https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.025
УДК 539.3

П.З. Луговой, Ю.В. Скосаренко, С.П. Орленко

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: plugovyy@inmech.kiev.ua

Применение метода сплайн-коллокации для решения задач статики и динамики конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек

Представлено академиком НАН Украины В.Д. Кубенко

Метод сплайн-коллокации, в отличие от использования двойных тригонометрических рядов для аппроксимации перемещений точек срединной поверхности оболочки, позволяет существенно расширить класс решаемых прикладных задач, а в некоторых случаях получить более точные численные результаты. Например, уменьшение шага сетки по длине оболочки в местах ее подкрепления кольцевыми ребрами или расположения сосредоточенных масс приводит к уменьшению порядка разрешающей системы алгебраических уравнений при той же точности получаемых результатов. Возможность изменять граничные условия на поперечных кромках оболочки позволяет оценить их влияние на характеристики напряженно-деформированного состояния. Отметим, что ранее метод сплайн-коллокации преимущественно использовался для исследования напряженно-деформированного состояния оболочек с медленно изменяющимися жесткостными и геометрическими параметрами вдоль координаты, по которой используется сплайн-аппроксимация решения. Здесь этот метод применяется для оболочек с существенно неоднородной структурой. В методике расчета статического и динамического напряженно-деформированного состояния и собственных частот ребристых многослойных ортотропных цилиндрических оболочек с присоединенными массами на основе метода сплайн-коллокации и метода разложения решения по формам собственных колебаний, на известном примере выполнена апробация решения. На численных примерах исследована практическая сходимсть перемещений, усилий и моментов в зависимости от числа точек коллокации. Следует отметить, что в основу решения задачи положена теория оболочек и стержней, основанная на сдвиговой модели С.П. Тимошенко. Изложенная методика исследования задач статики и динамики цилиндрических замкнутых многослойных оболочек с конструктивными и технологическими особенностями (ребра жесткости, присоединенные сосредоточенные массы) при произвольных граничных условиях реализована с помощью разработанного программного обеспечения.

Ключевые слова: *цилиндрическая оболочка, подкрепляющие ребра, присоединенные массы, напряженно-деформированное состояние, сплайн-коллокация, сплайн-апроксимация*

1. Постановка задачи. Основные уравнения. Ниже рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния и собственных колебаний замкнутой многослойной ребристой цилиндрической оболочки, подверженной действию статических внешних усилий, симметричных относительно начала кольцевой координаты. Принято, что система продольных подкрепляющих ребер регулярна. Кольцевые ребра имеют постоянное поперечное сечение, которое может изменяться от ребра к ребру. На сосредоточенные массы также накладывается условие симметрии относительно начала кольцевой координаты.

В основу решения задачи положена теория оболочек и стержней, основанная на сдвиговой модели Тимошенко [4] и энергетический метод. Полную потенциальную энергию рассматриваемой упругой системы в отклоненном состоянии и кинетическую энергию представляем в виде

$$U = U_o + U_1 + U_2 + A_o, \tag{1}$$

$$V = V_o + V_1 + V_2 + V_m, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} U_o = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}\Bigg[& C_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2 + 2\bar{K}_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\xi} + \bar{D}_{11}\left(\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\xi}\right)^2 + C_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right)^2 + \\ & +2\bar{K}_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right)\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\theta} + \bar{D}_{22}\left(\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\theta}\right)^2 + 2C_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right) + 2\bar{K}_{12}\left[\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\theta} + \left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right)\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\xi}\right] + \\ & +2\bar{D}_{12}\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\theta} + C_{66}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 + 2\bar{K}_{66}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right) + \\ & +\bar{D}_{66}\left(\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\theta}\right)^2 + C_{13}\left(\bar{\psi}_1 - \frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2 + C_{23}\left(\bar{\psi}_2 - \frac{\partial w}{\partial\theta}+v\right)^2\Bigg] d\xi d\theta; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} U_1 = \frac{1}{2}\sum_{i_1=1}^{k_1}\int_0^{L/r}\Bigg[& \frac{E_{i_1}F_{i_1}}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\bar{h}_{i_1}\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{E_{i_1}I_{i_1\theta}}{r^3}\left(\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\xi}\right)^2 + \\ & +\frac{G_{i_1kr}I_{i_1kr}}{r^3}\left(\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{\lambda_{i_1}G_{i_1}F_{i_1}}{r}\left(\bar{\psi}_1 - \frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2\Bigg] d\xi\Big|_{\theta=\theta_{i_1}}; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} U_{i_2} = \frac{1}{2}\sum_{i_2=1}^{k_2}\int_0^{2\pi}\Bigg\{ & \frac{E_{i_2}F_{i_2}}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+\bar{h}_{i_2}\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\theta}+w\right)^2 + \frac{E_{i_2}I_{i_2\xi}}{r^4}\left(\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\theta}\right)^2 + \\ & +\frac{G_{i_2kr}I_{i_2kr}}{r^3}\left(\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{\lambda_{i_2}G_{i_2}F_{i_2}}{r}\left[(1+\bar{h}_{i_2})\bar{\psi}_2 - \frac{\partial w}{\partial\theta}+v\right]^2\Bigg\} d\theta\Big|_{\xi=\xi_{i_2}}; \end{aligned} \tag{5}$$

$$A_o = \int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}(q_1u+q_2v+q_3w)r^2 d\xi d\theta + \int_0^{2\pi}(T_1u+Sv+Q_1w+M_1\psi_1)r d\theta\Big|_0^{L/r}; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} V_o = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}\Bigg\{ & C_\rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] + \\ & +\bar{K}_\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial t}\right) + \bar{D}_\rho\left[\left(\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial t}\right)^2\right]\Bigg\} r^2 d\xi d\theta; \end{aligned} \tag{7}$$

$$V_1 = \frac{1}{2}\sum_{i_1=1}^{k_1} \rho_{i_1} \int_0^{L/r} \left\{ rF_{i_1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{h}_{i_1} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{I_{i_1\theta}}{r} \left(\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{I_{i_1kr}}{r} \left(\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 \right\} \Bigg|_{\theta=\theta_{i_1}} d\xi. \tag{8}$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\sum_{i_2=1}^{k_2} \rho_{i_2} \int_0^{2\pi} \left\{ rF_{i_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{h}_{i_2} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{h}_{i_2} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{I_{i_2kr}}{r} \left(\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{I_{i_2\xi}}{r} \left(\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 \right\} \Bigg|_{\xi=\xi_{i_2}} d\theta\,; \tag{9}$$

$$V_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_m} \mathfrak{M}_j \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{l}_j \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{l}_j \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \Bigg|_{\xi=\xi_j} \Bigg|_{\theta=\theta_j} . \tag{10}$$

Здесь U_o, U_1, U_2 — потенциальная энергия обшивки, продольных и кольцевых ребер; V_o, V_1, V_2, V_m — кинетическая энергия обшивки, продольных, кольцевых ребер и присоединенных сосредоточенных масс; A_o — работа внешних сил, приложенных к оболочке; $C_{ij}, K_{ij} = r\bar{K}_{ij}$, $D_{ij} = r^2\bar{D}_{ij}$ — приведенные коэффициенты жесткости слоистой оболочки, определяемые по формулам из [1]; $C_\rho, K_\rho = r\bar{K}_\rho$, $D_\rho = r^2\bar{D}_\rho$ — приведенные характеристики плотности слоистой оболочки [1]; $u, v, w, \psi_1 = \bar{\psi}_1 / r$, $\psi_2 = \bar{\psi}_2 / r$ — осевое, окружное и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки, а также полные углы поворота поперечного сечения вокруг кольцевой и продольной координат соответственно; $\xi = x / r$, $\theta = y / r$ — безразмерные продольная и кольцевая координаты; t — время; r, L — радиус и длина оболочки; k_1, k_2, k_m — число продольных, кольцевых ребер и присоединенных масс; $E_{i_1}, G_{i_1kr}, G_{i_1}$, $\lambda_{i_1}, \rho_{i_1}, E_{i_2}, G_{i_2kr}, G_{i_2}, \lambda_{i_2}, \rho_{i_2}$ — модули упругости при растяжении, кручении и сдвиге, коэффициент формы поперечного сечения, плотность i_1-го продольного ребра и i_2-го кольцевого ребра; $F_{i_1}, h_{i_1} = r\bar{h}_{i_1}, I_{i_1\theta}, I_{i_1kr}, \theta_{i_1}, F_{i_2}, h_{i_2} = r\bar{h}_{i_2}, I_{i_2\theta}, I_{i_2kr}, \xi_{i_2}$ — площадь поперечного сечения, эксцентриситет, момент инерции поперечного сечения относительно соответствующей координатной линии, момент инерции при кручении, координата линии контакта i_1-го продольного ребра и i_2-го кольцевого ребра соответственно; $\mathfrak{M}_j, l = r\bar{l}_j, \xi_j, \theta_j$ — величина массы, длина консоли, продольная и кольцевая координаты j-ой присоединенной массы; q_1, q_2, q_3, T_1, S, Q_1, M_1 — компоненты внешней нагрузки, действующие на поверхность и торцы оболочки.

Отметим, что выражения для энергий (3) — (10) приведены в перемещениях точек срединной поверхности оболочки. При их выводе использовались соотношения связи между перемещениями точек осей ребер, центра тяжести масс и перемещениями точек срединной поверхности, аналогичные формулам, данным ранее в работах [2, 3, 5].

Уравнения движения рассматриваемой упругой системы могут быть получены, исходя из принципа стационарности действия [2], согласно которому

$$\delta W = 0\,, \quad \left(W = \int_{t_1}^{t_2} (V - U)\, dt \text{ — действие по Гамильтону} \right). \tag{11}$$

Подставив в (11) выражения (1) — (10), для любого фиксированного момента времени получим следующую систему разрешающих уравнений:

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}\Bigg\{C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+(C_{12}+C_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\theta}+C_{12}\frac{\partial w}{\partial\xi}+\bar K_{11}\frac{\partial^2\bar\psi_1}{\partial\xi^2}+\bar K_{66}\frac{\partial^2\bar\psi_1}{\partial\theta^2}+(\bar K_{12}+\bar K_{66})\frac{\partial^2\bar\psi_2}{\partial\xi\partial\theta}\Bigg\}\times$$

$$\times\delta u d\theta d\xi-\sum_{i_1=1}^{k_1}\int_0^{2\pi}[\frac{E_{i_1}F}{r}\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{E_{i_1}F_{i_1}\bar h_{i_1}}{r}\frac{\partial^2\bar\psi_1}{\partial\xi^2}]\delta u d\xi\Big|_{\theta=\theta_{i_1}}+\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}\Bigg(r^2C_\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+rK_\rho\frac{\partial^2\bar\psi_1}{\partial t^2}\Bigg)\times$$

$$\times\delta u d\xi d\theta+\sum_{i_1=1}^{k_1}\rho_{i_1}F_{i_1}r\int_0^{L/r}\Bigg(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\bar h_{i_1}\frac{\partial^2\bar\psi_1}{\partial t^2}\Bigg)a_\xi\delta u d\xi\Big|_{\theta=\theta_{i_1}}+\sum_{i_2=1}^{k_2}\rho_{i_2}F_{i_2}r\int_0^{2\pi}\Bigg(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\bar h_{i_2}\frac{\partial^2\bar\psi_1}{\partial t^2}\Bigg)\times$$

$$\times b_\xi\delta u\Big|_{\xi=\xi_{i_2}}d\theta+\sum_{j=1}^{k_m}\mathfrak{M}_j\Bigg(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\bar l_j\frac{\partial^2\bar\psi_1}{\partial t^2}\Bigg)\delta u\Big|_{\xi=\xi_j}\Big|_{\theta=\theta_j}=-\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}q_1r^2\delta u d\xi d\theta;$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}\Bigg[(C_{66}+C_{12})\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\theta}+C_{66}\frac{\partial^2v}{\partial\xi^2}+C_{22}\frac{\partial^2v}{\partial\theta^2}-C_{23}v+(C_{22}+C_{23})\frac{\partial w}{\partial\theta}+(K_{66}+K_{12})\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\xi\partial\theta}+$$

$$+K_{66}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\xi^2}+K_{22}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\theta^2}-C_{23}r\psi_2\Bigg]\delta v d\theta d\xi-\sum_{i_2=1}^{k_2}\int_0^{2\pi}\Bigg\{\frac{E_{i_2}F_{i_2}}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}-\frac{K_{i_2}G_{1i_2}F_{i_2}}{r}v+$$

$$+\Bigg(\frac{E_{i_2}F_{i_2}}{r}+\frac{K_{i_2}G_{1i_2}F_{i_2}}{r}\Bigg)\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{E_{i_2}F_{i_2}\bar h_{i_2}}{r}\frac{\partial^2\bar\psi_2}{\partial\theta^2}-\frac{K_{i_2}G_{1i_2}F_{i_2}}{r}(1+\bar h_{i_2})\bar\psi_2\}\delta v d\theta\Big|_{\xi=\xi_{i_2}}+$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}\Bigg(r^2C_\rho\frac{\partial^2v}{\partial t^2}+rK_\rho\frac{\partial^2\bar\psi_2}{\partial t^2}\Bigg)\delta v d\xi d\theta+\sum_{i_1=1}^{k_1}\rho_{i_1}F_{i_1}r\int_0^{L/r}\Bigg(\frac{\partial^2v}{\partial t^2}+\bar h_{i_1}\frac{\partial^2\bar\psi_2}{\partial t^2}\Bigg)\delta v\Big|_{\theta=\theta_{i_1}}d\xi+$$

$$+\sum_{i_2=1}^{k_2}\rho_{i_2}F_{i_2}r\int_0^{2\pi}\Bigg(\frac{\partial^2v}{\partial t^2}+\bar h_{i_2}\frac{\partial^2\bar\psi_2}{\partial t^2}\Bigg)\delta v\Big|_{\xi=\xi_{i_2}}d\theta+\sum_{j=1}^{k_m}\mathfrak{M}_j\Bigg(\frac{\partial^2v}{\partial t^2}+\bar l_j\frac{\partial^2\bar\psi_2}{\partial t^2}\Bigg)\delta v\Big|_{\xi=\xi_j}\Big|_{\theta=\theta_j}=-\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}q_2r^2\delta v d\xi d\theta;$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}\Bigg[C_{12}\frac{\partial u}{\partial\xi}+C_{22}\frac{\partial v}{\partial\theta}+C_{23}\frac{\partial v}{\partial\theta}-C_{13}\frac{\partial^2w}{\partial\xi^2}-C_{23}\frac{\partial^2w}{\partial\theta^2}+C_{22}w+(C_{23}+\bar K_{22})\frac{\partial\bar\psi_2}{\partial\theta}\Bigg]\delta w d\theta d\xi-$$

$$-\sum_{i_1=1}^{k_1}\int_0^{L/r}\Bigg\{\frac{K_{i_1}G_{1i_1}F_{i_1}}{r}\frac{\partial^2w}{\partial\xi^2}-\Bigg[\frac{K_{i_1}G_{1i_1}F_{i_1}}{r}\Bigg]\frac{\partial\bar\psi_1}{\partial\xi}\Bigg\}\delta w d\xi\Big|_{\theta=\theta_{i_1}}-\sum_{i_2=1}^{k_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\Bigg\{\Bigg(-\frac{E_{i_2}F_{i_2}}{r}+\frac{K_{i_2}G_{1i_2}F_{i_2}}{r}\Bigg)\frac{\partial v}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{K_{i_2}G_{1i_2}F_{i_2}}{r}\frac{\partial^2w}{\partial\theta^2}-\frac{E_{i_2}F_{i_2}}{r}w-\Bigg[\frac{K_{i_2}G_{1i_2}F_{i_2}}{r}(1+\bar h_{i_2})+\frac{E_{i_2}F_{i_2}\bar h_{i_2}}{r}\Bigg]\frac{\partial\bar\psi_2}{\partial\theta}\}\delta w d\theta\Big|_{\xi=\xi_{i_2}}+$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}r^2C_\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\delta w d\xi d\theta+\sum_{i_1=1}^{k_1}\rho_{i_1}F_{i_1}r\int_0^{L/r}\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\delta w d\xi\Big|_{\theta=\theta_{i_1}}+$$

$$+\sum_{i_2=1}^{k_2}\rho_{i_2}F_{i_2}r\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\delta w d\theta\Big|_{\xi=\xi_{i_2}}+\sum_{j=1}^{k_m}\mathfrak{M}_j\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\delta w\Big|_{\xi=\xi_j}\Big|_{\theta=\theta_j}=-\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}q_3r^2\delta w d\xi d\theta.$$

$$
-\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}\left[\bar{K}_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\bar{K}_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+(\bar{K}_{12}+\bar{K}_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\theta}+(C_{13}+\bar{K}_{12})\frac{\partial w}{\partial\xi}+\right.
$$

$$
\left.+\bar{D}_{11}\frac{\partial^2\bar{\psi}_1}{\partial\xi^2}+\bar{D}_{66}\frac{\partial^2\bar{\psi}_1}{\partial\theta^2}-C_{13}\bar{\psi}_1+(\bar{D}_{66}+\bar{D}_{12})\frac{\partial^2\bar{\psi}_2}{\partial\xi\partial\theta}\right]\delta\bar{\psi}_1 d\xi d\theta-
$$

$$
-\sum_{i_1=1}^{k_1}\int_0^{L/r}\left\{\frac{E_{i_1}F\bar{h}_{i_1}}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{K_{i_1}G_{1i_1}F_{i_1}}{r}\frac{\partial w}{\partial\xi}+\left(\frac{E_{i_1}F\bar{h}_{i_1}^2}{r}+\frac{E_{i_1}I_{i_1\theta}}{r^3}\right)\frac{\partial^2\bar{\psi}_1}{\partial\xi^2}+(\frac{E_{i_1}F}{r}\bar{h}_{i_1}^2-\right.
$$

$$
\left.-\frac{K_{i_1}G_{1i_1}F_{i_1}}{r}\bar{\psi}_1\right\}\delta\bar{\psi}_1 d\xi\Big|_{\theta=\theta_{i_1}}-\sum_{i_2=1}^{k_2}\int_0^{2\pi}\frac{G_{i_2}I_{i_2kr}}{r^3}\frac{\partial^2\bar{\psi}_1}{\partial\theta^2}\delta\bar{\psi}_1 d\theta\Big|_{\xi=\xi_{i_2}}+
$$

$$
+\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}\left(rK_\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+D_\rho\frac{\partial^2\bar{\psi}_1}{\partial t^2}\right)\delta\bar{\psi}_1 d\xi d\theta+\sum_{i_1=1}^{k_1}\int_0^{L/r}\left[r\rho_{i_1}F_{i_1}\bar{h}_{i_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\rho_{i_1}}{r}(F_{i_1}r^2\bar{h}_{i_1}^2+I_{i_1\theta})\frac{\partial^2\bar{\psi}_1}{\partial t^2}\right]\delta\bar{\psi}_1\Big|_{\theta=\theta_{i_1}}\times
$$

$$
\times d\xi+\sum_{i_2=1}^{k_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}r\rho_{i_2}b_\xi\left[F_{i_2}\bar{h}_{i_2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(F_{i_2}\bar{h}_{i_2}^2+\frac{I_{i_2kr}}{r^2}\right)\frac{\partial^2\bar{\psi}_1}{\partial t^2}\right]\delta\bar{\psi}_1\Big|_{\xi=\xi_{i_2}}d\theta+
$$

$$
+\sum_{j=1}^{k_m}\mathfrak{M}_j\bar{l}_j\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\bar{l}_j\frac{\partial^2\bar{\psi}_1}{\partial t^2}\right)\delta\bar{\psi}_1\Big|_{\xi=\xi_j}\Big|_{\theta=\theta_j}=0;
$$

$$
-\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}\left[(\bar{K}_{12}+\bar{K}_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\theta}+\bar{K}_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\bar{K}_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}-C_{23}v+\left(\frac{\bar{K}_{22}}{r_{2\xi}}+C_{23}\right)\frac{\partial w}{\partial\theta}+\right.
$$

$$
\left.+(\bar{D}_{12}+\bar{D}_{66})\frac{\partial^2\bar{\psi}_1}{\partial\xi\partial\theta}+\bar{D}_{22}\frac{\partial^2\bar{\psi}_2}{\partial\theta^2}+\bar{D}_{66}\frac{\partial^2\bar{\psi}_2}{\partial\xi^2}-C_{23}\bar{\psi}_2\right]\delta\bar{\psi}_2 d\xi d\theta-
$$

$$
-\sum_{i_1=1}^{k_1}\int_0^{L/r}\frac{G_{i_1kr}I_{i_1kr}}{r^3}\frac{\partial^2\bar{\psi}_2}{\partial\xi^2}\delta\bar{\psi}_2\Big|_{\theta=\theta_{i_1}}d\xi-\sum_{i_2=1}^{k_2}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{E_{i_2}F_{i_2}\bar{h}_{i_2}}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}-\right.
$$

$$
-\frac{K_{i_2}G_{i_2}F_{i_2}}{r}(1+\bar{h}_{i_2})v+\left[\frac{E_{i_2}F_{i_2}\bar{h}_{i_2}}{r}+\frac{K_{i_2}G_{i_2}F_{i_2}}{r}(1+\bar{h}_{i_2})\right]\frac{\partial w}{\partial\theta}+
$$

$$
\left.+\left(\frac{E_{i_2}F_{i_2}\bar{h}_{i_2}^2}{r}+\frac{E_{i_2}I_{i_2\xi}}{r^3}\right)\frac{\partial^2\bar{\psi}_2}{\partial\theta^2}-\frac{K_{i_2}G_{i_2}F_{i_2}}{r}(1+\bar{h}_{i_2})^2\bar{\psi}_2\right\}\delta\bar{\psi}_2\Big|_{\xi=\xi_{i_2}}d\theta+
$$

$$
+\int_0^{2\pi}\int_0^{L/r}\left(rK_\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+D_\rho\frac{\partial^2\bar{\psi}_2}{\partial t^2}\right)\delta\bar{\psi}_2 d\xi d\theta+\sum_{i_1=1}^{k_1}\int_0^{L/r}\left\{r\rho_{i_1}F_{i_1}\bar{h}_{i_1}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\rho_{i_1}}{r}(F_{i_1}r^2\bar{h}_{i_1}^2+\right.
$$

$$
\left.+I_{i_1kr})\frac{\partial^2\bar{\psi}_2}{\partial t^2}\right\}\delta\bar{\psi}_2\Big|_{\theta=\theta_{i_1}}d\xi+\sum_{i_2=1}^{k_2}\int_0^{2\pi}r\rho_{i_2}\left[F_{i_2}\bar{h}_{i_2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(F_{i_2}\bar{h}_{i_2}^2+\frac{I_{i_2\xi}}{r^2})\frac{\partial^2\bar{\psi}_2}{\partial t^2}\right]\delta\bar{\psi}_2\Big|_{\xi=\xi_{i_2}}d\theta+
$$

$$
+\sum_{j=1}^{k_m}\mathfrak{M}_j\bar{l}_j\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\bar{l}_j\frac{\partial^2\bar{\psi}_2}{\partial t^2}\right)\delta\bar{\psi}_2\Big|_{\xi=\xi_j}\Big|_{\theta=\theta_j}=0. \qquad (12)
$$

Получены также естественные граничные условия на торцах оболочки:

$$\int_0^{2\pi}\left(C_{11}\frac{\partial u}{\partial\xi}+C_{12}\frac{\partial v}{\partial\theta}+C_{12}w+\bar{K}_{11}\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\xi}+\bar{K}_{12}\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\theta}\right)\delta u\Big|_0^{L/r}d\theta+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{k_1}\frac{E_{i_1}F}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\bar{h}_{i_1}\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\xi}\right)\delta u\Big|_0^{L/r}\Bigg|_{\theta=\theta_{i_1}}+\int_{\theta_1}^{\theta_2}rT_1\delta u\Big|_0^{L/r}d\theta=0\,;$$

$$\int_0^{2\pi}\left[C_{66}\frac{\partial u}{\partial\theta}+C_{66}\frac{\partial v}{\partial\xi}+\bar{K}_{66}\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\theta}+\bar{K}_{66}\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\xi}\right]\delta v\Big|_0^{L/r}d\theta+\int_0^{2\pi}rS\delta v\Big|_0^{L/r}d\theta=0\,;$$

$$\int_0^{2\pi}C_{13}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}-\bar{\psi}_1\right)w\Big|_0^{L/r}d\theta+\sum_{i_1=1}^{k_1}\frac{K_{i_1}G_{1i_1}F_{i_1}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}-\bar{\psi}_1\right)\delta w\Big|_0^{L/r}\Bigg|_{\theta=\theta_{i_1}}+\int_0^{2\pi}rQ_1\delta w d\theta\Big|_0^{L/r}=0\,;$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\bar{K}_{11}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\bar{K}_{12}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\bar{K}_{12}w+\bar{D}_{11}\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\xi}+\bar{D}_{12}\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\theta}\right)\delta\bar{\psi}_1\Big|_0^{L/r}d\theta+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{k_1}\left[\frac{E_{i_1}F\bar{h}_{i_1}}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\bar{h}_{i_1}\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\xi}\right)+\frac{E_{i_1}I_{i_1\theta}}{r^3}\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\xi}\right]\delta\bar{\psi}_1\Big|_0^{L/r}\Bigg|_{\theta=\theta_{i_1}}+\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_1b_\xi\delta\bar{\psi}_1 d\theta\Big|_{\xi_1}^{\xi_2}=0\,;$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\bar{K}_{66}\frac{\partial v}{\partial\xi}+\bar{K}_{66}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\bar{D}_{66}\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\xi}+\bar{D}_{66}\frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\theta}\right)\delta\bar{\psi}_2\Big|_0^{L/r}d\theta+\sum_{i_1=1}^{k_1}\frac{G_{i_1kr}I_{i_1kr}}{r^3}\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\xi}\delta\bar{\psi}_2\Big|_0^{L/r}\Bigg|_{\theta=\theta_{i_1}}=0\,. \qquad (13)$$

Отметим, если одно из граничных условий (13) не выполняется автоматически, соответствующее уравнение дополняет систему уравнений (12).

2. Методика решения. Перемещения точек срединной поверхности оболочки представляются в следующем виде:

$$u=\cos\omega t\sum_{n=0}^{N}\cos n\theta\sum_{i=-1}^{M+1}u_{1n}^iB_3^i(\xi);\quad v=\cos\omega t\sum_{n=1}^{N}\sin n\theta\sum_{i=-1}^{M+1}u_{2n}^iB_3^i(\xi);$$

$$w=\cos\omega t\sum_{n=0}^{N}\cos n\theta\sum_{i=-1}^{M+1}u_{3n}^iB_3^i(\xi);\ \bar{\psi}_1=\cos\omega t\sum_{n=0}^{N}\cos n\theta\sum_{i=-1}^{M+1}u_{4n}^iB_3^i(\xi);$$

$$\bar{\psi}_2=\cos\omega t\sum_{n=1}^{N}\sin n\theta\sum_{i=-1}^{M+1}u_{5n}^iB_3^i(\xi). \qquad (14)$$

где ω — круговая частота колебаний в задаче о собственных колебаниях (принимается равной нулю при решении задач статики); n — параметр волнообразования в кольцевом направлени; N — число членов тригонометрического ряда, удерживаемых в кольцевом направлени; $M+3$ — число узлов сплайн-сетки вдоль образующей оболочки (равно числу точек коллокаций mk, включая две точки на границах; $u_{1n}^i, u_{2n}^i, \ldots, u_{5n}^i$ — неизвестные константы, определяемые из системы алгебраических уравнений, полученной методом коллокаци; B_3^i — бета-сплайн третьей степени.

Подставив (14) в (12), (13), выполняем дифференцирование и интегрирование по координате θ, и наносим по координате ξ сплайн-сетку с шагом $\Delta\xi = \dfrac{L}{rM}$. Точки коллокаций выбираем так, как рекомендуется в [6]. Таким образом, задача сводится к системе неоднородных алгебраических уравнений при решении задачи о напряженно-деформированном состоянии, или к системе однородных алгебраических уравнений при решении задачи на собственные значения. Далее используются стандартные программы математического обеспечения.

3. Числовые результаты. Изложенная выше методика исследования задач статики и динамики цилиндрических замкнутых многослойных оболочек с конструктивными и технологическими особенностями (ребра жесткости, присоединенные сосредоточенные массы) при произвольных граничных условиях реализована в оболочке программного комплекса MATLAB.

С помощью разработанного пакета вычислительных программ проведено исследование практической сходимости результатов расчета для двух типов граничных условий и выполнено сравнение полученных данных с результатами других авторов.

На примере оболочки, рассмотренной в [2] ($v = 0,3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ н/м^2, $\rho = 7800$ кг/м^3, $r = L = 0,25$ м, $h = 10^{-3}$ м), исследована сходимость решения в зависимости от числа точек коллокаций. Оболочка была подкреплена регулярной системой из восьми продольных ребер, обладающих только жесткостью на изгиб $I_{i_1\xi} = 82,984 \cdot 10^{-12}$ м^4.

В таблице приведены значения максимальных величин прогибов и изгибающих моментов, полученных для продольно подкрепленной оболочки в сечении $\xi = 0,5L/r$ при различ-

θ	0	$\pi/16$	$\pi/8$	$3\pi/16$	$\pi/4$
			$\bar{w}$		
Данные [2]	1,310	1,355	1,414	1,444	1,451
$mk = 26$	1,315	1,357	1,412	1,439	1,445
$mk = 58$	1,311	1,355	1,413	1,443	1,450
$mk = 90$	1,310	1,355	1,413	1,443	1,451
$mk = 122$	1,310	1,355	1,414	1,444	1,451
$mk = 154$	1,310	1,355	1,414	1,444	1,451
			$\bar{M}_1$		
Данные [2]	0,1390	0,2064	0,2334	0,2330	0,2294
$mk = 26$	0,1433	0,2075	0,2322	0,2312	0,2277
$mk = 58$	0,1396	0,2066	0,2331	0,2325	0,2289
$mk = 90$	0,1389	0,2065	0,2333	0,2327	0,2291
$mk = 122$	0,1388	0,2065	0,2333	0,2327	0,2291
$mk = 154$	0,1387	0,2065	0,2333	0,2327	0,2291
			$\bar{M}_2$		
Данные [2]	-0,1493	0,0544	0,1168	0,1013	0,0861
$mk = 26$	-0,1345	0,0567	0,1137	0,0975	0,0827
$mk = 58$	-0,1449	0,0551	0,1161	0,1002	0,0849
$mk = 90$	-0,1466	0,0549	0,1165	0,1006	0,0852
$mk = 122$	-0,1471	0,0548	0,1167	0,1007	0,0853
$mk = 154$	-0,1473	0,0548	0,1167	0,1007	0,0853

ных значениях mk. Внешняя нагрузка, как и ранее в [2], принята в виде $q_3 = \frac{4}{\pi}\sin(\frac{\pi r}{L}\xi)$. Расчет параметров напряженно-деформированного состояния оболочки выполнен при удержании в кольцевом направлении в рядах (14) членов с $n = 0, 8, \ldots, 64$.

Из таблицы видно, что с увеличение числа точек коллокации значения искомых величин стремятся к значениям, близким к полученным в [2] в тригонометрических рядах при $N = 9$. Все приведенные величины отличаются от полученных ранее менее чем на 1 %, за исключением кольцевого момента $\bar{M}_2$ на ребре (1,3 %), где сходимость решения наихудшая. Также следует отметить, что ранее задача рассматривалась в классической постановке, здесь — на основе сдвиговой теории по модели, предложенной С.П. Тимошенко [4] для балок.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы "Поддержка развития приоритетных направлений научных исследований" (6541230).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 384 с.
2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки, Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
3. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Ревуцкий В.Н., Скосаренко Ю.В. и др. Колебания ребристых оболочек вращения. Киев:Наук. думка, 1988. 172 с.
4. Timoshenko S.P., Young D.H., W. Weaver. Vibration Problems un Engineering. New York: John Wiley & Sons, 1975. 470 p.
5. Lugovoi P.Z., Sirenko V.N., Skosarenko Yu.V. Dynamics of a Discretely Reinforced Shell Under a Local Impulsive Load. *Int. Appl. Mech.* 2017. **53**, № 2. P. 173—180.
6. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.Н. Численные методы. Механика композитов. Т. 11. Киев, "А.С.К.", 2002. 448 с.

Поступило в редакцию 03.04.2019

REFERENCES

1. Ambartsumyan, S. A. (1961). Theory of anisotropic shells. Moscow: State. publishing house physical. Literature (in Russian).
2. Amiro, I. Ya., Zarutsky, V. A. & Polyakov, P. S. (1973). Ribbed cylindrical shells. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
3. Amiro, I. Ya., Zarutsky, V. A., Revutsky, V. N., Skosarenko, Yu. V. et al. (1988). Oscillations of the ribbed shells of revolution. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
4. Timoshenko, S. P., Young, D. H. & W. Weaver (1975). Vibration Problems un Engineering. John Wiley & Sons.
5. Lugovoi, P. Z., Sirenko, V. N. & Skosarenko, Yu. V. (2017). Dynamics of a Discretely Reinforced Shell. Under the Local Impulsive Load. Int. Appl. Mech. 53, No. 2, pp. 173-180.
6. Grigorenko, Y. M. & Shevchenko, Yu. N. (2002). Numerical methods. Mechanics of composites. T. 11. Kyiv, "A.S.K." (in Russian).

Received 03.04.2019

П.З. Луговий, Ю.В. Скосаренко, С.П. Орленко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: plugovyy@inmech.kiev.ua

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СПЛАЙН-КОЛОКАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ І ДИНАМІКИ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Метод сплайн-колокації, на відміну від використання подвійних тригонометричних рядів для апроксимації переміщень точок серединної поверхні оболонки, дозволяє істотно розширити клас розв'язуваних прикладних задач, а в деяких випадках отримати більш точні чисельні результати. Наприклад, зменшення кроку сітки по довжині оболонки в місцях її підкріплення кільцевими ребрами або розташування зосереджених мас, призводить до зменшення порядку розв'язувальної системи алгебраїчних рівнянь при тій же точності одержуваних результатів. Можливість змінювати граничні умови на поперечних краях оболонки дозволяє оцінити їх вплив на характеристики напружено-деформованого стану. Відзначимо, що раніше метод сплайн-колокації переважно використовувався для дослідження напружено-деформованого стану оболонок з повільно змінюючимися жерсткосними і геометричними параметрами вздовж координати, по якій використовується сплайн-апроксимація рішення. Тут метод застосовується для оболонок з істотно неоднорідною структурою. У методиці розрахунку статичного і динамічного напружено-деформованого стану і власних частот ребристих багатошарових ортотропних циліндричних оболонок з приєднаними масами на основі методу сплайн-колокації і методу розкладання рішення по формах власних коливань виконана апробація рішення на відомому прикладі. На чисельних прикладах досліджена практична збіжність переміщень, зусиль і моментів в залежності від числа точок колокації. Слід відзначити, що в основу розв'язку задачі покладена теорія оболонок і стержнів, заснована на зсувній моделі С.П. Тимошенка. Викладена вище методика дослідження задач статики і динаміки циліндричних замкнутих багатошарових оболонок з конструктивними і технологічними особливостями (ребра жорсткості, приєднані зосереджені маси) при довільних граничних умовах реалізована з допомогою розробленого програмного забезпечення.

Ключові слова: *циліндрична оболонка, підкріплюючі ребра, приєднані маси, напружено-деформований стан, сплайн-колокація, сплайн-апроксимація.*

Lugovyy P.Z., Skosarenko Y.V., Orlenko S.P.

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: plugovyy@inmech.kiev.ua

APPLICATION OF THE METHOD OF SPLINE-COLLOCATIONS
TO THE SOLUTION OF DYNAMIC AND STATIC PROBLEMS
FOR STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL SHELLS

The method of spline collocation, in contrast to the use of double trigonometric series for the approximation of the displacements of points of the middle surface of a shell, allows us to significantly expand the class of applied problems and, in some cases, to obtain more accurate numerical results. For example, by reducing the grid spacing along the length of the shell in places, where it is supported by circular edges, or by varying the location of concentrated masses, we can reduce the order of the resolving system of algebraic equations with the same accuracy of the results obtained. The ability to change the boundary conditions at the transverse edges of the shell makes it possible to evaluate their influence on the characteristics of the stress-strain state. Note that the spline-collocation method was mainly used to study the stress-strain state of shells with slowly varying stiffness and geometric parameters along the coordinate, where the spline approximation of the solution is used. Here, the method is used for shells with a substantially non-uniform structure. In the method of calculating the static and dynamic stress-strain state and natural frequencies of the ribbed multilayer orthotropic cylindrical shells with attached masses, the method based on the spline-collocation, and the method of decomposition of a solution in eigenoscillations, the solution were tested by the well-known example. Using numerical examples, the practical convergence of displacements, forces, and moments depending on the number of collocation points has been investigated. It should be noted that the solution of the problem uses the theory of shells and rods based on the S.P. Timoshenko shift model. The described method of studying the problems of the statics and dynamics of cylindrical closed multilayer shells with structural and technological features (stiffening ribs, attached concentrated masses) under arbitrary boundary conditions is implemented using the developed software.

Keywords: *cylindrical shell, stiffening ribs, attached mass, stress-strain state, spline-collocation, spline-approximation.*