https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.009
УДК 51-71+517.983

Я.І. Грушка

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: grushka@imath.kiev.ua

Необхідна і достатня ознака існування точкового часу на орієнтованій множині

Представлено академіком НАН України А.М. Самойленком

Поняття орієнтованої множини є базовим найелементарнішим поняттям теорії мінливих множин. Основною мотивацією для побудови цієї теорії стала шоста проблема Гільберта, тобто проблема математично строгого формулювання основ теоретичної фізики.

У роботі встановлюється необхідна і достатня ознака існування точкового часу на орієнтованій множині, де з інтуїтивної точки зору точковий час — це час, пов'язаний з еволюцією системи, що складається лише з одного фіксованого об'єкта (наприклад, з однієї матеріальної точки). Зокрема, доведено, що точковий час існує на орієнтованій множині тоді і тільки тоді, коли ця орієнтована множина є квазіланцюговою. Також з використанням отриманого результату розв'язано проблему опису найрізноманітніших образів лінійно упорядкованих множин, яка природно виникає в теорії упорядкованих множин.

Ключові слова: *орієнтовані множини, мінливі множини, час, упорядковані множини.*

1. Вступні зауваження. Поставлена ще в 1900 р. шоста проблема Гільберта (тобто проблема математично строгого формулювання основ теоретичної фізики) на сьогодні залишається дуже актуальною [1]. І саме ця проблема стала мотивацією для побудови теорії мінливих множин, тобто сукупностей об'єктів, які на відміну від елементів звичайних (статичних) множин можуть перебувати в процесі постійних трансформацій (змінювати свої властивості, з'являтися чи зникати, розпадатися на декілька частин чи, навпаки, декілька об'єктів можуть зливатись в один). Крім того, картина еволюції мінливої множини може залежати від способу спостереження, тобто від системи відліку. Проблема побудови математичної теорії мінливих множин із переліченими вище властивостями в різних формах ставилася, зокрема, в роботах [2—6]. На математично строгому рівні теорія мінливих множин була побудована в роботах [7—10] та ін. Найбільш повний і систематичний виклад цієї теорії можна знайти в [11].

Орієнтовані множини є базовим найелементарнішим поняттям теорії мінливих множин, і їх можна трактувати як найпримітивніші абстрактні моделі сукупностей мінливих об'єктів, що еволюціонують у рамках однієї (фіксованої) системи відліку. Орієнтовані множини було введено в роботах [7, 8] (див. також [11, розділ 1]). Крім того, в зазначених роботах було введено поняття часу на орієнтованих множинах, а в роботі [8, теорема 4.1] встановлено достатню ознаку існування точкового часу на таких множинах (див. також [11, теорема 1.3.1]), де з інтуїтивної точки зору точковий час — це час, пов'язаний з еволюцією системи, що складається лише з одного фіксованого об'єкта (наприклад, з однієї матеріальної точки). Підкреслимо, що теорема 4.1 з роботи [8] носить лише достатній характер. У зв'язку з цим в [11, проблема 1.3.1] поставлено проблему встановлення необхідної і достатньої умови існування точкового часу на орієнтованій множині. У даній роботі буде наведено розв'язок поставленої проблеми, а саме вказано ті властивості, які повинна мати орієнтована множина для того, щоб на ній можна було визначити точковий час. З використанням отриманого результату дано розв'язок однієї проблеми, яка природно виникає в теорії упорядкованих множин, а саме проблеми опису найрізноманітніших образів лінійно упорядкованих множин.

2. Про орієнтовані множини та точковий час.

Означення 1. Нехай M — довільна непорожня множина ($M \neq \varnothing$).

Довільне рефлексивне бінарне відношення $\triangleleft$ на M (тобто таке, що $\forall x \in M \; x \triangleleft x$) називатимемо *орієнтацією*, а пару $\mathbf{M} = (M, \triangleleft)$ — *орієнтованою множиною*. При цьому множину M називатимемо *базовою*, або множиною всіх *елементарних станів* орієнтованої множини $\mathbf{M}$, і позначатимемо її через $\mathrm{Bs}(\mathbf{M})$, а відношення $\triangleleft$ називатимемо *напрямним відношенням змін* (*трансформацій*) $\mathbf{M}$ і позначатимемо його через $\underset{\mathbf{M}}{\leftarrow}$. Елементи множини $\mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ називатимемо *елементарними станами* орієнтованої множини $\mathbf{M}$.

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину $\mathbf{M}$ йде мова, в позначенні $\underset{\mathbf{M}}{\leftarrow}$ символ $\mathbf{M}$ будемо опускати, вживаючи позначення "$\leftarrow$". Для елементів $x, y \in \mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ запис $y \leftarrow x$ слід розуміти, як "елементарний стан y є результатом трансформацій, або "трансформаційним нащадком" елементарного стану x ".

Нехай $\mathbf{M}$ — орієнтована множина.

Означення 2. Непорожня підмножина $N \subseteq \mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ називається *транзитивною* в $\mathbf{M}$, якщо для довільних $x, y, z \in N$ з умов $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає умова $z \leftarrow x$.

Транзитивна підмножина $L \subseteq \mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ називається *ланцюгом* в $\mathbf{M}$, якщо для довільних $x, y \in L$ має місце хоч одне із співвідношень $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$.

Орієнтовану множину $\mathbf{M}$ називатимемо *ланцюговою*, якщо вся множина $\mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ є ланцюгом $\mathbf{M}$, тобто якщо відношення $\leftarrow$ є транзитивним на $\mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ і для довільних $x, y \in \mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ виконується хоча б одна з умов: $x \leftarrow y$ або $y \leftarrow x$ (у цьому випадку орієнтована множина $\mathbf{M}$ є лінійно квазіупорядкованою множиною).

Означення 3. Нехай $\mathbf{M}$ — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leqslant)$ — лінійно упорядкована множина. Відображення $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathrm{Bs}(\mathbf{M})}$ називається *часом* на $\mathbf{M}$ (відносно лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}$), якщо виконуються такі умови:

1) для довільного елементарного стану $x \in \mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ існує елемент $t \in \mathbf{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$;

2) якщо $x_1, x_2 \in \mathrm{Bs}(\mathbf{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).

При цьому елементи $t \in \mathbf{T}$ називатимемо *моментами часу*, а пару $\mathrm{H} = (\mathbb{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leqslant), \psi)$ — *хронологізацією* $\mathbf{M}$.

Будемо говорити, що орієнтовану множину $\mathbf{M}$ *можна хронологізувати*, якщо існує хоч одна хронологізація $\mathbf{M}$. Виявляється, що будь-яку орієнтовану множину $\mathbf{M}$ завжди можна хронологізувати. Найпримітивніший спосіб це зробити — взяти лінійно упорядковану множину $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leqslant)$, що містить не менше двох елементів (тобто $\mathbf{card}(\mathbf{T}) \geqslant 2$), і покласти

$$\psi(t) := \mathrm{Bs}(\mathbf{M}), \quad t \in \mathbf{T}.$$

Легко перевірити, що для функції $\psi(\cdot)$ виконуються умови означення 3. Більш нетривіальні способи хронологізації орієнтованих множин розглянуті, зокрема, в роботі [8].

Означення 4. Нехай $\mathbf{M}$ — орієнтована множина і $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leqslant)$ — лінійно упорядкована множина.

1. Час $\psi : \mathbf{T} \to 2^{\mathrm{Bs}(\mathbf{M})}$ називатимемо *квазіточковим*, якщо для довільного $t \in \mathbf{T}$ множина $\psi(t)$ є одноелементною.

2. Час ψ називатимемо *точковим*, якщо виконуються такі умови:

а) час ψ є квазіточковим;

б) для довільних $x_1, x_2 \in \mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ з умов $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 \leqslant t_2$ випливає співвідношення $x_2 \leftarrow x_1$.

Будемо говорити, що орієнтовану множину $\mathbf{M}$ можна хронологізувати квазіточково/точково, якщо існує хоча б одна хронологізація $\mathrm{H} = ((\mathbf{T}, \leqslant), \psi)$ орієнтованої множини $\mathbf{M}$ з квазіточковим / точковим часом ψ відповідно. При цьому хронологізацію H називатимемо квазіточковою / точковою відповідно.

Приклад 1. Розглянемо довільне відображення $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$), де $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ — деяка зв'язна підмножина числової прямої. Таке відображення можна трактувати як рівняння руху деякої матеріальної точки в просторі $\mathbb{R}^d$. Відображення f породжує орієнтовану множину $\mathbf{M}_f = \left(\mathrm{Bs}(\mathbf{M}_f), \underset{\mathbf{M}_f}{\leftarrow}\right)$, де $\mathrm{Bs}(\mathbf{M}_f) = \mathcal{R}(f) = \{f(t) | t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^d$ і для $x, y \in \mathrm{Bs}(\mathbf{M}_f)$ співвідношення $y \underset{\mathbf{M}_f}{\leftarrow} x$ виконується тоді і тільки тоді, коли існують $t_1, t_2 \in I$ такі, що $x = f(t_1)$, $y = f(t_2)$ і $t_1 \leqslant t_2$. Легко перевірити, що нижченаведене відображення є точковим часом на $\mathbf{M}_f$:

$$\psi(t) = \{f(t)\} \subseteq \mathrm{Bs}(\mathbf{M}_f), \quad t \in \mathrm{I}$$

Приклад 1 пояснює зміст терміну “точковий час”. Згідно з означенням 4 довільний точковий час є квазіточковим. Можна навести контрприклади, які показують, що обернене твердження, взагалі кажучи, місця не має.

Теорема 1 (ZF+LO, [8]**).** *Будь-яку орієнтовану множину можна хронологізувати квазіточково.*

Зауваження 1. При доведенні тереми 1 разом із системою аксіом теорії множин Цермело–Френкеля (ZF) використовується принцип лінійної упорядкованості (LO), який стверджує, що будь-яку множину можна лінійно упорядкувати. Очевидно, що зазначений принцип (LO) випливає з теореми Цермело, а отже, з аксіоми вибору (AC). Але, відомо, що цей принцип також випливає і з теореми Тарського про ультрафільтри, будучи логічно слабшим за неї, а отже, і за аксіому вибору [12, с. 17, 18] (про співвідношення між LO і AC див. також [13]).

Теорема 2 ([8]). *Будь-яку ланцюгову орієнтовану множину можна точково хронологізувати.*

Формулювання і доведення теорем 1 і 2 також можна знайти в [11]. Нижченаведений приклад покаже, що не кожна орієнтована множина, яку можна точково хронологізувати, є ланцюговою.

Приклад 2. Розглянемо функцію $\mathbf{f}_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, що задається формулою

$$\mathbf{f}_0(t) = (\cos t, \sin t) \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

Тоді орієнтовану множину $\mathbf{M}_{\mathbf{f}_0}$, побудовану у прикладі 1 на основі визначеної вище функції $\mathbf{f}_0$, можна точково хронологізувати часом $\psi_{\mathbf{f}_0}(t) = \{\mathbf{f}_0(t)\}$ $(t \in [0, 2\pi])$, але водночас орієнтована множина $\mathbf{M}_{\mathbf{f}_0}$ не є ланцюговою, оскільки легко перевірити, що відношення $\underset{\mathbf{M}_{\mathbf{f}_0}}{\leftarrow}$ не є транзитивним на $\mathrm{Bs}(\mathbf{M}_{\mathbf{f}_0})$.

У зв'язку з наведеними фактами виникає така проблема:

Проблема 1. Знайти необхідну і достатню умову існування точкової хронологізації орієнтованої множини.

Зауважимо, що проблема 1 була також поставлена в [11, проблема 1.3.1]. Розв'язання проблеми 1 розглянемо в наступному пункті.

3. Про існування точкового часу на орієнтованих множинах. На довільній орієнтованій множині $\mathbf{M}$ введемо додатково таке бінарне відношення:

для довільних $x, y \in \mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ позначатимемо $y \overset{+}{\underset{\mathbf{M}}{\leftarrow}} x$ тоді і тільки тоді, коли $y \underset{\mathbf{M}}{\leftarrow} x$ і $x \underset{\mathbf{M}}{\not\leftarrow} y$;

у випадках, коли не виникає непорозумінь, замість позначення $y \overset{+}{\underset{\mathbf{M}}{\leftarrow}} x$ використовуватимемо позначення $y \overset{+}{\leftarrow} x$.

Нехай M — довільна множина і $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots, \mathrm{R}_n \subseteq M^2$ $(n \in \mathbb{N})$ — довільні бінарні відношення на M. Для довільних $x_0, \ldots, x_n \in M$ використовуватимемо скорочене позначення

$$x_0 \mathrm{R}_1 x_1 \mathrm{R}_2 x_2 \ldots x_{n-1} \mathrm{R}_n x_n$$

для позначення того факту, що $(x_0 \mathrm{R}_1 x_1) \& (x_1 \mathrm{R}_2 x_2) \& \ldots \& (x_{n-1} \mathrm{R}_n x_n)$.

Означення 5. Орієнтовану множину $\mathbf{M}$ називатимемо *квазіланцюговою*, якщо виконуються такі умови:

(QL1) для довільних $x_1, x_2 \in \mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ має місце хоча б одне із співвідношень $x_2 \leftarrow x_1$ або $x_1 \leftarrow x_2$;

(QL2) Для довільних $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ з умови $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_2 \leftarrow x_1 \overset{+}{\leftarrow} x_0$ випливає співвідношення $x_3 \overset{+}{\leftarrow} x_0$ (квазітранзитивність).

Зауваження 2. Неважко довести, що із транзитивності бінарного відношення $\leftarrow$ на орієнтованій множині $\mathbf{M}$ випливає його квазітранзитивність. Тому кожна ланцюгова орієнтована множина є квазіланцюговою. Використовуючи приклад 2 можна довести, що обернене твердження, взагалі кажучи, місця не має. Тобто не кожна квазіланцюгова орієнтована множина є ланцюговою.

Основним результатом цієї роботи є така теорема.

Теорема 3 (ZF+AC). Для того щоб орієнтовану множину $\mathbf{M}$ можна було точково хронологізувати, необхідно і достатньо, щоб вона була квазіланцюговою.

Зауваження 3. Доведення необхідності для теореми 3 не потребує аксіоми вибору (AC). Аксіому вибору потребує саме доведення достатності умови, вказаної в теоремі 3.

4. Про образи лінійно упорядкованих множин. У цьому пункті буде виведено один цікавий наслідок теореми 3 в теорії упорядкованих множин, а саме: буде отримано опис орієнтованих множин, які є образами лінійно упорядкованих множин. Спочатку сформулюємо означення образу орієнтованої множини.

Нехай $\mathbf{M}$ — орієнтована множина і $\mathbf{U}:\mathrm{Bs}(\mathbf{M})\to X$ — відображення з $\mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ в X. На множині $M_1=\mathbf{U}[\mathrm{Bs}(\mathbf{M})]=\mathcal{R}(\mathbf{U})$ введемо бінарне відношення $\leftarrow_{(1)}$ за правилом:

Для $\tilde{x},\tilde{y}\in M_1$ вважатимемо, що $\tilde{y}\leftarrow_{(1)}\tilde{x}$ тоді і тільки тоді, коли існують $x,y\in\mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ такі, що $\tilde{x}=\mathbf{U}(x)$, $\tilde{y}=\mathbf{U}(y)$ і $y\leftarrow x$.

Неважко перевірити, що упорядкована пара $\mathbf{M}_1=(M_1,\leftarrow_{(1)})$ є орієнтованою множиною, причому $\mathrm{Bs}(\mathbf{M}_1)=M_1$ і $\underset{\mathbf{M}_1}{\leftarrow}=\leftarrow_{(1)}$.

Означення 6. Орієнтована множина $\mathbf{M}_1$ називається *образом* орієнтованої множини $\mathbf{M}$ при відображенні $\mathbf{U}:\mathrm{Bs}(\mathbf{M})\to X$, якщо:

1) $\mathrm{Bs}(\mathbf{M}_1)=\mathbf{U}[\mathrm{Bs}(\mathbf{M})]=\mathcal{R}(\mathbf{U})$;

2) Для $\tilde{x},\tilde{y}\in\mathrm{Bs}(\mathbf{M}_1)$ співвідношення $\tilde{y}\underset{\mathbf{M}_1}{\leftarrow}\tilde{x}$ виконується тоді і тільки тоді, коли існують $x,y\in\mathrm{Bs}(\mathbf{M})$ такі, що $\tilde{x}=\mathbf{U}(x)$, $\tilde{y}=\mathbf{U}(y)$ і $y\underset{\mathbf{M}}{\leftarrow}x$.

Очевидно, що для довільного відображення $\mathbf{U}:\mathrm{Bs}(\mathbf{M})\to X$ існує, причому єдиний, образ при відображенні $\mathbf{U}$. Образ орієнтованої множини $\mathbf{M}$ при відображенні $\mathbf{U}:\mathrm{Bs}(\mathbf{M})\to X$ позначатимемо через $\mathbf{U}[[\mathbf{M}]]$.

Легко бачити, що довільна лінійно упорядкована множина $\mathbb{T}=(\mathbf{T},\leqslant)$ є орієнтованою множиною, причому

$$\mathrm{Bs}(\mathbb{T})=\mathbf{T},\quad \underset{\mathbb{T}}{\leftarrow}=\leqslant$$

Отже, можна говорити про образ лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}=(\mathbf{T},\leqslant)$ при відображенні $\mathbf{U}:\mathbf{T}\to X$. Причому образ лінійно упорядкованої множини $\mathbb{T}$ є орієнтована множина $\mathbf{U}[[\mathbb{T}]]$. У зв'язку з цим природним чином виникає така проблема:

Проблема 2. Чи будь-яка орієнтована множина може бути образом лінійно упорядкованої множини? Якщо ні, то описати всі орієнтовані множини, які можна подати у вигляді образу деякої лінійно упорядкованої множини.

Ключ до розв'язання проблеми 2 дає таке твердження (у справедливості якого неважко переконатися).

Твердження 1. *Орієнтовану множину* $\mathbf{M}$ *можна подати у вигляді образу деякої лінійно упорядкованої множини тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{M}$ *можна точково хронологізувати.*

З твердження 1 і теореми 3 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Орієнтовану множину* $\mathbf{M}$ *можна подати у вигляді образу деякої лінійно упорядкованої множини тоді і тільки тоді, коли ця орієнтована множина є квазіланцюговою.*

Робота частково підтримана бюджетною програмою "Підтримка розвитку приорітетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК № 6541230).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Gorban A.N. Hilbert's sixth problem: the endless road to rigour. Philos. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci. 2018. **376**, № 2118. 20170238. https://doi.org/10.1098/rsta.2017.0238
2. Левич А.П. Методологические трудности на пути к пониманию феномена времени: нужны новые сущности, формальные средства и критерии понимания. *Время конца времен. Время и вечность в современной культуре*. Москва : Московско-Петербургский философский клуб, 2009. С. 66—88.
3. Levich A.P. Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows. *On the way to understanding the time phenomenon: the constructions of time in natural science. Part 1. Interdisciplinary time studies*. Singapore: World Scientific, 1995. P. 149—192.
4. Левич А.П. Моделирование “динамических множеств”. *Необратимые процессы в природе и технике:* Материалы V Всерос. конф. (Москва, 26—28 янв. 2009). Москва, 2009. С. 43—46.
5. Barr M., Mclarty C., Wells C. Variable Set Theory. URL: http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/vst.pdf. (Дата звернення 11.06.2019)
6. Bell J.L. Abstract and variable sets in category theory. What is Category Theory? Monza: Polimetrica, 2006. P. 9—16.
7. Грушка Я.І. Мінливі множини та їх властивості. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2012. № 5. С. 12—18.
8. Грушка Я.І. Примітивні мінливі множини та їх властивості. *Математичний вісник НТШ*. 2012. **9**. С. 52—80.
9. Грушка Я.І. Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем. *Укр. мат. журн*. 2013. **65**, № 9. С. 1198—1218. https://doi.org/10.1007/s11253-014-0862-6
10. Грушка Я.І. Видимість у мінливих множинах. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2012. **9**, № 2. С. 122—145.
11. Grushka Ya.I. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). Preprint: viXra: 1701.0523v2. 2017. 208 p. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521
12. Herrlich H. Axiom of Choice. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. 198 p. https://doi.org/10.1007/11601562
13. Pincus D. The dense linear ordering principle. *J. Symb. Log*. 1997. **62**, № 2. P. 438—456. https://doi.org/10.2307/2275540

Надійшло до редакції 11.06.2019

REFERENCES

1. Gorban, A. N. (2018). Hilberts sixth problem: the endless road to rigour. Philos. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci., 376, No. 2118, 20170238. https://doi.org/10.1098/rsta.2017.0238
2. Levich, A. P. (2009). Methodological difficulties in the way to understanding the phenomenon of time: new essences, formal means and criteria of understanding are needed. Time of the end of time. Time and eternity in modern culture (pp. 66-88). Moscow: Moscow-Petersburg Philosophical Club (in Russian).
3. Levich, A. P. (1995). Time as variability of natural systems: ways of quantitative description of changes and creation of changes by substantial flows. On the way to understanding the time phenomenon: the constructions of time in natural science. Part 1. Interdisciplinary time studies (pp. 149-192). Singapore: World Scientific.
4. Levich, A. P. (2009, January). Modeling of “dynamic sets”. Proceedings of the 5th All-Russian conference Irreversible processes in nature and technique (pp. 43-46), Moscow (in Russian).
5. Barr, M., Mclarty, C. & Wells, C. (1986). Variable Set Theory. Cite Seer^x. Retrieved from: http://www.math.mcgill.ca/barr/papers/vst.pdf
6. Bell, J. L. (2006). Abstract and variable sets in category theory. What is Category Theory? (pp. 9-16). Monza: Polimetrica.
7. Grushka, Ya. I. (2012). Changeable sets and their properties. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 5, pp. 12-18. (in Ukrainian).
8. Grushka, Ya. I. (2012). Primitive changeable sets and their properties. Bull. Shevchenko Sci. Soc., 9, pp. 52-80 (in Ukrainian).
9. Grushka, Ya. I. (2013). Base changeable sets and mathematical simulation of the evolution of systems. Ukr. Math. J., 65, No. 9, pp. 1198-1218 (in Ukrainian). https://doi.org/10.1007/s11253-014-0862-6
10. Grushka, Ya. I. (2012). Visibility in changeable sets. Transactions of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 9, No. 2, pp. 122-145 (in Ukrainian).

11. Grushka, Ya. I. (2017). Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). Preprint: viXra: 1701.0523v2. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521
12. Herrlich, H. (2006). Axiom of Choice. Berlin, Heidelberg: Springer. doi: https://doi.org/10.1007/11601562
13. Pincus, D. (1997). The dense linear ordering principle. J. Symb. Log., 62, No. 2, pp. 438-456. https://doi.org/10.2307/2275540

Received 11.06.2019

Я.И. Грушка

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: grushka@imath.kiev.ua

НЕОБХОДИМЫЙ И ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК СУЩЕСТВОВАНИЯ ТОЧЕЧНОГО ВРЕМЕНИ НА ОРИЕНТИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Понятие ориентированного множества является базовым элементарнейшим понятием теории изменчивых множеств. Основной мотивацией для построения этой теории послужила шестая проблема Гильберта, то есть проблема математически строгой формулировки основ теоретической физики.

В работе устанавливается необходимый и достаточный признак существования точечного времени на ориентированном множестве, где с интуитивной точки зрения точечное время — это время, связанное с эволюцией системы, состоящей только из одного фиксированного объекта (например, с одной материальной точки). В частности, доказано, что точечное время существует на ориентированном множестве тогда и только тогда, когда это ориентированное множество является квазицепным. Также с использованием полученного результата решена проблема описания всевозможных образов линейно упорядоченных множеств, которая естественно возникает в теории упорядоченных множеств.

Ключевые слова: *ориентированные множества, изменчивые множества, время, упорядоченные множества.*

Ya.I. Grushka

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: grushka@imath.kiev.ua

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR THE EXISTENCE OF THE ONE-POINT TIME ON AN ORIENTED SET

The subject of this article is closely related to the theory of changeable sets. The mathematically rigorous theory of changeable sets was constructed in 2012. From an intuitive point of view, the changeable sets are sets of objects which, unlike elements of ordinary (static) sets, can be in the process of continuous transformations, i.e., they can change their properties, appear or disappear, and disintegrate into several parts or, conversely, several objects can merge into a single one. In addition, the picture of the evolution of a changeable set can depend on the method of observation (that is, on the reference frame). The main motivation for the introduction of changeable sets was the sixth Hilbert problem, that is, the problem of mathematically rigorous formulation of the fundamentals of theoretical physics.

The notion of oriented set is the basic elementary concept of the theory of changeable sets. Oriented sets can be interpreted as the most primitive abstract models of sets of changing objects that evolve within a single (fixed) reference frame. The oriented sets are mathematical objects, in the framework of which one can give the mathematically rigorous definition of the concept of time as a certain mapping from a certain time scale, represented by a linearly ordered set, into the set of simultaneous states of the oriented set.

In this paper, the necessary and sufficient condition of the existence of the one-point time on an oriented set is established. From the intuitive point of view, the one-point time is the time associated with the evolution of a system consisting of only one object (for example, one material point). Namely, the concept of a quasichain oriented set is introduced, and it is proved that the one-point time exists on the oriented set, if and only if this oriented set is a quasichain. Using the obtained result, the problem of describing all possible images of linearly ordered sets is solved. This problem naturally arises in the theory of ordered sets.

Keywords: *oriented sets, changeable sets, time, ordered sets.*