіцієнти загасання та дисперсію квазілембовських мод. Показано, що вплив початкових деформацій пружного шару на параметри хвильового процесу пов'язаний з властивостями локалізації хвиль. Розвинутий підхід і отримані результати дозволяють встановити для хвильових процесів межі застосування моделей, заснованих на різних варіантах теорії малих початкових деформацій, класичній теорії пружності для твердих тіл, а також моделі ідеальної рідини. Чисельні результати представлені у вигляді графіків і дано їх аналіз.

**Ключові слова:** дисперсія хвиль, квазілембовські моди, нестисливий пружний шар, півпростір в'язкої стисливої рідини, початкові деформації.

A.N. Guz, A.M. Bagno

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

#### ON THE INFLUENCE OF FINITE INITIAL DEFORMATIONS ON THE PHASE VELOCITIES OF QUASI-LAMB WAVES IN THE INCOMPRESSIBLE ELASTIC LAYER INTERACTING WITH THE HALF-SPACE OF A VISCOUS COMPRESSIBLE FLUID

The problem of the propagation of quasi-Lamb waves in a pre-deformed incompressible elastic layer that interacts with the half-space of a viscous compressible fluid is considered. The study is conducted on the basis of the three-dimensional linearized equations of elasticity theory of finite deformations for the incompressible elastic layer and on the basis of the three-dimensional linearized Navier—Stokes equations for the half-space of a viscous compressible fluid. The problem formulation and the approach, which are based on the utilization of representations of the general solutions of the linearized equations for an elastic solid and a fluid are applied. A dispersion equation, which describes the propagation of normal waves in the hydroelastic system is obtained. The dispersion curves for quasi-Lamb waves over a wide range of frequencies are constructed. The effect of the finite initial deformations in an elastic layer, the thickness of the elastic layer, and the half-space of viscous compressible fluid on the phase velocities, attenuation coefficients, and dispersion of quasi-Lamb modes are analyzed. It is shown that the influence of initial deformations of the elastic layer on the wave process parameters is associated with the localization properties of waves. The approach developed and the results obtained make it possible to establish the limits of applicability of the models, based on different versions of the theory of small initial deformations and the classical elasticity theory for solid bodies, as well the model of an ideal fluid, for the wave processes. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

**Keywords:** dispersion of waves, quasi-Lamb modes, incompressible elastic layer, half-space of viscous compressible fluid, initial deformations.